

УДК 621.391

Релейная адаптация пороговых органов

Ж.Г. Гогиашвили, О.М. Намичейшвили, Г.Г. Шония,

Кафедра микропроцессоров и микропроцессорных систем

Тбилисского Государственного Университета им. Ив. Джавахишвили

Аннотация:

В работе излагается теория релейной адаптации без обратной связи и с обратной связью при пороговом резервировании бинарных каналов, используемых для передачи информации, получаемой в физических экспериментах. Решается задача синтеза линейной дискретной цепи с постоянными параметрами (ЛДЦПП), обеспечивающей устойчивость процесса релейной адаптации восстанавливающего органа без обратной связи и показывается корректность ее постановки.

Ключевые слова: релейная адаптация, задача синтеза линейной дискретной цепи с постоянными параметрами.

Релейная адаптация без обратной связи

Под релейной адаптацией восстанавливающего (решающего) органа порогового типа [1–2]. в отсутствие обратной связи понимается следующая стратегия приведения весов a_i ($i = \overline{1, n}$) его входов в соответствие с вероятностями q_i ($i = \overline{1, n}$) их ошибок.

Заранее задается критическое значение допустимой вероятности ошибки q_0 двоичных каналов B_1, B_2, \dots, B_n . Если вероятность q_i ошибки двоичного канала B_i превышает это критическое значение q_0 , то i -му двоичному каналу B_i присваивается вес a_i , равный нулю. Если же вероятность ошибки i -го двоичного канала не превосходит критического значения q_0 , то ему присваивается вес, равный единице. Таким образом,

$$a_i = \begin{cases} 0, & \text{если } q_i > q_0 \\ 1, & \text{если } q_i \leq q_0 \end{cases}. \quad (1)$$

Иначе говоря, значения весов задаются релейной функцией

$$a_i = \text{sgn}(q_0 - q_i), \quad (1')$$

что и служит основанием называть такую адаптацию релейной. Здесь

$$\text{sgn}(Z) = \begin{cases} 1, & \text{если } Z \geq 0 \\ 0, & \text{если } Z < 0 \end{cases}.$$

При этом вероятность ошибки каждого двоичного канала B_i оценивается как вероятность рассогласования сигнала X_i на i -м входе порогового элемента с правильным ответом X , подаваемым извне.

Для реализации стратегии (1) в принципе можно вычислять любую функцию F_0 , монотонно возрастающую с увеличением q_i , осуществляя приведение весов a_i в соответствие с вероятностями ошибок q_i , т.е. адаптацию, по соотношению:

$$a_i = \begin{cases} 0, & \text{если } F_0(q_i) > F_0(q_0) \\ 1, & \text{если } F_0(q_i) \leq F_0(q_0) \end{cases}. \quad (2)$$

Полагается, что проверка рассогласования между X и X_i ($i = \overline{1, n}$) производится через равные промежутки (такты) в целочисленные моменты времени k , причем k пробегает значения 0, 1, 2, и т.д.

Для конкретной реализации монотонной зависимости $F_0(q_i)$, т.е. сигнала, управляющего процессом установки веса a_i , воспользуемся линейной дискретной цепью с постоянными параметрами (ЛДЦПП), схематически показанной на рисунке 1. Ее импульсную характеристику обозначим через $g(k)$.

Импульсной характеристикой линейной дискретной цепи с постоянными параметрами, как известно, называется выходная последовательность $g(k) = F(k)$ при входной последовательности $f(k)$, заданной в виде единичного импульса $S_0(k)$, где

$$S_0(k) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0 \\ 0 & \text{при } k \neq 0 \end{cases}$$

Произвольная выходная последовательность $F(k)$ равна свертке входной



Рис. 1 ЛДЦПП в схеме релейной адаптации порогового решающего органа последовательности $f(m)$ с импульсной характеристикой ЛДЦПП:

$$F(k) = \sum_{m=-\infty}^k f(m) \cdot g(k-m). \quad (3)$$

Ограничимся рассмотрением ЛДЦПП, у которых импульсная характеристика $g(k)$ равна нулю для $k < 0$. Тогда условие (3) приобретет вид:

$$F(k) = \sum_{m=0}^k f(m) \cdot g(k-m). \quad (3')$$

Предположим, что с помощью цепи, обозначенной на рисунке 1 символом ИП (преобразователь), формируется входной сигнал $f(m)$, причем

$$f(m) = f_m = \begin{cases} 1, & \text{если } X_i \neq X \text{ в момент } t \\ 0, & \text{если } X_i = X \text{ в момент } t \end{cases}. \quad (4)$$

Следовательно, входная последовательность $f(m)$, поступающая на ЛДЦПП, является случайной импульсной последовательностью. В каждый фиксированный момент времени m переменная f_m выступает в роли случайной величины, принимающей значение нуль с вероятностью $1-q_i$ отсутствия ошибки на i -м входе решающего органа и значение единица с вероятностью q_i ошибки на нем: Поэтому каждое слагаемое

$$\varphi_m(k) = f(m) \cdot g(k-m) \quad (5)$$

суммы (3') также является в любой заданный момент времени m случайной величиной, принимающей значение нуль с вероятностью $1-q_i$ и значение $g(k-m)$ с вероятностью q_i . Таким образом, математическое ожидание дискретной случайной величины $\varphi_m(k)$ определится по формуле

$$M[\varphi_m(k)] = 0 \cdot (1-q_i) + g(k-m) \cdot q_i = q_i \cdot g(k-m). \quad (6)$$

Математическое ожидание суммы

$$F(k) = \sum_{m=0}^k \varphi_m(k)$$

может быть рассчитано по соотношению

$$M[F(k)] = \sum_{m=0}^k M[\varphi_m(k)]. \quad (7)$$

Подставляя (6) в (7), получим:

$$M[F(k)] = q_i \cdot \sum_{m=0}^k g(k-m). \quad (8)$$

Таким образом, в момент времени, соответствующий k тактам, средний сигнал на выходе ЛДЦПП будет определяться формулой (8). Если k достаточно большая величина, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M[F(k)] \equiv F_0(q_i) = q_i \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{m=0}^k g(k-m) \right],$$

или, что то же самое,

$$F_0(q_i) = q_i \cdot \sum_{l=0}^{\infty} g(l). \quad (9)$$

Естественно потребовать, чтобы значение выходного сигнала ЛДЦПП сходилось по вероятности к q_i и этим обеспечивалась требуемая устойчивость процесса адаптации для случая, когда сигнал f_m формируется в результате сравнения X_i с подаваемым извне правильным ответом X в тактовые моменты m . Последнее обстоятельство в первую очередь диктует необходимость выполнения следующего неравенства:

$$\sum_{l=0}^{\infty} g(l) < \infty. \quad (10)$$

Ряд $\sum_{l=0}^{\infty} g(l) < \infty$ с общим членом $a_l = g(l)$ сходится, если, как это следует из интегрального признака Коши, функция $g(z)$ монотонно убывает и несобственный интеграл

$$I_1 = \int_0^{\infty} g(z) dz$$

сходится. Это условие запишем в виде равенства

$$\int_0^{\infty} g(z) dz = A_0, \quad (11)$$

где A_0 – конечное вещественное положительное число.

Необходимость устойчивости процесса адаптации накладывает определенные требования и на дисперсию $D[F(k)]$ случайного сигнала $F(k)$.

Дисперсия суммы

$$F(k) = \sum_{m=0}^k \varphi_m(k)$$

независимых случайных величин $\varphi_m(k)$ равна сумме их дисперсий:

$$D[F(k)] = \sum_{m=0}^k D[\varphi_m(k)]. \quad (12)$$

Здесь

$$D[\varphi_m(k)] = M[\varphi_m^2(k)] - \{M[\varphi_m(k)]\}^2, \quad (13)$$

причем

$$M[\varphi_m^2(k)] = 0^2 \cdot (1 - q_i) + g^2(k-m) \cdot q_i = q_i \cdot g^2(k-m). \quad (14)$$

Подставляя (14) и (6) в формулу (13), будем иметь:

$$D[\varphi_m(k)] = q_i \cdot g^2(k-m) - [q_i \cdot g(k-m)]^2 = q_i \cdot (1 - q_i) \cdot g^2(k-m). \quad (15)$$

Учитывая же (15) в соотношении (12), получим:

$$D[F(k)] = q_i \cdot (1 - q_i) \cdot \sum_{m=0}^k g^2(k - m). \quad (16)$$

Через достаточно большое число тактов будем иметь:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{D[F(k)]\} \equiv D[F_0(q_i)] = q_i \cdot (1 - q_i) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{m=0}^k g^2(k - m) \right],$$

или, что то же самое,

$$D[F_0(q_i)] = q_i \cdot (1 - q_i) \cdot \sum_{l=0}^{\infty} g^2(l). \quad (17)$$

Рассмотрим два ряда:

$$S_1 = \sum_{l=0}^{\infty} l \cdot g(l)$$

и

$$S_2 = \sum_{l=0}^{\infty} g^2(l).$$

Они имеют положительные члены и, начиная с некоторого l , величина $l \cdot g(l) \geq g^2(l)$, так как $g(l)$ является монотонно убывающей функцией. Поэтому из сходимости ряда S_1 будет следовать и сходимость ряда S_2 , а, следовательно, и дисперсии (17). Требование же сходимости ряда S_1 запишем в форме, диктуемой интегральным признаком Коши:

$$\int_0^{\infty} z \cdot g(z) dz = \tau_0, \quad (18)$$

где τ_0 – конечное положительное число.

Проблему отыскания $g(k)$ и синтеза ЛДЦПП, обеспечивающей устойчивость процесса адаптации, можно сформулировать как изопериметрическую задачу вариационного исчисления [3]. Это значит, что ищется g как функция z , для которой интеграл

$$I = \int_a^b \Phi(z, g) dz \quad (19)$$

принимает максимальное значение в условиях (11) и (18), имеющих форму ограничений

$$\int_a^b \Phi_1(z, g) dz = \beta_1 \quad (11')$$

и

$$\int_a^b \Phi_2(z, g) dz = \beta_2, \quad (18')$$

где β_1 и β_2 - суть заданные постоянные.

Как известно, функция $g(z)$, доставляющая максимум интегралу I , определяется как решение уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial g} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial g} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial g} = 0, \quad (20)$$

где λ_1 и λ_2 - так называемые неопределенные множители, которые находят подстановкой зависимости $g(z)$, удовлетворяющей уравнению (20), в соотношения (11') и (18').

Для получения конкретного результата надо задаться видом $\Phi(z, g)$ и учесть, что в нашем случае $a = 0$, $b = \infty$.

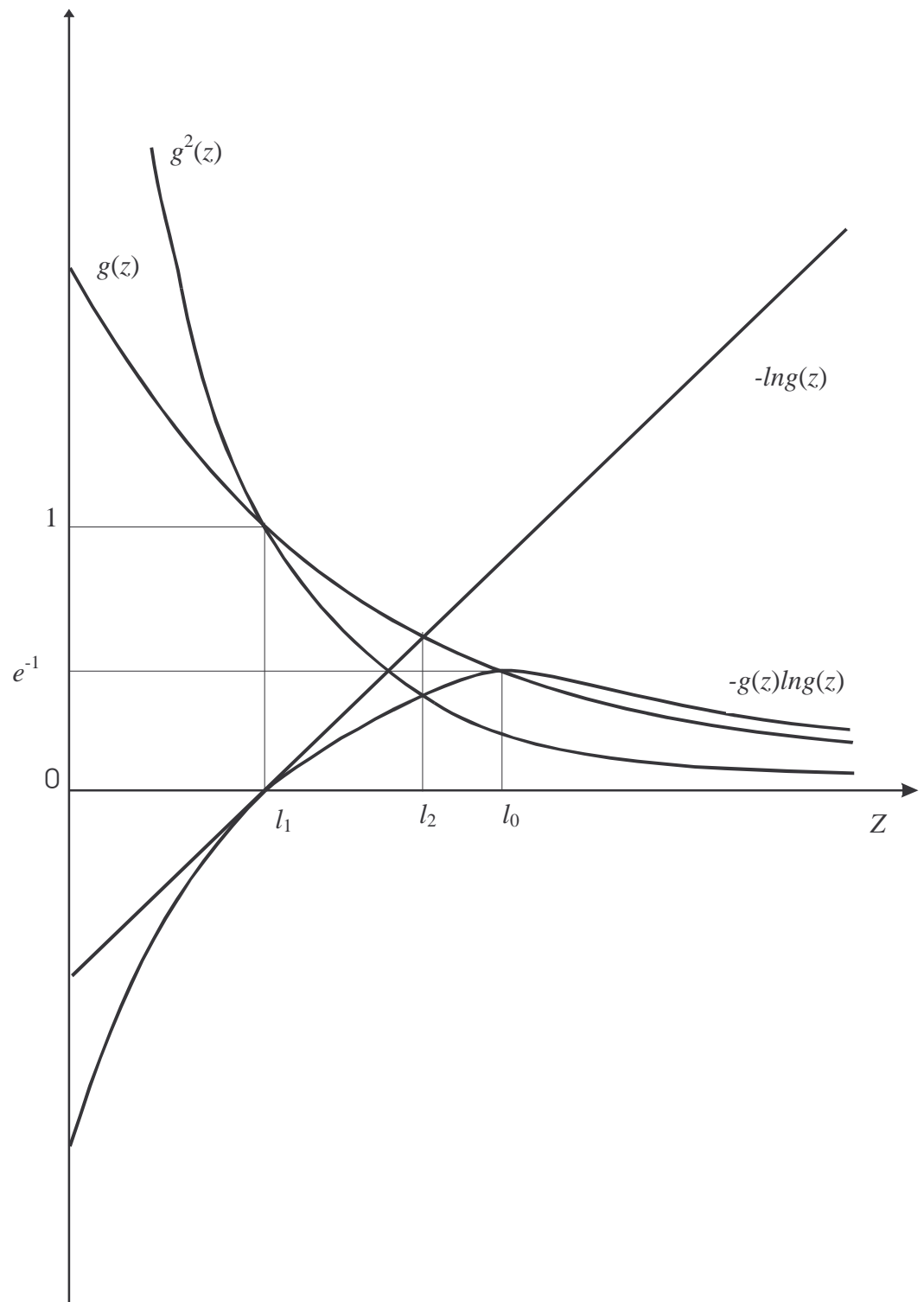


Рис.2. К обоснованию выбора функции $\Phi(z, g)$

С целью обоснования выбора $\Phi(z, g)$ обратимся к представленным на рисунке 2 графикам и рассмотрим два ряда:

$$S_2 = \sum_{l=0}^{\infty} g^2(l)$$

и

$$S_3 = -\sum_{l=0}^{\infty} g(l) \cdot \ln g(l).$$

Отбрасывание конечного числа начальных членов в этих рядах не отразится на их поведении, в частности, на их сходимости. Поэтому отбросим в S_2 и S_3 начальные члены до $l = l_0$, при котором $g(l) = e^{-1} \approx 0,3679$, а $(-g \cdot \ln g)$ достигает максимума, равного e^{-1} . В результате придем к необходимости рассмотрения поведения укороченных рядов:

$$S_2' = \sum_{l=l_0}^{\infty} g^2(l)$$

и

$$S_3' = -\sum_{l=l_0}^{\infty} g(l) \cdot \ln g(l).$$

При $l \geq l_0$ они имеют положительные члены, удовлетворяющие условию

$$-g(l) \cdot \ln g(l) \geq g^2(l),$$

и при этом $-g(z) \cdot \ln g(z)$ с ростом z монотонно убывает, согласно рисунку 2, оставаясь не меньше, чем $g(z)$. Поэтому из сходимости ряда S_3' следует сходимость ряда S_2' , а в конечном итоге и S_2 . На основании же интегрального признака Коши ряд S_3 с общим членом $-g(l) \cdot \ln g(l)$ сходится, если $-g(z) \cdot \ln g(z)$ монотонно убывает и несобственный интеграл

$$-\int_C^{\infty} g(z) \cdot \ln g(z) dz$$

сходится. При этом нижний предел C берется произвольно, лишь бы выражение $-g(z) \cdot \ln g(z)$ при $C < z < \infty$ было определено и не имело разрывов. В нашем случае можно принять, что $C = 0$.

Таким образом, требование сходимости ряда S_2 эквивалентно условию

$$-\int_0^{\infty} g \cdot \ln g \cdot dz = I,$$

где I - конечное вещественное число.

Отождествляя полученный интеграл с соотношением (19), легко обнаружить, что

$$\Phi(z, g) = -g \cdot \ln g,$$

и задача синтеза ЛДЦПП сведется к определению ее импульсной характеристики $g(z)$ из условия максимума выражения

$$I = -\int_0^{\infty} g(z) \cdot \ln g(z) \cdot dz \quad (21)$$

при ограничениях (11) и (18).

Очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z, g) &= -g \cdot \ln g \\ \frac{\partial \Phi}{\partial g} &= -(1 + \ln g) \\ \Phi_1(z, g) &= g \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial g} &= 1 \\ \Phi_2(z, g) &= z \cdot g \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial g} &= z \end{aligned} \right\}.$$

Подставляя найденные выражения в уравнение (20), получим:

$$g = e^{\lambda_1 - 1} \cdot e^{\lambda_2 z}. \quad (22)$$

Поскольку $g(z)$ есть монотонно убывающая с ростом z функция, то должно быть выполнено условие

$$\lambda_2 < 0. \quad (23)$$

Внося значение (22) в ограничение (11) и учитывая условие (23), находим:

$$e^{\lambda_1 - 1} = -A_0 \cdot \lambda_2. \quad (24)$$

Подставляя же (24) и (22) в равенство (18), приходим к следующему результату:

$$\int_0^{\infty} -A_0 \cdot \lambda_2 \cdot z \cdot e^{\lambda_2 z} dz = \tau_0,$$

откуда

$$\lambda_2 = -\frac{A_0}{\tau_0}, \quad (25)$$

и, таким образом,

$$e^{\lambda_1 - 1} = -\frac{A_0^2}{\tau_0}. \quad (26)$$

Учитывая (26) и (25) в соотношении (22), окончательно будем иметь:

$$g(z) = A_0^2 \cdot \tau_0^{-1} \cdot \exp\left(-\frac{A_0}{\tau_0} \cdot z\right).$$

Следовательно,

$$g(k) = \begin{cases} \frac{A_0}{T_s} \cdot e^{-\frac{k}{T_s}}, & \text{если } k \geq 0, \\ 0, & \text{если } k < 0 \end{cases}, \quad (27)$$

что представляет собой импульсную характеристику фильтра низких частот с постоянной времени $T_s = \tau_0/A_0$. Легко убедиться в том, что в данном случае

$$F_0(q_i) = q_i \cdot \frac{A_0}{T_s} \cdot \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{1}{T_s}\right)}.$$

Если при этом параметр $A_0 = 1$, а постоянная времени T_s велика, то

$$F_0(q_i) \rightarrow q_i. \quad (28)$$

Что касается дисперсии снимаемого с выхода ЛДЦПП сигнала, то она определяется выражением

$$D[F_0(q_i)] = q_i \cdot (1 - q_i) \cdot \left(\frac{A_0}{T_s}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{2}{T_s}\right)}.$$

Если $T_s \rightarrow \infty$, то

$$D[F_0(q_i)] \rightarrow 0. \quad (29)$$

Подводя итоги проведенного здесь исследования, можно заключить, что задача синтеза ЛДЦПП, обеспечивающей устойчивость процесса релейной адаптации восстанавливающего органа без обратной связи имеет корректную постановку и решение.

Релейная адаптация с обратной связью

При релейной адаптации с обратной связью контролируется рассогласование сигналов X_i на входах порогового органа с принимаемым им решением Y . Вероятность такого рассогласования d_i и заменяет собой вероятность q_i ошибки i -го входа во всех полученных выше соотношениях, которые остаются в силе и при наличии обратной связи.

Поскольку $q_i - Q \leq d_i \leq q_i + Q$ ($i = \overline{1, n}$), то при малых значениях вероятности Q ошибки порогового органа $F_0(d_i) \rightarrow q_i$.

Литература:

1. Gogiashvili J., Dalakishvili K., Namicheishvili O. Threshold Redundancy of Binary Channels // Bulletin of the Georgian Academy of Sciences.-1998.-V.157.-`1.-P.38-41.
2. Гогиашвили Ж.Г. Исследование порогового элемента для радиофизических применений: Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.-Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1998.-32 с.
3. Голдман С. Теория информации: Пер. с англ.-М.: ИЛ, 1957.-446 с.

Статья получена: 2004-10-11