О численном решении граничной задачи для уравнений равновесия непологой сферической оболочки

Дали Чокораия, Марина Ментешашвили
Тбилисский Государственный Университет им. Ив. Джавахишвили
Email: cyber@viam.hepi.edu.ge

Аннотация:

В настоящей статье рассмотрена система уравнений равновесия непологой сферической оболочки, когда вектор перемещения не зависит от толщинной координаты x_3. Для указанной системы конечно-разностным методом решена первая граничная задача в случае прямоугольной области.

Ключевые слова: *непологая сферическая оболочка, вектор перемещения.*

В представленной работе рассматривается система уравнений равновесия сферической оболочки постоянной толщины $2h$. Эта система получается из соответствующих трехмерных уравнений в случае, когда вектор перемещения не зависит от т.н. толщинной координаты x_3.

Для непологой сферической оболочки (с изменяющейся внутренней геометрией по толщине) указанная система в компонентах вектора смещения имеет вид

$$\begin{cases} 4\mu \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\dfrac{1}{\Lambda}\dfrac{\partial u_+}{\partial z}\right) + 2(\lambda+\mu)\dfrac{\partial \theta}{\partial \bar{z}} + \dfrac{4(\lambda+2\mu)}{\rho}\dfrac{\partial u_+}{\partial z} = \phi(x,y), \\ \mu \nabla^2 u_3 - \dfrac{\lambda+3\mu}{\rho}\theta - \dfrac{2(\lambda+2\mu)}{\rho^2}u_3 = \varphi_3(x,y), \\ \theta = \dfrac{1}{\Lambda}\left(\dfrac{\partial u_+}{\partial z} + \dfrac{\partial \bar{u}_+}{\partial \bar{z}}\right), \qquad \Lambda = \dfrac{4\rho^2}{(1+z\bar{z})^2} = \dfrac{4\rho^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}, \\ \phi = \varphi_1 + i\varphi_2, \qquad u_+ = u_1 + iu_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $\nabla^2 = \dfrac{4}{\Delta}\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ оператор Лапласа поверхности сферы, ρ – радиус сферы, λ и μ – упругие постоянные Ламе, u_1, u_2, u_3 – компоненты вектора смещения u, $z = x + iy$ – комплексная переменная, φ_1, φ_2, φ_3 – компоненты внешней силы.

Из системы (1) с учетом следующих равенств

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\frac{1}{\Lambda^2}\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial \ln \Lambda}{\partial x}, \qquad \theta = \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)$$

с помощью соответствующих преобразований получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + f_1(x,y)\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right) - f_2(x,y)\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x} - \dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right) + a_2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \\ \qquad + f_3(x,y)\dfrac{\partial u_3}{\partial x} = \dfrac{1}{\mu} f_6(x,y)\phi_1(x,y), \\ a_1 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f_4(x,y)\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x} - \dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right) - f_5(x,y)\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right) + a_2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \\ \qquad + f_3(x,y)\dfrac{\partial u_3}{\partial y} = \dfrac{1}{\mu} f_6(x,y)\phi_2(x,y), \\ \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}\right) - a_3\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right) - \dfrac{\mu}{\rho} f_3(x,y)u_3 = f_6(x,y)\phi_3(x,y), \end{cases} \tag{2}$$

где

$$a_1 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}, \qquad a_2 = \frac{\lambda + \mu}{\mu}, \qquad a_3 = \frac{\lambda + 3\mu}{\mu},$$

$$f_1(x,y) = 4a_1 \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \qquad f_2(x,y) = \frac{4y}{1 + x^2 + y^2},$$

$$f_3(x,y) = 8\rho\, a_1 \frac{1}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2}, \qquad f_4(x,y) = \frac{4x}{1 + x^2 + y^2},$$

$$f_5(x,y) = 4a_1 \frac{y}{1 + x^2 + y^2}, \qquad f_6(x,y) = \frac{4\rho^2}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2}.$$

Пусть в прямоугольнике $G = \{0 < x < 1, \ \ 0 < y < 1\}$ с границей Γ требуется найти решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям

$$u_1(x,y) = 0, \quad u_2(x,y) = 0, \quad u_3(x,y) = 0, \quad \text{при } (x,y) \in \Gamma. \tag{3}$$

Введем прямоугольную сетку

$$G_h = \left\{x_{ij} = \left(x^{(i)}, y^{(j)}\right)\right\},$$

где $x^{(i)} = ih, \quad y^{(j)} = jh, \quad i = 0,1,\dots,N, \quad i = 0,1,\dots,N, \quad hN = 1.$

Заменим задачу (2)-(3) разностной схемой

$$\begin{aligned} & a_1 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{h^2} + f_{1,i}^j\left(\frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h} + \frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{h}\right) - \\ & - f_{2,i}^j\left(\frac{v_{i+1}^j - v_i^j}{h} + \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{h}\right) + a_2 \frac{v_{i+1}^{j+1} - v_{i+1}^j - v_i^{j+1} + v_i^j}{h^2} + f_{3,i}^j \frac{w_{i+1}^j - w_i^j}{h} = f_{6,i}^j \varphi_{1,i}^j, \\ & a_1 \frac{v_i^{j+1} - 2v_i^j + u_i^{j-1}}{h^2} + \frac{v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j}{h^2} + f_{4,i}^j\left(\frac{v_{i+1}^j - v_i^j}{h} + \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{h}\right) + \\ & + f_{5,i}^j\left(\frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h} + \frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{h}\right) + a_2 \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i+1}^j - u_i^{j+1} + u_i^j}{h^2} + f_{3,i}^j \frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{h} = f_{6,i}^j \varphi_{2,i}^j, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\mu\left(\frac{w_{i+1}^{j}-2w_{i}^{j}+w_{i-1}^{j}}{h^{2}}+\frac{w_{i}^{j+1}-2w_{i}^{j}+w_{i}^{j-1}}{h^{2}}\right)-a_{3}\left(\frac{u_{i+1}^{j}-u_{i}^{j}}{h}+\frac{v_{i}^{j+1}-v_{i}^{j}}{h}\right)-$$

$$-\frac{\mu}{\rho}f_{3,i}^{j}w_{i}^{j}=f_{6,i}^{j}\varphi_{3,i}^{j},$$

$$i=1,2,\ldots,N-1,\qquad j=1,2,\ldots,N-1.$$

$$\begin{array}{llll} u_{0j}=0, & u_{Nj}=0, & u_{i0}=0, & u_{iN}=0,\\ v_{0j}=0, & v_{Nj}=0, & v_{i0}=0, & v_{iN}=0,\\ w_{0j}=0, & w_{Nj}=0, & w_{i0}=0, & w_{iN}=0, \end{array} \tag{5}$$

$$j=0,1,\ldots,N,\qquad i=0,1,\ldots,N.$$

Разностная схема (4)-(5) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, которую перепишем в виде:

$$\begin{cases} \frac{a_1}{h^2}u_{i-1}^{j}-\left(\frac{2(a_1+1)}{h^2}+\frac{f_{1,i}^{j}+f_{2,i}^{j}}{h}\right)u_i^j+\left(\frac{a_1}{h^2}+\frac{f_{1,i}^{j}}{h}\right)u_{i+1}^{j}+\frac{1}{h}u_i^{j-1}+\left(\frac{1}{h^2}+\frac{f_{2,i}^{j}}{h}\right)u_i^{j+1}-\\ -\left(\frac{f_{1,i}^{j}-f_{2,i}^{j}}{h}-\frac{a_2}{h^2}\right)v_i^j-\left(\frac{a_2}{h^2}+\frac{f_{2,i}^{j}}{h}\right)v_{i+1}^{j}-\left(\frac{a_2}{h^2}-\frac{f_{2,i}^{j}}{h}\right)v_i^{j+1}+\\ +\frac{a_2}{h^2}v_{i+1}^{j+1}-\frac{f_{3,i}^{j}}{h}w_i^j+\frac{f_{3,i}^{j}}{h}w_{i+1}^{j}=\frac{1}{\mu}\left(f_{6,i}^{j}\cdot\varphi_{1,i}^{j}\right),\\ \left(\frac{f_{4,i}^{j}-f_{5,i}^{j}}{h}+\frac{a_2}{h^2}\right)u_i^j-\left(\frac{a_2}{h^2}+\frac{f_{4,i}^{j}}{h}\right)u_i^{j+1}-\left(\frac{a_2}{h^2}-\frac{f_{5,i}^{j}}{h}\right)u_{i+1}^{j}+\frac{a_2}{h^2}u_{i+1}^{j+1}+\frac{1}{h^2}v_{i-1}^{j}-\\ -\left(\frac{2(a_1+1)}{h^2}+\frac{f_{4,i}^{j}+f_{5,i}^{j}}{h}\right)v_i^j+\frac{a_1}{h^2}v_i^{j-1}+\left(\frac{a_1}{h^2}+\frac{f_{5,i}^{j}}{h}\right)v_i^{j+1}+\left(\frac{1}{h^2}+\frac{f_{4,i}^{j}}{h}\right)v_{i+1}^{j}-\\ -\frac{f_{3,i}^{j}}{h}w_i^j+\frac{f_{3,i}^{j}}{h}w_i^{j+1}=\frac{1}{\mu}\left(f_{6,i}^{j}\cdot\varphi_{2,i}^{j}\right),\\ \frac{a_3}{h}\left(u_i^j-u_{i+1}^{j}+v_i^j-v_i^{j+1}\right)+\frac{\mu}{h^2}w_{i-1}^{j}-\left(\frac{4\mu}{h^2}+\frac{\mu}{\rho}f_{3,i}^{j}\right)w_i^j+\frac{\mu}{h^2}\left(w_i^{j+1}+w_{i+1}^{j}\right)=f_{6,i}^{j}\cdot\varphi_{3,i}^{j},\\ i=1,2,\ldots,N-1,\qquad j=1,2,\ldots,N-1, \end{cases} \tag{6}$$

Эту систему уравнений следует дополнить граничными условиями:

$$\begin{array}{llll} u_{0j}=0, & u_{Nj}=0, & u_{i0}=0, & u_{iN}=0,\\ v_{0j}=0, & v_{Nj}=0, & v_{i0}=0, & v_{iN}=0,\\ w_{0j}=0, & w_{Nj}=0, & w_{i0}=0, & w_{iN}=0, \end{array}$$

$$j=0,1,\ldots,N,\qquad i=0,1,\ldots,N.$$

Далее, обозначим через E единичную матрицу порядка $N-1$ и введем следующие обозначения:

$$\Lambda_0=\left(\frac{2a_1}{h_x^2}-\frac{f_{1,i}^j}{h_x}\right)E,\qquad \Lambda_1=\frac{1}{h_y^2},\qquad \Lambda_2=\frac{f_{2,i}^j}{h_y}\Pi,\qquad \Lambda_3=\left(\frac{a_1}{h_x^2}+\frac{f_{1,i}^j}{h_x}\right)E,$$

$$\Lambda_5=\frac{f_{2,i}^j}{h_x}E,\qquad \Lambda_7=\frac{f_{3,i}^j}{h_x}E,\qquad \Lambda_4=\left(\frac{f_{1,i}^j}{h_y}-\frac{a_2}{h_x h_y}\right)\Pi,\quad \Lambda_6=\frac{a_2}{h_x h_y}\Pi,$$

$$K_0=\left(\frac{f_{4,i}^j}{h_y}+\frac{a_2}{h_x h_y}\right)\Pi,\qquad K_1=\frac{f_{5,i}^j}{h_y}E,\qquad K_2=\frac{a_2}{h_x h_y}\Pi,\qquad K_3=-\left(\frac{f_{4,i}^j}{h_x}+\frac{2}{h_x^2}\right),$$

$$K_4=\frac{a_1}{h_y^2}\mathrm{T},\qquad K_5=\frac{f_{5,i}^j}{h_y}\Pi,\qquad K_6=\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{f_{4,i}^j}{h_x}\right)E,\qquad K_7=\frac{f_{3,i}^j}{h_y}\Pi,$$

$$M_0=\frac{a_3}{h_y}\Pi,\qquad M_1=\left(\frac{2\mu}{h_x^2}+\frac{4\mu}{\rho}f_{3,i}^j\right)E,\qquad M_2=\frac{\mu}{h_y^2}\mathrm{T},$$

где Π и T являются соответственно двухдиагональними и трехдиагональними матрицами того же порядка

$$\Pi=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1\end{pmatrix},\qquad \mathrm{T}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Тогда предыдущую систему уравнений можно записать в векторном виде

$$\begin{cases}\dfrac{a_1}{h^2}E\mathbf{u}_{i-1}+[\Lambda_0+\Lambda_1+\Lambda_2]\mathbf{u}_i+\Lambda_3\mathbf{u}_{i+1}+[\Lambda_4+\Lambda_5]\mathbf{v}_i+[-\Lambda_5+\Lambda_6]\mathbf{v}_{i+1}-\\ \qquad\qquad -\Lambda_7[\mathbf{w}_i-\mathbf{w}_{i+1}]=\dfrac{1}{\mu}\left(f_{6,i}^j\cdot\varphi_{1,i}^j\right),\\ -[K_0+K_1]\mathbf{u}_i+[K_1+K_2]\mathbf{u}_{i+1}+\dfrac{1}{h^2}E\,\mathbf{v}_{i-1}+[K_3+K_4+K_5]\mathbf{v}_i+K_6\,\mathbf{v}_{i+1}+\\ \qquad\qquad -K_7\mathbf{w}_i=\dfrac{1}{\mu}\left(f_{6,i}^j\cdot\varphi_{2,i}^j\right),\\ \dfrac{a_3}{h}E(\mathbf{u}_i-\mathbf{u}_{i+1})-M_0\mathbf{v}_i+\dfrac{\mu}{h^2}E\,\mathbf{w}_{i-1}+[-M_1+M_2]\mathbf{w}_i+\dfrac{\mu}{h^2}E\,\mathbf{w}_{i+1}=f_{6,i}^j\cdot\varphi_{3,i}^j\,.\end{cases}\tag{7}$$

где $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\dots u_{N-1})^T$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2,\dots v_{N-1})^T$, $\mathbf{w}=(w_1,w_2,\dots w_{N-1})^T$.

Из (7) получим:

$$A_{11}\mathbf{u}_{i-1}+A_{12}\mathbf{u}_i+A_{13}\mathbf{u}_{i+1}+B_{11}\mathbf{v}_{i-1}+B_{12}\mathbf{v}_i+B_{13}\mathbf{v}_{i+1}+C_{11}\mathbf{w}_{i-1}+C_{12}\mathbf{w}_i+C_{13}\mathbf{w}_{i+1}=\frac{1}{\mu}D\varphi_1,$$

$$A_{21}\mathbf{u}_{i-1}+A_{22}\mathbf{u}_i+A_{23}\mathbf{u}_{i+1}+B_{21}\mathbf{v}_{i-1}+B_{22}\mathbf{v}_i+B_{23}\mathbf{v}_{i+1}+C_{21}\mathbf{w}_{i-1}+C_{22}\mathbf{w}_i+C_{23}\mathbf{w}_{i+1}=\frac{1}{\mu}D\varphi_2,$$

$$A_{31}\mathbf{u}_{i-1}+A_{32}\mathbf{u}_i+A_{33}\mathbf{u}_{i+1}+B_{31}\mathbf{v}_{i-1}+B_{32}\mathbf{v}_i+B_{33}\mathbf{v}_{i+1}+C_{31}\mathbf{w}_{i-1}+C_{32}\mathbf{w}_i+C_{33}\mathbf{w}_{i+1}=D\varphi_3,$$

$$i=1,2,\dots,N-1.$$

Здесь введены обозначения

$$D = f_{6,i}^{j} E, \quad A_{11} = \frac{a_1}{h_x^2} E, \quad A_{12} = \Lambda_0 + \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad A_{13} = \Lambda_3, \quad A_{21} = 0,$$

$$A_{22} = -K_0 - K_1, \quad A_{23} = K_1 + K_2, \quad A_{31} = 0, \quad A_{32} = \frac{a_3}{h_x} E, \quad A_{33} = -\frac{a_3}{h_x} E,$$

$$B_{11} = 0, \quad B_{12} = \Lambda_4 + \Lambda_5, \quad B_{13} = -\Lambda_5 + \Lambda_6, \quad B_{21} = \frac{1}{h_x^2}, \quad B_{23} = K_6,$$

$$B_{22} = K_3 + K_4 + K_5, \quad B_{31} = 0, \quad B_{32} = -M_0, \quad B_{33} = 0,$$

$$C_{11} = 0, \quad C_{12} = -\Lambda_7, \quad C_{13} = \Lambda_7, \quad C_{21} = 0, \quad C_{22} = K_7,$$

$$C_{23} = 0, \quad C_{31} = \frac{\mu}{h_x^2} E, \quad C_{32} = -M_1 + M_2, \quad C_{33} = \frac{\mu}{h_x^2} E.$$

Для решения полученной системы может быть применен как прямой, так и итерационный метод решения систем линейных алгебраических уравнений [3].

Рассмотрим задачу (2), (3) для функции

$$\begin{aligned} \Phi_1(x,y) &= a_1 u_{1,xx} + u_{1,yy} + f_1(x,y)(u_{1,x} + u_{2,y}) - f_2(x,y)(u_{2,x} - u_{1,y}) + \\ &\quad + a_2 u_{2,xy} + f_3(x,y) u_{3,x}, \\ \Phi_2(x,y) &= u_{2,xx} + a_1 u_{2,yy} + f_4(x,y)\left(u_{2,x} - u_{1,y}\right) - f_5(x,y)\left(u_{1,x} + u_{2,y}\right) + \\ &\quad + a_2 u_{1,xy} + f_3(x,y) u_{3,y}, \\ \Phi_3(x,y) &= \mu(u_{3,xx} + u_{3,yy}) - a_3(u_{1,x} + u_{2,y}) - \frac{\mu}{\rho} f_3(x,y) u_3 . \end{aligned} \tag{8}$$

$$u_1(x,y) = 0, \quad u_2(x,y) = 0, \quad u_3(x,y) = 0, \text{ при } (x,y) \in \Gamma .$$

Здесь

$$\rho = 1, \quad \sigma = 0{,}3, \quad E = 2{,}1 \cdot 10^6, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} = 8{,}077 \cdot 10^5, \quad \lambda = \frac{\sigma}{1-\sigma^2} = 0{,}33,$$

$$\phi_1(x,y) = \frac{\mu}{f_6(x,y)} \Phi_1, \quad \phi_2(x,y) = \frac{\mu}{f_6(x,y)} \Phi_2, \quad \phi_3(x,y) = \frac{1}{f_6(x,y)} \Phi_3.$$

Точным решением этой задачи являются функции:

$u_1(x,y) = xy(x-1)(y-1)\sin xy$,

$u_2(x,y) = 2xy(x-1)(y-1)\sin xy$,

$u_3(x,y) = 3xy(x-1)(y-1)\sin xy$,

графики которых изображены на рис.$1_а$, $2_а$, $3_а$.

Решим задачу (2), (3), (8) методом конечных разностей. Для этого воспользуемся разностной схемой (4)-(5). На рис. $1_б$, $2_б$, $3_б$ представлены полученные результаты.

Ниже приведена таблица значений точного решения – функции v, соответствующей значений приближенного решения и погрешностей

Узлы	u_2	v	погрешность
1	0,004	$3{,}043 \times 10^{-4}$	0,004
3	0,013	-0,001	0,014
5	0,031	0,013	0,018
7	0,013	0,017	0,004
9	0,037	0,02	0,017

Как видно из полученных результатов, для достаточно малого числа узлов (для большого h) точность достаточно велика.

С помощью вишеуказанной схемы вычислены решения задачи (4), (5), для

$$\phi_1(x,y)=\phi_2(x,y)=\phi_3(x,y)=1.$$

КПолученные результаты в некоторых узлах представлены в виде таблицы

Узлы	u	v	w
1	-0,05	0,049	-0,006
3	-0,025	-0,023	-0,013
5	-0,043	-0,043	-0,024
7	-0,024	-0,025	-0,013
9	-0,016	-0,016	-0,017

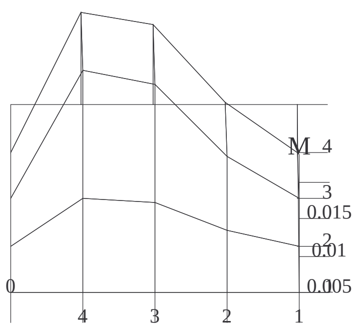

рис. 1а

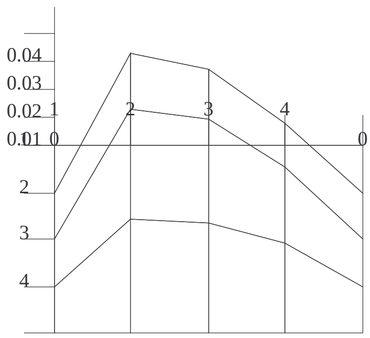

рис. 1б

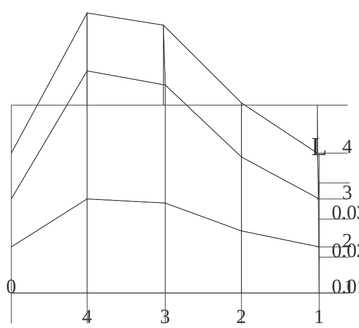

рис. 2а

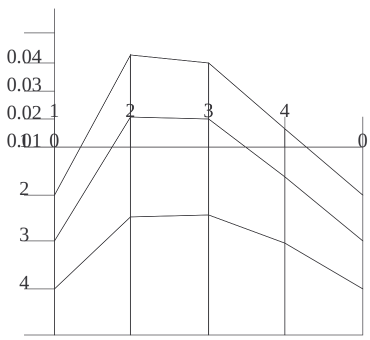

рис. 2б

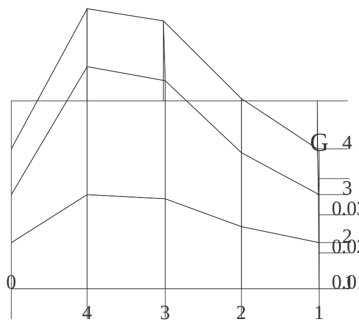

рис. $3_а$

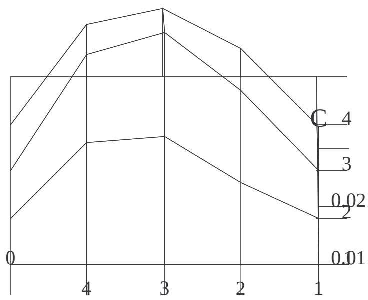

рис. $3_б$

Литература:

1. T.V. Meunargia. On one Method Application of The Theory of Functions of Complex Variable For Non-Shallow Spherical Shells. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, vol. 9, N1, 1994.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы, М.: Наука,1989.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука,1978.

Статья получена: 2005-12-19