Математические вопросы концептуально-фрактального анализа

Г. Бесиашвили
Лаборатория физической кибернетики,
Тбилисского Государственного Университета им. Ив. Джавахишвили

Абстракт
В статье рассмотрен метод концептуально-фрактального анализа в распознавании образов. Определены понятия расстояния, подобия, инвариантности и фрактальная мера подобия в пространстве Хаусдорфа.

Введение

На сигнальных полях образы (изображения, речевые) реализуются отображением $f : S \to R^n$; и они имеют концептуально-фрактальную природу [1,5].
Множество реализации образов (изображения, речевых сигналов) составляют последовательности в R^n, предельные изображения (концепты) воспринимают глаз, ухо [1, 2, 3, 4].

Концептуально-фрактальный анализ в своих методах для анализа, классификации, распознавания и понимания образов пользуется известными определениями расстояния, подобия, инвариантности и самоподобия в пространстве Хаусдорфа [4, 5].

1. Метрика Хаусдорфа [4, 6]

Допустим, $x \in X$, $A \subset X$, тогда расстояние между x и A определяется как

$$d(x,A)=inf\{d(x,a):a \in A\}.$$

Если $A \subset X$, $\varepsilon>0$, тогда для A обозначим ε-окрестность

$$A_\varepsilon=\{ x \in X\, d(x,A)< \varepsilon\}, \quad A \subset A_\varepsilon.$$

Допустим $F : X \to X$, тогда $Lip\ F$ определяется как

$$LipF = \sup_{x \neq y} \frac{d(F(x),F(y))}{d(x,y)}.$$

Если $Lip\ F=\lambda$, тогда $d(F(x), F(y)) \leq \lambda\, d(x,y))$ для любых $x, y \in X$. Когда $Lip\ F<1$, F - сжимающее.

Допустим, B - совокупность замкнутых, ограниченных непустых подмножеств в X, a b - непустых компактных подмножеств.

δ-обозначим Хаусдорфовую метрику на B.

$$\delta(A,B)=sup\{d(a,B), d(b,A):a \in A;\ b \in B\}.$$

$$\delta(A,B)<\varepsilon \text{ если } A \subset B\varepsilon \text{ и } B \subset A\varepsilon.$$

δ-метрика на B.

Некоторые элементарные свойства δ:

$$\delta(F(A), F(B)) \leq Lip\ (F)\ \delta(A,B),$$

$$\delta\left(\bigcup_{i \in I} A_i \bigcup_{i \in I} B_i\right) \leq sup\, \delta(A_i, B_i).$$

Если (B, δ) полное метрическое пространство $K \subset X$ компактно, тогда $b \cap \{A: A \subset K\}$ компактно.

Мера m на X множестве есть отображение

$$m : P(x)=\{A : A \subset X\} \to [0, \infty],$$

такое $m\ (\varnothing)=0$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \qquad E_i \subset X,$$

если $A \subset B$, тогда $m(A) \le m(B)$.

Допустим $к \ge 0$ некоторое действительное фиксированное число, для любого $\delta > 0$ и $E \subset X$ обозначим

$$H_{\delta}^{k}(E) = inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_k 2^{-k} (diamE_i)^k : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, diamE_i \le \delta\right\} \text{m}$$

$$H^k(E) = \lim_{\delta \to 0} H_{\delta}^{k}(E) = \sup_{\delta \ge 0} H_{\delta}^{k}(E).$$

$H^k(E)$ называется Хаусдорфовая $к$-размерная мера E, $\alpha_к$-соответствующая константа нормировки [4].

Фрактальная мера определяется покрытием фрактала сеткой из квадратов или сферами, так что компактные множества удовлетворяют этим требованиям.

Подобие [4, 6], допустим $S=\{S_1,... S_n\}$ совокупность конечных образов $S : X \to X$ является подобием, если $d(S(x), S(y))=rd(x,y)$ для любых x, y и некоторых фиксированных r.

$\mu_r:R^n \to R^n$ гомотетический $\mu_r(x)=r(x)$ $r \ge 0$, $\tau_b:R^n \to R^n$ перевод $\varepsilon_b(x)=x-b$, если $S:R^n \to R^n$ подобие, тогда имеет место $S=\mu_r \circ \tau_b \circ O$

Для некоторых μ_r-гомотетии, ε_b-перевода и O-ортонормальных преобразований.

Допустим для произвольного $A \subset X$ (инвариантность [4, 6]),

$$S(A) = \bigcup_{i=1}^{n} S_i A.$$

выполняются условия $S^o(A)=A$, $S^1(A)=S(A)$, $S^p(A)=S(S^{p-1}(A))$ для всех $p \ge 2$. Если $A=S(A)$, тогда A-инвариантно.

Обозначим $A_{i_1,...i_p} = S_{i_1,...i_p}(A)$ $S^p(A) = U_{i_1,...,i_p} A_{i_1,...,i_p}$, $diam\ A_{i_1,...,i_p} \le r_{i_1},...,r_{i_p}$, $diam(A) \to 0$, когда $p \to \infty$ при условии, что A ограничено.

Если K-замкнутое, ограниченное и инвариантное на S и

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i,$$

тогда K-компактно. Если A непустое ограниченное множество, тогда $d(A_{i_1,...,i_p}, K_{i_1,...,i_p}) \to 0$, когда $p \to \infty$, $S^p(A) \to K$ в Хаусдорфовой метрике.

Если B совокупность замкнутых, ограниченных подмножеств в X, b-совокупность компактных подмножеств $S: B \to B$ и $g:b \to b$ (принцип сжимающих отображений [6])

$$\delta(S(A),S(B)) = \delta(\bigcup_i S_i(A), \bigcup_i S_i(B)) \le$$

$$\le \max_{1 \le i \le n} \delta(S(A),S_i(B)) \le \left(\max_{1 \le i \le n} r_i\right) \delta(A,B).$$

В Хаусдорфовой метрике S-сжимающее отображение на B (соответственно на b). Неподвижная точка – аттрактор в физическом смысле. Если (X,d) полное метрическое пространство, $S=\{S_1,...S_n\}$ совокупность сжимающих отображений, дополнительно мы предполагаем существование множества $\rho=\{\rho_1,...\rho_n\}$, таких $\rho_i \in (0,1)$ и

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 1$$

для S_i подобных $LipS_i=r_i$.

D - такое положительное число, для которого выполняется

$$\rho_i = r_i^D \qquad \sum_{i=1}^{n} r_i^D = 1$$

D - размерность подобия на S по Мандельброту.

Из-за ограничения размера статьи невозможно рассмотреть вопросы самоподобия концептуально-фрактальных структур в пространстве Хаусдорфа.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.В. Чавчанидзе – *«Аналитические эвристики исскуственного интеллекта при формировании понятий, опознании образов и классификации обьектов»* - № 2080-70 деп. Тбилиси, 1970;
2. B.B. Mandelbrot – *"Fractal Geometry of Nature"* – New-York, 1982;
3. M. Barnsley, L. Huard – *"Fractal image compresson"* – 1990;
4. S.E. Hutchinson – *"Fractal and Self Similarity" - "Indians University Mathematics Journal"* – v.30., n. 5., 1981;
5. В.В. Чавчанидзе, Г.М. Бесиашвили – *«Нечёткие концептуально-фрактальные модели речевых сигналов»* - Труды конференции «Концептуальные и компьютерные модели речи», Тбилиси, 1997;
6. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин – *«Элементы теории функции и функционального анализа»*, Москва, 1976.