УДК 519.6

Об одной частной задаче минимизации упущенной выгоды

Бурджанадзе В.О., Джавахадзе Г.С.
Грузинский Технический Университет, ул. М.Костава 77, 0175, Тбилиси, Грузия

Аннотация:

В работе рассмотрена проблема выбора множества проектов при ограниченных финансовых ресурсах. При формировании программы развития ставится задача о построении календарного плана реализации проектов. В этом случае происходит определенный сдвиг реализации проектов, что приводит к уменьшению эффектов или так называемой упущенной выгоде. Поставлена задача минимизации упущенной выгоды. Вводя ограничений, приходим к классической транспортной задаче, но целевая функция - специфическая. Поэтому предлагается приближенный метод решения, опирающийся на деление оси времени на отрезки продолжительности реализации и использование оценки момента завершения проекта, что дает нижнюю оценку решения исходной задачи и его погрешность.

На примере получено приближенное решение и максимальное отклонение от оптимального решения. Потом, используя метод ветвей и границ, получено оптимальное решение, что совпадает с результатом, которое получено повышеотмеченным методом.

Ключевые слова: *проект, финансовые ресурсы, решение,*

Формируя программу развития, т.е. выбирая множество проектов, реализация которых должен обеспечить достижения поставленных целей, ставится задача о построении календарного плана реализации программы. Естественно, в условиях дефицита финансовых ресурсов нет такой возможности чтобы ввести одновремснную реализацию всех проектов программы. Поэтому, возникает задача о выборе первоочередных проектов, реализация которых обеспечивает наибольший эффект, а реализация иних проектов отодвигается на более поздний срок.

Такой сдвиг проектов приводит к уменьшению эффектов или как говорят, упущенной выгоде. При этом надо разработать такой план работы, чтобы упущенная выгода была минимальна.

Формальная постановка задачи следующее:

Пусть программа состоит из n проектов. Каждый проект описывается продолжительностью реализации τ_i и требуемым объемом финансирования w_i. Величина τ_i определяется максимальным объемом средств a_i, который можно освоить в единицу времени, то есть $\tau_i = w_i / a_i$. Если срок реализация проекта задерживается, то это приводит к упущенной выгоде, которая на единицу времени равна b_i. Известно, что в k-ом периоде объем финансирования составляет M_k, $k=\overline{1, p}$. Задача заключается в определении порядка финансирования проектов таким образом, что упущенная выгода [1]

$$\boldsymbol{V = \sum_{i=1}^{n} b_i t_i}$$

была минимальной.

Рассмотрим приближенный алгоритм решения задачи.

Пусть обозначим x_{ik} - объем финансирования i-го проекта в k-ом периоде. Ограничения на заданные объемы финансирования по периодам будет

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} \le M_k, k=\overline{1,p}. \qquad (1)$$

Ограничения на допустимый объем финансирования i-го проекта в k-ом периоде

$$x_{ik} \le a_i, \quad k=\overline{1,p}, \quad i=\overline{1,n}. \qquad (2)$$

Чтобы выполнялись работы по проектам в полном объме должно выполнятся условие:

$$\sum_{k=1}^{p} x_{ik} = w_i, \quad i=\overline{1,n}. \qquad (3)$$

Ограничения (1-3) - это классическая транспортная задача. Ясно, что для ее рарешимости:

$$\sum_{k=1}^{p} M_k \ge \sum_{i=1}^{n} w_i,$$

то есть общий объем финансовых ресурсов должен быть не меньше суммарного объема требуемых ресурсов для реализации всех проектов.

Специфику задачи определяет вид целевой функции. Действительно, момент завершения проекта t_i равен периоду k_i такому, что

$$\sum_{q=1}^{k_i} x_{iq} = w_i,$$

то есть за периоды от 1 до k_i выполнен весь объем работы по i-му проекту.

Аналитически t_i можно записать как функцию $\{x_{ik}\}$следующим образом:

$$t_i = \max_k \left(k \cdot x_{ik}\right),$$

и, соответственно, критерий оптимальности примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} b_i t_i = \sum_i b_i \max_k \left(k \cdot x_{ik}\right). \qquad (4)$$

Эффективных точных методов решения задачи (1-4) не известно. Ниже дается описание приближенного алгоритма. Предварительно для каждого проекта i определим последовательность чисел

$$r_{ik} = \left[\frac{k+\tau_i-1}{\tau_i}\right],$$

где [x] - целая часть x. Другими словами, мы разбиваем ось времени на отрезки длинны τ_i. При этом c_{ik} определяет номер отрезка, которому принадлежит период k. Так, если $\tau_i = 3$, то первые три периода имеют $r_{ik} = 1$, следующая тройка - $r_{ik} = 2$ и т.д. Видно, что

$$t_i \ge \sum_{k=1}^{p} \frac{x_{ik}}{a_i} \cdot r_{ik}. \qquad (5)$$

Заменим величину t_i на ее нижнюю оценку (5). В этом случае получаем классическую транспортную задачу $\left(c_{ij} = \frac{r_{ij} b_i}{a_i}\right)$: определить $x_{ij} \ge 0$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,p}$ такие, что

$$C = \sum_{i,j} x_{ij} c_{ij} \to \min, \qquad (6)$$

$$\sum_i x_{ij} \le M_j, j=\overline{1,p}, \qquad (7)$$

$$\sum_j x_{ij} = wi_j, \quad i=\overline{1,n}. \qquad (8)$$

Ее решение дает оценку снизу решения исходной задачи. Более того, мы получаем допустимое решение, а значит, можем оценить его погрешность.

Пример. Программа развития отрасли состоит из трех проектов, данные о которых приведены в таблице 1. Пусть график финансирования имеет вид $M_1 = 10$, $M_2 = 8$, $M_3 = 6$, $M_4 = 4$. Значения r_{ik} приведены в таблице 2, а значения c_{ik} транспортной задачи приведены в таблице 3.

Таблица 1.

i	**1**	**2**	**3**
$\mathbf{w_i}$	10	12	6
$\mathbf{a_i}$	5	4	3
$\boldsymbol{\tau_i}$	2	3	2
$\mathbf{b_i}$	3	4	2

Таблица 2.

i \ k	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	1	2	2
2	1	1	1	2
3	1	1	2	2

Таблица 3.

i \ k	**1**	**2**	**3**	**4**
1	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$
2	1	1	1	2
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$

Величина критерия C оценочной задачи (6) - (8) равна $25^3/_5$. Мы видим, что в полученном решении проект 1 завершается в четвертом периоде, проект 2 - в третьем, а проект 3 - во втором. Это допустимое решение для задачи минимизации упущенной выгоды с величиной упущенной выгоды

$$F = 4c_1 + 3c_2 + 2c_3 = 12 + 12 + 4 = 28.$$

Таким образом, отклонение полученного решения от оптимального не превышает 2 единицы, поскольку оценку снизу $25^3/_5$ можно заменить на 26 в силу целочисленности значений упущенной выгоды. Для того, чтобы получить оптимальное решение, применим метод ветвей и границ. Для этого разобьем множество всех решений на два подмножества. В первом подмножестве проект 1 завершается в четвертом периоде, а во втором - раньше четвертого периода. Для первого подмножества мы уже имеем оптимальное решение со значением F = 28, поскольку второй проект не может завершаться раньше третьего периода, а третий - раньше второго.

Оценим второе подмножество. Для этого нужно решить транспортную задачу, Величина критерия оценочной задачи равна $27^1/_5$ или 28 с учетом целочисленности. Следовательно, полученное выше решение не хуже, чем оптимальное решение во втором подмножестве, а значит является оптимальным.

Литература:

1. Бурков В.Н., Джавахадзе Г.С. Экономико-математические модели управления развитием отраслевого производства. - Москва: Институт проблем управления РАН, 1998 г.

В статье 3 таблицы.

Article received: 2005-05-05