Об одном классе точных решений уравнений Навье-Стокса

Т.А.Обгадзе

0175, ул. Костава 77, Грузинский технический университет,
факультет информатики и систем управления. Тбилиси, Грузия
tamaz@mail.ru

Аннотация:

В работе на основе двумерной постановки задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости, строятся уравнения Навье-Стокса, которые обезразмериваются естественным образом. Получаются числовые коэффициенты подобия: число Струхаля, число Эйлера, число Фруда и число Рейнольдса. Рассматривая двумерную постановку задачи, строится алгоритм нахождения целого класса точных решений уравнений Навье-Стокса. В частном случае, строятся точные решения затухающего ячейстого течения Бенара с прямоугольними ячейками.

Ключевые слова: *уравнения Навье-Стокса, ячейки Бенара, точное решение*

В настоящее время, имеется небольшое число точных решений уравнений Навье-Стокса. В данной работе мы задаёмся целью восполнить этот пробель и одновременно, вияснить правильную постановку задачи, в случае численных решений краевых задач для уравнений Навье-Стокса.

Рассмотрим уравнения вязкой несжимаемой жидкости в IR^2:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+V\cdot\frac{\partial U}{\partial y}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta U\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+U\cdot\frac{\partial V}{\partial x}+V\cdot\frac{\partial V}{\partial y}=Y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\Delta V\,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0\,. \tag{3}$$

Произведём замену переменных в (1),(2),(3) с целью, переписать систему уравнений в безразмерном виде:

$$x=l\cdot\bar{x}\,;\quad y=l\cdot\bar{y}\,;\quad \rho=\rho_0\cdot\bar{\rho}\,;\quad U=V_0\cdot\bar{U}\,;\quad V=V_0\cdot\bar{V}\,;\quad \nu=\nu_0\cdot\bar{\nu}\,; \tag{4}$$

$$t=t_0\cdot\bar{t}\,;\quad X=g\cdot\bar{X}\,;\quad Y=g\cdot\bar{Y}\,;\quad p=p_0\cdot\bar{p}\,; \tag{5}$$

где l - характерный размер задачи, t_0 - характерное время и.т.д.

С учётом (4) и (5), система (1),(2),(3) перепишется в виде:

$$\frac{V_0}{t_0}\cdot\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{t}}+\frac{V_0{}^2}{l}\cdot\left(\bar{U}\cdot\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{x}}+\bar{V}\cdot\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}}\right)=g\cdot\bar{X}-\frac{p_0}{\rho_0\cdot l}\cdot\frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}+\frac{\nu_0\cdot V_0}{l^2}\cdot\bar{\nu}\cdot\Delta\bar{U}\,, \tag{6}$$

$$\frac{V_0}{t_0}\cdot\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{t}}+\frac{V_0{}^2}{l}\cdot\left(\bar{U}\cdot\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{x}}+\bar{V}\cdot\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{y}}\right)=g\cdot\bar{Y}-\frac{p_0}{\rho_0\cdot l}\cdot\frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}}+\frac{\nu_0\cdot V_0}{l^2}\cdot\bar{\nu}\cdot\Delta\bar{V}\,, \tag{7}$$

$$\frac{V_0}{l}\cdot\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}}+\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}}\right)=0\,. \tag{8}$$

Разделив первые два уравнения на $\frac{V_0^{\,2}}{l}$, а третьее на $\frac{V_0}{l}$ и опустив, для простоты записи чёрточки над безразмерными величинами, получаем

$$Sh\cdot\frac{\partial U}{\partial t}+U\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+V\cdot\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{1}{Fr^2}\cdot X-Eu\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\nu\cdot\Delta U\,, \tag{9}$$

$$Sh\cdot\frac{\partial V}{\partial t}+U\cdot\frac{\partial V}{\partial x}+V\cdot\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{1}{Fr^2}\cdot Y-Eu\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\nu\cdot\Delta V\,, \tag{10}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0\,, \tag{11}$$

где Sh-число Струхаля, Fr - число Фруда, Eu - число Эйлера, Re - число Рейнольдсa.

Решения будем искать в виде:

$$U=f(x,y)\cdot\Phi\left(-\frac{t}{k\cdot\mathrm{Re}}\right), \tag{12}$$

$$V=g(x,y)\cdot\Psi\left(-\frac{t}{k\cdot\mathrm{Re}}\right), \tag{13}$$

где k – постоянное число.

Подставляя (12),(13) в (11) получаем

$$f_x\cdot\Phi+g_y\cdot\Psi=0\,, \tag{14}$$

ясно, что если $\Phi\neq 0\wedge g_y\neq 0$ то уравнение (14) можно переписать в виде:

$$-\frac{f_x}{g_y}=\frac{\Psi}{\Phi}=\lambda\neq 0\,. \tag{15}$$

Левая часть уравнения (15) зависит от $x\wedge y$, а правая лишь от t. Поэтому, эта дробь должна быть постоянным числом.

а) Рассмотрим тривиальный случаи: $\lambda=0$. Тогда из (15) получаем, что $\Psi\equiv 0,\quad \mathrm{f_x}=0$. Подставляя (12),(13) в (9) имеем

$$-\frac{Sh}{\mathrm{Re}}\cdot\Phi'_{\frac{-t}{\mathrm{Re}}}\left(-\frac{t}{\mathrm{Re}}\right)\cdot f(y)=\frac{1}{Fr^2}\cdot X-Eu\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\nu}{\mathrm{Re}}\cdot f_{yy}\cdot\Phi\,. \tag{16}$$

Если разделить обе части уравнения (16) на $f(y)$, то получаем левую часть которая зависит лишь от $-\frac{t}{\mathrm{Re}}$, и правую часть, которая зависит от x,y,t, поэтому обе части полученного уравнения постоянны:

$$-\frac{Sh}{\mathrm{Re}}\cdot\Phi'_{\frac{-t}{\mathrm{Re}}}\left(-\frac{t}{\mathrm{Re}}\right)=C1,\quad \frac{\frac{1}{Fr^2}\cdot X-Eu\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\nu}{\mathrm{Re}}\cdot f_{yy}\cdot\Phi}{\mathrm{f(y)}}=C1\,. \tag{17}$$

Из первого уравнения (17) получаем,что

$\Phi(z) = -\dfrac{\mathrm{Re}}{Sh} \cdot C1 \cdot z + C2$, из второго уравнения следует,что $f(y) = C3$, так как, числитель зависит от t , а знаменатель только от y. Таким образом, в этом тривиальном случае получаем решения:

$$U = C3 \cdot (C1 \cdot \frac{t}{\mathrm{Re}} + C2), \tag{18}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho}{Fr^2 \cdot Eu} \cdot X \ . \tag{19}$$

В этом, тривиальном случае, имеем равноускоренное движение вязкой жидкости с постоянным градиентом давлений.

б) Мы рассматриваем случи, когда $\lambda \neq 0$. Тогда

$$\Psi = \lambda \cdot \Phi, \tag{20}$$

т.е.

$$f_x = -\lambda \cdot g_y . \tag{21}$$

I) Рассмотрим частный случай, когда $f_x = 0$, тогда из (21) имеем, что $g_y = 0$.

Тогда получаем, что

$$f = F(y), \tag{22}$$

$$g = G(x). \tag{23}$$

Учитивая (22),(23), выражения (12),(13) принимают вид:

$$U = F(y) \cdot \Phi\left(-\frac{t}{\mathrm{Re} \cdot k}\right), \tag{24}$$

$$V = \lambda \cdot G(x) \cdot \Phi\left(-\frac{t}{\mathrm{Re} \cdot k}\right). \tag{25}$$

Учитивая (24),(25), система уравнений (9),(10) приобретает вид:

$$-\frac{Sh}{\mathrm{Re} \cdot k} \cdot \Phi' \cdot F + \lambda \cdot G \cdot F_y' \cdot \Phi^2 = \frac{1}{Fr^2} \cdot X - \frac{Eu}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{\mathrm{Re}} \cdot \Phi \cdot F_{yy}'' , \tag{26}$$

$$-\frac{Sh \cdot \lambda}{\mathrm{Re} \cdot k} \cdot \Phi' \cdot G + \lambda \cdot F \cdot G_x' \cdot \Phi^2 = \frac{1}{Fr^2} \cdot Y - \frac{Eu}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\nu}{\mathrm{Re}} \cdot \Phi \cdot G_{xx}'' . \tag{27}$$

Систему (26),(27) преобразуем к виду:

$$\frac{Eu}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \cdot G \cdot F_y' \cdot \Phi^2 = \frac{1}{Fr^2} \cdot X + \frac{\nu}{\mathrm{Re}} \cdot \Phi \cdot F_{yy}'' + \frac{Sh}{\mathrm{Re} \cdot k} \cdot \Phi' \cdot F = C1, \tag{28}$$

$$\frac{Eu}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \lambda \cdot F \cdot G_x' \cdot \Phi^2 = \frac{1}{Fr^2} \cdot Y + \frac{\nu}{\mathrm{Re}} \cdot \lambda \cdot \Phi \cdot G_{xx}'' + \frac{Sh \cdot \lambda}{\mathrm{Re} \cdot k} \cdot \Phi' \cdot G = C2 . \tag{29}$$

Левая часть уравнения (28) зависит от x, y, t а правая часть лишь от y, t. Значит обе части должны быть постоянными $C1$.

Точно также, левая часть второго уравнения зависит от x, y, t а правая лишь от x, t. Значит обе части должны быть постоянными $C2$. В качестве постоянного значения k выберем число:

$$k = \frac{Sh}{\nu}, \tag{30}$$

тогда система уравнений (28),(29) принимает вид

$$\frac{Eu}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\lambda\cdot G\cdot F_y^{'}\cdot\Phi^2=\frac{1}{Fr^2}\cdot X+\frac{\nu}{\mathrm{Re}}\cdot(\Phi\cdot F_{yy}^{''}+\Phi^{'}\cdot F)=C1, \tag{31}$$

$$\frac{Eu}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\lambda\cdot F\cdot G_x^{'}\cdot\Phi^2=\frac{1}{Fr^2}\cdot Y+\frac{\nu}{\mathrm{Re}}\cdot\lambda\cdot(\Phi\cdot G_{xx}^{''}+\Phi^{'}\cdot G)=C2. \tag{32}$$

Очевидно, что из (31),(32) можно получать множество частных решений.

1.a) Будем считать, что $\Phi^{'}=\Phi$, тогда получаем, что

$$\Phi(q)=e^q\ . \tag{33}$$

В нашем случае, (24),(25),(33) имеем

$$\Phi\left(-\frac{\nu\cdot t}{Sh\cdot\mathrm{Re}}\right)=e^{-\frac{\nu\cdot t}{Sh\cdot\mathrm{Re}}}\ . \tag{34}$$

Подставляя в (31),(32) получаем

$$\frac{Eu}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\lambda\cdot G\cdot F_y^{'}\cdot e^{-\frac{2\cdot\nu\cdot t}{Sh\cdot\mathrm{Re}}}=\frac{1}{Fr^2}\cdot X+\frac{\nu}{\mathrm{Re}}\cdot e^{-\frac{\nu\cdot t}{Sh\cdot\mathrm{Re}}}\cdot(F_{yy}^{''}+F)=C1, \tag{35}$$

$$\frac{Eu}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\lambda\cdot F\cdot G_x^{'}\cdot e^{-\frac{2\cdot\nu\cdot t}{Sh\cdot\mathrm{Re}}}=\frac{1}{Fr^2}\cdot Y+\frac{\nu}{\mathrm{Re}}\cdot e^{-\frac{\nu\cdot t}{Sh\cdot\mathrm{Re}}}\cdot\lambda\cdot(G_{xx}^{''}+G)=C2. \tag{36}$$

Из вида правых частей системы (35),(36) явствует, что

$$C1=\frac{1}{Fr^2}\cdot X\ , \tag{37}$$

$$C2=\frac{1}{Fr^2}\cdot Y\ , \tag{38}$$

$$F_{yy}^{''}+F=0\ , \tag{39}$$

$$G_{xx}^{''}+G=0\ . \tag{40}$$

Отсюда имеем, что

$$F(y)=a\sin y+b\cos y\ , \tag{41}$$

$$G(x)=m\sin x+n\cos x\ , \tag{42}$$

где $a,b,m,n-$ постоянные значенияопределяемые из граничных условий.

Таким образом, мы получаем решения системы уравнений Навье-Стокса в виде:

$$U=\left(a\sin y+b\cos y\right)\cdot e^{-\frac{\nu\cdot t}{Sh\cdot\mathrm{Re}}}, \tag{43}$$

$$V=\lambda\cdot\left(m\sin x+n\cos x\right)\cdot e^{-\frac{\nu\cdot t}{Sh\cdot\mathrm{Re}}}. \tag{44}$$

Решения (43),(44) со временем быстро затухают, однако, они показывают характер затухания и её связь с безразмерными параметрами ν, Sh, Re. Таким образом, из решений (43),(44) явствует что вязкой жидкости Навье-Стокса присуще наличие ячейстой структуры решений типа течения Бенара, где ячейки имеют прямоугольные формы. При этом, течение затухает, если нет подкачки энергии из вне.

Учитывая (37)-(40), из уравнений (35),(36) получаем уравнения для определения распределения давлений:

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\rho}{Eu}\cdot\lambda\cdot(m\sin x+n\cos x)(a\cos y-b\sin y)e^{-\frac{2\cdot\nu\cdot t}{Sh\cdot\mathrm{Re}}}=\frac{1}{Fr^2}\cdot X\cdot\frac{\rho}{Eu}, \tag{45}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\rho}{Eu}\cdot\lambda\cdot(m\cos x-n\sin x)(a\sin y+b\cos y)e^{-\frac{2\cdot\nu\cdot t}{Sh\cdot\mathrm{Re}}}=\frac{1}{Fr^2}\cdot Y\cdot\frac{\rho}{Eu}, \tag{46}$$

Интегрируя систему уравнений (45),(46) получаем распределение давлений

$$p(x,y)=\frac{\rho}{Eu}\cdot\left(\frac{1}{Fr^2}(X\cdot x+Y\cdot y)+\lambda\cdot((n\sin x-m\cos x)(b\sin y-a\cos y))\cdot e^{-\frac{2\cdot\nu\cdot t}{Sh\cdot\mathrm{Re}}}\right). \tag{47}$$

Ясно, что при выборе вида функции f, мы можем определить соответствующий вид функции g и поле давлений $p(x,y)$.

Рассмотрим поле скоростей на основе Mathcad 2001 professional:

$Sh := 10$

$Re := 1000$

$t := 2$

$X0 := -50$

$XN := 50$

$Y0 := -2$

$YN := 2$

$$U(x,y) := (2\cdot\sin(y)+3\cdot\cos(y))\cdot e^{\frac{-t}{Sh\cdot Re}}$$

$$V1(x,y) := (5\cdot\sin(x)+3\cdot\cos(x))\cdot e^{\frac{-t}{Sh\cdot Re}}$$

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

$$V(x,y) := \begin{pmatrix} U(x,y) \\ V1(x,y) \end{pmatrix}$$

$xlow := X0$

$xhigh := XN$

$xn := 20$

$ylow := Y0$

$yhigh := YN$

$yn := 10$

$i := 0..\,xn-1$

$$xind_i := xlow + i\cdot\frac{xhigh-xlow}{xn-1}$$

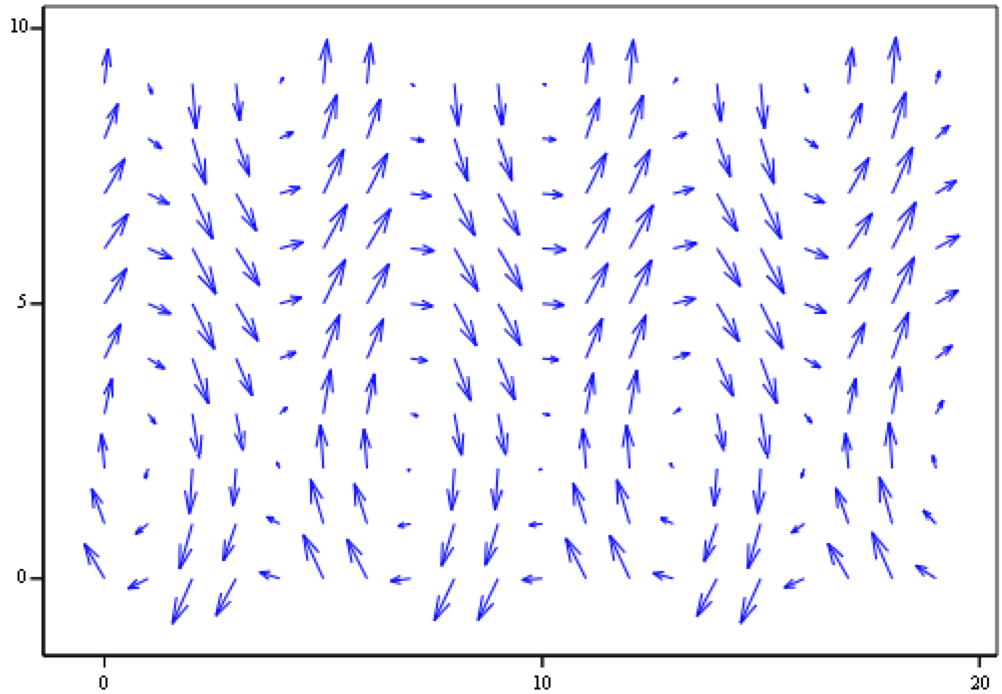
$j := 0..\,yn-1$

$$yind_j := ylow + j\cdot\frac{yhigh-ylow}{yn-1}$$

$F_{i,j} := V(xind_i, yind_j)$

$M_{i,j} := (F_{i,j})_0$

$N_{i,j} := (F_{i,j})_1$



(M, N)

Литература:

1. Л. Шварц. Анализ, т.1, т.2, пер. с франц., Мир, Москва, 1972
2. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1,т.2, т.3, Наука, Москва, 1969
3. И.А.Виноградова, С.Н.Олечник, В.А.Садовничий. Задачи и упражнения по математическому анализу, под ред. В.А. Садовничего, учеб. пос., МГУ им. М.В.Ломоносова, т.1, т.2, 1991
4. G. Birkhoff. Hidrodynamics, Prinseton, 1960
5. H.K.Versteeg, W.Malalasekera. An introduction to computational fluid dinamics the finite volume method, Longman group Ltd, 1995

Статья получена: 2007-05-30