УДК 62-50

Об одной конструкции бесконечного стохастического автомата

Хведелидзе Тариел
Тбилисский Государственный Университет им. Ив.Джавахишвили
tariel.khvedelidze@tsu.ge

Аннотация:
Рассматривается функционирование бесконечного (со счетным числом состояний) стохастического автомата в стационарной случайной среде с тремя классами реакций. В терминах средных "шагов" блуждания автомата по состояниям области дается полная классификация его возможного поведения в стационарной случайной среде.

Ключевые слова: *бесконечный стохастический автомат , состояние автомата, действие автомата, стационарная случайная среда, целесообразное поведение, оптимальность поведения .*

Введение.

В математических моделях сложной системы широко применяются конечные автоматы, как детерминированной так и вероятностной структуры. Идея о том, что конечные автоматы являются весьма удобным объектом для построения математических моделей сложных, в том числе и биологических систем, впервые была высказана Дж.Фон Нейманом. Однако направление работ , связанное с построением автоматных моделей поведения, было сформулировано и развито М.Л Цетлиным |1|. Ему же принадлежит известная конструкция конечного автомата с линейной тактикой, образуюшего в стационарной случайной среде асимптотически оптимальную последовательность. Постановка задачи о поведении автоматов в случайных средах была вызвана следуюшими причинами. М.Л Цетлин предпологал, что при изучении сложного поведения можно выделить элементарный поведенческий акт и сформулировать элементарную поведенческую задачу. Если после этого построить устройство (конечный автомат) , хорошо решающее элементарную задачу. т.е. автомат , обладаюший целособразным поведением в элементарной ситуации, то сложное поведение сложного объекта можно рассматривать, как результат совокупного поведения большого числа элементарных объектов, каждый из которых решает элементарную задачу.

Поэтому важным является построение конструкций таких автоматов, которые не имеют, так сказат, "априорной целесообразности" поведения и обладают максимальной целособразностью в простейших случаях, а затем изучить поведение автоматов в средах более сложных.

Следует подчеркнуть, что развиваемый подход в работах М.Л Цетлина и других авторов был основан на изучении финальных (при времени $t \to \infty$) вероятностей цепей Маркова, описывающих поведение конечных автоматов в случайных средах. Однако естественное стремление поскорее перейти к изучению функционирования больших коллективов автоматов привело к тому, что поведение индивидуальных автоматов было изучено недостаточно полно и строго и то лишь для случая стационарных случайных сред с двумя классами реакций (бинарные стационарные случайные среды), при этом в частности, отсутствовала полная классификация возможного асимптотического поведения автоматов в стационарных случайных средах. Такой анализ оказался возможным благодаря исследованию поведения бесконечных (со счетным числом состояний), стохастических автоматов, определению сходимости (в разумном смысле) последовательностей конечных автоматов к соответствующим им бесконечным автоматам |2| .

В настояшей работе предлагается конструкция бесконечного стохастического автомата (со счетным числом состояний) и рассматривается его функционирование в стационарной случайной среде в предположении, что все возможные реакций среды воспринимаются автоматом как относящиеся к одному из трех классов-класса благоприятных реакций (выигрыш, нештраф), класса неблагоприятных реакций (проигрыш, штраф) и класса нейтральных реакций(безразличие) |3,4| .

Функционирование автоматов в стационарной случайной среде с тремя классами реакций

Стохастический (вероятностный) автомат определяется как система |5|

$$W_к =< S, F_k, L\ , \pi_0, A(s), \mu(f / x) > ,$$

где S = $\{S_1, S_2,...., S_g\}-$конечное множество входных сигналов;F $_k$ $=\{f_1, f_2,..., f_k\}$-конечное множество выходных сигналов (действий); L=$\{x_1, x_2,..., x_n,...\}$-конечное или счетное множество внутренних состояний;π_0-начальное (стартовое) распределение вероятностей состояний; A(s)-функция переходов, задаваемая в выде семейства конечномерных, а в случае счетности множества L- счетномерных стохастических матриц ($a_{ij}(s)$) вероятностей перехода:

$a_{ij}(s)$=P(x(t+1)=x $_j$ / x(t)=x $_i$, s(t+1)=s); $\mu(f / x)$ = P(f (t)=f / x(t)=x)- функция выходов (условное вероятностное распределение на F $_k$), задающая вероятностное отображение L $\longrightarrow$ F $_k$.

Заметим,что если все перечисленные вероятностные распределения вырождены,то автомат $W_к$ является детерминированным.В частности, стохастический автомат называется марковским автоматом, если условное вероятностное распределение $\mu(f / x)$ вырождено, т.е $\mu(f / x)$ принимает толъко значения 0 или 1.

Следователъно, существует детерминированная функция выходов ф(x) такая, что

$$\mu(f / x) = \begin{cases} 1, & если\ f = \phi(x), \\ 0, & впротивном\ случае. \end{cases}$$

Это свойство функций выходов называется Муровским.

Следуя |6| , сопоставим стохастическому автомату $W_к$ подавтоматы

$$W_{k,\alpha} =< S, f_k, L_\alpha, A^\alpha(s)>, \quad \alpha = 1,2,..., k$$

с единственным выходом f_α и функцией переходов $A^\alpha(s)$, индуцированной на подмножестве L $_\alpha \in$L . Из Муровского свойства (2) следует, что множество L состояний автомата $W_к$ является объединением всех непересекающихся подмножеств состояний L $_\alpha$ подавтоматов $W_{k,\alpha}$: L $=\bigcup_{\alpha=1}^{k} L_\alpha$.

Сформулируем некоторые допушения о структуре интересующих нас стохастических автоматов $W_к$.

а) Из любого подмножества состояний L $_\alpha \in$ L возможен переход в любое другое подмножество состояний $L_\beta \in L\ , \alpha \neq \beta.$

В далънейшем мы будем учитыватъ лишъ циклические переходы из состояний подмножества L $_\alpha$ в состояниях подмножества L $_{\alpha+1}$(символически L $_\alpha \longrightarrow$ L $_{\alpha+1}$, $\alpha = 1,2,..., k-1$, а L $_k \longrightarrow$L $_1$).

б) Все подавтоматы $W_{k,1}, W_{k,2}, ..., W_{k,k}$ изоморфны, т е отличаются лишъ обозначением состояний. Отсюда вытекает, что в конечномерном случае подмножества состояний L_{α} , $\alpha = 1,2,..,k$, имеют одинаковое число элементов . Будем называть это число емкостью памяти автомата. Обозначим через $W_{\kappa}^{(n)}$ автоматы с конечной памятью *n,* а через W_{κ} автоматы со счетным числом состояний, подмножества состояний L_{α} которого равномощны.

Будем рассматривать поведение автомата во внешней среде C. Это означает, что выходные сигналы (действия) f автомата W_{κ} являются входными сигналами для некоторого устроиства C, которая на действия f автомата W_{κ} реагирует ответными реакциями S, которые в свою очередь являются для автомата W_{κ} входными сигналами. Автомат, так сказать, использует их для принятия решения о дальнейших действиях.

Будем предполагать, что все возможные реакции $S \in (S_1, S_2, ...S_g)$ среды C воспринимаются автоматом, как относящиеся к одному из трех классов- классу благоприятных реакций (выигрыш ,нештраф, S=+1), классу неблагоприятных реакций (проигрыш , штраф, S= -1) и классу неитральных реакций (безразличие, S=0). Внутри каждого из этих классов реакции среды C для автомата W_{κ} неразличимы. Будем говорить, что автомат устроен целесообразно, если он чаще выигрывает и реже проигрывает.

<u>Определение1.</u> Будем говорить, что автомат W_{κ} функционирует в стационарной случайной среде C =C $(a_1, r_1; a_2, r_2; ...; a_k, r_k)$ если действия автомата и значения его входного сигнала связаны следующим оброзом: действие f_{α}, произведенное автоматом в момент времени t, влечет за собой в момент t+1 значение сигнала s= +1(выигрыш) с вероятностъю $q_{\alpha} = \dfrac{1 - r_{\alpha} + a_{\alpha}}{2}$, значение сигнала S = -1 (проигрыш) с вероятностью $P_{\alpha} = \dfrac{1 - r_{\alpha} - a_{\alpha}}{2}$ и значение сигнала S = 0 (безразличие) с вероятностъю r_{α} =1-q_{α} - p_{α} $(\alpha = 1, 2, ..., k)$.

Здесь величина α_{α}= q_{α} - p_{α} ($|a_{\alpha}|$<1- r_{α}) имеет смысл математического ожидания выигрыша за действие f_{α} .

Особый интерес представляют такие автоматы, которые обладают целесообразным поведением и в структуре которых не использована информация о том, в какой случайной среде им предстоит функционировать. Эти автоматы не имеют, так сказать, “априорной целособразности” поведения и их структура должна обеспечивать некоторое свойство симметричности: при одинаковой последовательности входных сигналов, поступающых при использовании разных действий, автомат должен вести себя одинаково.

С другой стороны, в виду того, что автомат и случайная среда

C= C $(a_1, r_1; a_2, r_2; ...; a_k, r_k)$, в которую погружен автомат, независимы, то априори нейзвестно какое действие автомата является оптимальным в том смысле, что средный выигрыш за это действие является максимальным. Заметим, что при решении различных задач анализа возможного поведения автоматов в некоторой стационарной случайной среде изменением нумерации действий автоматов всегда можно добится того, чтобы $a_1 > a_2 \geq, ..., \geq a_k$, при этом, конечно нужно предполагать, что по крайней мере две величины a_{α} различны. Тогда действия автомата со средным выигрышем a_1 в среде C будеть оптимальным.

Естественно возникает вопрос о том, с помощью какого набора характеристик возможна полная классификация поведения автомата в случайной среде. Такими характеристиками являются |2,3|: вероятности $\sigma_{x,\alpha}$ изменить (когда -либо) действие f_{α}

при старте из состояния $x \in L_\alpha$; математические ожидания случайного времени $\tau_{x,\alpha}$ до смены действия f_α при старте из состояннии $x \in L_\alpha$, $\alpha = 1,2,....,k$.

В терминах этого набора характеристик поведение автомата в случайной среде классифицируется следующим образом.

Определение.2 Следуя |3|, будем говорить, что автомат $W_к$ функционирующий в стационарной случайной среде С ($a_1, r_1; a_2, r_2;...; a_k, r_k$), является:

при $\sigma_{x,1} < 1$, $\sigma_{x,\alpha} = 1$ ($\alpha = 2,3....k$), $\forall x$-оптимальным;

при $\sigma_{x,1} < 1$, $\sigma_{x,1} = 1$, $\tau_{x,\alpha} < \infty$ ($\alpha = 2,3....k$), $\forall x$-строго оптимальным;

при $\sigma_{x,\alpha} = 1$, $\alpha = 1,2,....k$, $\tau_{x,1} = \infty$, $\tau_{x,\alpha} < \infty$, ($\alpha = 2,3....k$) -квазиоптимальным;

при $\sigma_{x,\alpha} < 1$, $\forall x, \alpha$ -втягивающимся ;

при $\sigma_{x,\alpha} = 1$, $\tau_{x,\alpha} < \infty$ $\forall x, \alpha$ -выталкивающимся;

при $\sigma_{x,k} < 1$, $\sigma_{x,\alpha} = 1$ ($\alpha = 1,2,....,k-1$), $\forall x -$ антиоптимальным;

при $\sigma_{x,\alpha} = 1$, ($\alpha = 1,2,....k$), $\tau_{x,k} = \infty$ $\forall x -$ антиквазиоптимальным,

при $\sigma_{x,\alpha} = 1$, $\tau_{x,\alpha} = \infty$ ($\alpha = 1,2,....k$), $\forall x -$ безразличным.

Напомним , что в силу условия $a_1 > a_2 \geq,...,\geq a_k$ область (подмножество) L_1, соответствующая действию f_1 с наибольшим средним выигрышем a_1, является оптимальной.

Определим теперь широкий класс бесконечных стохастических автоматов с двумя действиями, функционирование которых в стационарной случайной среде

С ($a_1, r_1; a_2, r_2$) описывается марковскими процессами.

Обазначим через N(t) номер состояния автомата, S(t) сигнал, поступающий на вход автомата в момент времени t (t=0,1,2,…), $L = L_1 \cup L_2 = \{0, \pm 1, \pm 2,....\}$, $F_2 = \{f_1, f_2\}$, $S \in \{-1, 0, 1\}$. Для определения бесконечного марковского автомата W_2 (ξ(s)) необходимо задать три независимые случайные величины $\xi(-1)$, $\xi(0)$, $\xi(+1)$, принимаюшие целочисленные значения. Вероятность того, что они примут значение η, равны $v_{-1}(\eta)$, $v_0(\eta)$ и $v_{+1}(\eta)$, соответственно.

Функция переходов автомата задается равенствами

$$N(t+1) = \begin{cases} N(t) - \xi(s(t+1)), & если \quad N(t) < 0, \\ N(t) + \xi(s(t+1)), & если \quad N(t) > 0, \\ \xi_0(t+1), & если \quad N(t) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$\xi_0(t+1) = \begin{cases} -\xi(s(t+1)), & если \quad N(t-1) < 0, \\ \xi(s(t+1)), & если \quad N(t-1) > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Функция выходов автомата задается следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} f_1, & если \quad N(t) < 0, \\ f_2, & если \quad N(t) > 0, \\ f_0, & если \quad N(t) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$f_0 = \begin{cases} f_1, & если \quad N(t-1) < 0, \\ f_2, & если \quad N(t-1) > 0. \end{cases} \tag{4}$$

В данном нами определении симметричного автомата удобно исходное состояние как облости L_1, так и L_2 снабжать номером 0.

Из определения (1)-(4) функционирования автомата W_2 (ξ(s)) в стационарной случайной среде вытекает , что процесс смены состояний автоматом W_2 представляет собой осциллирующее случайное блуждание, в котором две независимые последовательности независимых одинаково распределенных (в каждой последовательности) случайных величин $\eta_t^{(1)}, \eta_t^{(2)}$ имеют распределения

$$\varphi_1(x) = \mathrm{v}_{+1}(-x)q_1 + \mathrm{v}_{-1}(-x)p_1 + \mathrm{v}_0(-x)r_1,$$

$$\varphi_2(x) = \mathrm{v}_{+1}(x)q_2 + \mathrm{v}_{-1}(x)p_2 + \mathrm{v}_0(x)r_2$$

соответственно. Здесь учтено вероятностное задание случайных величин $\xi(1)$, $\xi(-1)$, $\xi(0)$.

Через распределения $\varphi_\alpha\ (x)$ случайных величин $\eta_t^{(\alpha)}\ (\alpha = 1,2)$ определяется производящие функции “шагов” (скачков) автомата следующим образом:

$$V_\alpha(\lambda) = M\left[\lambda^{\eta^{(\alpha)}}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_\alpha(k)\,\lambda^k.$$

С помощью $V_\alpha(\lambda)$ считаются средные скачки $\delta_\alpha(\alpha = 1,2)$ автомата по формулам │2│:

$$\delta_1 = \mathrm{V}_1'(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\,\varphi_1(k),$$

$$\delta_2 = -\mathrm{V}_2'(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\,\varphi_2(k).$$

Заметим, что знак выбран так, чтобы δ_2>0 означало движение автомата из облости L_2 (к состоянию с номером 0) .

В │2│паказано, что при δ_α<0 $\sigma_{0,\alpha} < 1$; при δ_α=0 $\sigma_{0,\alpha} = 1$ $\tau_{0,\alpha} = \infty$; при δ_α>0 $\sigma_{0,\alpha}$ =1, $\tau_{0,\alpha} < \infty$, $\alpha = 1,2$.

Используя результаты теории случайных блужданий и связь между блужданиями и функционированием автоматов в случайной среде, можно дать, как и в│2│ классификацию поведения автомата в стационарной случайной среде в терминах средных шагов δ_α.

Теорема1 . Пусть у случайных величин $\eta^{(\alpha)}$ конечны первые абсолютные моменты, т.е. сходятся ряды $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|\,\varphi_\alpha(k)$, $\alpha = 1,2$. Тогда автомат W_2 (ξ(s)), функционируюшии в стационарной случайной среде С ($a_1, r_1; a_2, r_2; ...; a_k, r_k$), является:

при $\delta_1 < 0,\ \delta_2 \ge 0$ -оптимальным;

при $\delta_1 < 0,\ \delta_2 > 0$ - строго оптимальным;

при $\delta_1 < 0,\ \delta_2 = 0$ - квазиоптимальным;

при $\delta_1 < 0,\ \delta_2 < 0$ -втягивающимся ;

при $\delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0$ -выталкивающимся;

при $\delta_1 \ge 0,\ \delta_2 < 0$ -антиоптимальным;

при $\delta_1 > 0,\ \delta_2 < 0$ -строго антиоптимальным;

при $\delta_1 > 0,\ \delta_2 = 0$ - антиквазиоптимальным,

при $\delta_\alpha = 0$, $\alpha = 1,2$ -безразличным.

Доказательсво теоремы совпадает с приведенным в │2│ доказательсвом аналогичной теоремы для бинарных стационарных случайных сред и поэтому не приводится.

Анализ поведения бесконечного марковского стохастического автомата $B_2(e, m, \{C_i\}_{i=1}^{e}, \{C_{-j}\}_{j=1}^{m})$

Примером марковских автоматов является бесконечный стохастический автомат с двумя действиями $B_2(e, m, \{C_i\}_{i=1}^{e}, \{C_{-j}\}_{j=1}^{m})$, переходы между состояниями которого определим следующим образом: при сигнале s= +1 автомат из любого состояния области L_α $(\alpha = 1, 2)$ с вероятностью C_i делает прижок в глубь области на i состояний; при сигнале s= -1 с вероятностью C_{-j} делает прижок по направлению из области на j состояний; а при сигнале s= 0 с вероятностью r_α остается в том же состояни области L_α, в котором находился в предыдущий момент времени, причем

$$\sum_{i=1}^{e} C_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{m} C_{-j} = 1 .$$

Отметим в каждом подавтомате (области) входные состояния, в которых оказывается автомат, когда он из состояний других подавтоматов попадает в состояния данного подавтомата, и выходные состояния, в которых автомат находится перед тем, как на следующем такте покинуть данный подавтомат.

Пусть входным состоянием в каждой области является состояние с номером 0, а выходными состояниями могут быть (по определению автомата) любые состояния с номерами $0,1,2,....,m-1$. Так, что марковский автомат $B_2(e, m, \{C_i\}_{i=1}^{e}, \{C_{-j}\}_{j=1}^{m})$ является одновходовым и многовыходовым │6│.

В нашем случае случайнные величины $\eta_t^{(1)}, \eta_t^{(2)}$ имеют распределения

$$\varphi_1(-i) = C_i\, q_1, \quad i = 1, 2, ...e,$$

$$\varphi_1(j) = C_{-j}\, p_1, \quad j = 1, 2, ...m,$$

$$\varphi_1(0) = r_1,\ \varphi_1(x) = 0,\ \forall x \neq -i, 0, j,$$

$$\varphi_2(i) = C_i\, q_2, \quad i = 1, 2, ...e,$$

$$\varphi_2(-j) = C_{-j}\, p_2, \quad j = 1, 2, ...m,$$

$$\varphi_2(0) = r_2,\ \varphi_2(x) = 0,\ \forall x \neq -j, 0, i .$$

Производяшие функции $V_\alpha(\lambda)$ скачков автомата определяются формулами

$$V_1(\lambda) = \sum_{i=1}^{e} \varphi_1(-i)\, \lambda^{-i} + \sum_{j=1}^{m} \varphi_1(j)\, \lambda^{j} + \varphi_1(0)\, \lambda^0 ,$$

$$V_2(\lambda) = \sum_{i=1}^{e} \varphi_2(i)\, \lambda^{i} + \sum_{j=1}^{m} \varphi_2(-j)\, \lambda^{-j} + \varphi_2(0)\, \lambda^0 ,$$

так что

$$\delta_\alpha = \overline{m} p_\alpha - \overline{e} q_\alpha \quad (\alpha = 1, 2),$$

где

$$\overline{e} = \sum_{i=1}^{\ell} i C_i \qquad \overline{m} = \sum_{j=1}^{m} j\, C_{-j} .$$

Нетрудно убедиться в том, что неравенство $\delta_\alpha < 0$ ($\delta_\alpha > 0$) эквивалентно условию $a_\alpha > (1-r_\alpha)(1-2Q)$ ($a_\alpha < (1-r_\alpha)(1-2Q)$), где $Q = \dfrac{\bar{e}}{\bar{e}+\bar{m}}$ -определитель автомата.

Тогда возможное поведение бесконечного марковского стохастического автомата $B_2(e,m,\{C_i\}_{i=1}^{e},\{C_{-j}\}_{j=1}^{m})$ в стационарной случайное среде С $(a_1, r_1; a_2, r_2)$ $(a_\alpha \neq a_\beta,\ \alpha,\beta = 1,2,\ \alpha \neq \beta)$ полностью определяется теоремой, являющейся конкретизацией теоремы1.

Теорема2. Бесконечный стохастический автомат $B_2(e,m,\{C_i\}_{i=1}^{e},\{C_{-j}\}_{j=1}^{m})$, функционируюший в стационарной случайное среде С $(a_1, r_1; a_2, r_2)$, является :

I. если $(r_\alpha - r_\beta)(1-2Q) \le 0 \quad (\alpha,\beta = 1,2,\ \alpha \neq \beta)$, то:

при $a_\alpha > (1-r_\alpha)(1-2Q)$, $a_\beta \le (1-r_\beta)(1-2Q)$ - оптимальным;

при $a_\alpha > (1-r_\alpha)(1-2Q)$, $a_\beta < (1-r_\beta)(1-2Q)$ - строго оптимальным;

при $a_\alpha = (1-r_\alpha)(1-2Q)$, $a_\beta < (1-r_\beta)(1-2Q)$ - квазиоптимальным;

II. если $(r_\alpha - r_\beta)(1-2Q) > 0 \quad (\alpha,\beta = 1,2,\ \alpha \neq \beta)$, то:

при $a_\alpha > (1-r_\alpha)(1-2Q)$, $a_\beta \le (1-r_\beta)(1-2Q)$ - оптимальным или антиоптимальным;

при $a_\alpha > (1-r_\alpha)(1-2Q)$, $a_\beta < (1-r_\beta)(1-2Q)$ - строго оптимальным или строго антиоптимальным;

при $a_\alpha = (1-r_\alpha)(1-2Q)$, $a_\beta < (1-r_\beta)(1-2Q)$ - квазиоптимальным или антиквазиоптимальным;

III. для $\forall\ Q,\ r_\alpha\ (\alpha = 1,2)$:

при $a_\alpha > (1-r_\alpha)(1-2Q)$ - втягивающимся;

при $a_\alpha < (1-r_\alpha)(1-2Q)$ - выталкивающимся,

при $a_\alpha = (1-r_\alpha)(1-2Q)$ - безразличным.

В заключений отметим, что марковский стохастический автомат $B_2(e,m,\{C_i\}_{i=1}^{e},\{C_{-j}\}_{j=1}^{m})$ при $r_\alpha = 0$, $\alpha = 1,2$ и C_{-1}=1, C_1=1 является бесконечным детерминированным автоматом с линейной тактикой, а при $r_\alpha = 0$, $\alpha = 1,2$ и C_{-m}=1, C_e=1 бесконечным детерминированным автоматом с регулярной тактикой |2| .

Литература

1. Цетлин М. Л. *Исследование по теории автоматов и моделированию биологических систем*. М., Наука, 1969.
2. Королюк В. С., Плетнев А. И., Эйдельман С. Д. *Автоматы. Блуждания. Игры.* Успехи математических наук. т.43, вып. 1 (259), 1988.
3. Церцвадзе Г.Н., Хведелидзе Т.Д. Анализ целесообразного поведения марковских автоматов при трех типах реакций случайной среды. Труды ТГУ, т 294,11,1989.
4. Хведелидзе Т.Д. , Церцвадзе Г.Н. Случайные блуждания и анализ поведения автоматов в случайных средах с тремя классами реакций. Труды ТГУ, т 308,14,1991.
5. Бухараев Р.Г Основы теории вероятностных автоматов, М .Наука ,1985.
6. Срагович В.Г. Теория адаптивных систем . М,.Наука,1976.

Статья получена: 2009-02-14