ISSN 1512-1461

УДК 530.145

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРТУРБАТИВНОГО ЛЕСТНИЧНОГО УРАВНЕНИЯ БЕТЕ-СОЛПИТЕРА ДЛЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

С.А. Гаджиев, Р.Г. Джафаров, А.И. Ливашвили

Институт Физических Проблем, Бакинский Государственный Университет
ул. З. Халилова, 23, AZ1148 Баку, Азербайджан

Аннотация:
После обсуждения ряда результатов по поиску решений интегральных уравнений типа Бете-Солпитера, построенных суммированием пертурбативного ряда фейнмановских диаграмм в лестничном приближении, приводится метод асимптотического решения вышеназванного уравнения при высоких энергиях

Ключевые слова*: лестничное приближение, реджевская асимптотика*

1. Введение.

Метод уравнения Бете-Солпитера (БС) [1] позволяет подробно исследовать амплитуду рассеяния как в глубокоупругой, так и в глубоконеупругой областях. В первоначальных работах [2-4] ядро лестничного уравнения определялось по теории возмущений как набор всех двухчастично неприводимых в данном канале диаграмм, что в низшем порядке сводились к одночастичному обмену[1]. Вообще, лестничное приближение – суммирование диаграмм лестничного типа было впервые проведено с помощью ренормгруппы Арбузовым, Логуновым, Тавхелидзе и Фаустовым [2], которые получили ставший классическим результат о том, что асимптотика суммы лестничных диаграмм φ^3-теории при высоких энергиях имеет реджевский степенной вид. С тех пор лестничные модели прочно вошли в арсенал теоретической физики высоких энергий и часто использовались как для проверки различных теоретических гипотез, так и для развития представлений о механизме взаимодействия. Лестничные модели послужили связующим звеном между теоретико-полевой теорией возмущений и теорией полюсов Редже, а также были отправной точкой для развития мультипериферической картины сильных взаимодействий [3].

---

[1] Следует отметить, что представление производящего функционала функций Грина КТП в виде континуального интеграла является чрезвычайно удобным инструментом для формулировки и изучения динамических уравнений теории поля. Область применения функциональных методов в КТП довольно широкая (в частности, непертурбативные явления, как спонтанное нарушение симметрии). Как известно, особую роль в теоретико-полевом описании частиц играют многочастичные уравнения. Многочастичные релятивистские уравнения для функций Грина необходимы для описания в рамках КТП связанных состояний элементарных частиц, а также для описания рассеяния частицы в связанном состоянии, рассеяния связанных состояний и т.п. Первым примером такого рода уравнений является знаменитое уравнение БС для двухчастичной функции Грина (четырехвостки) - представляющей собой линейное интегральное соотношение между двухчастичной функцией Грина G_4 с ядром и с пропагаторами $G_4 = G_4^{(0)} + SKG_4S$. Иначе обстоит дело с обобщением уравнения БС в случае трех и более частиц. Такое обобщение для произвольного числа фермионов дано в работе [5] и оно основано на анализе фейнмановских диаграмм ТВ, а все утверждения относительно структуры ядра имеют исключительно пертурбативный характер. Чтобы «освободиться» от мнемонии диаграмм Фейнмана необходим некий адекватный язык. Многочастичные уравнения не были включены на безмодельном уровне в общую схему теории поля, что связано с отсутствием адекватного языка. Метод преобразования Лежандра явился естественным языком для описания многочастичных уравнений в рамках лагранжевой теории поля. Целый ряд работ В.Е.Рочева и др. посвящен изучению многочастичных уравнений методом преобразования Лежандра[6].

ISSN 1512-1461

Мультипериферическая модель множественных процессов, основанная на представлении о слабокоррелированном характере взаимодействия частиц была впервые сформулирована в своем простейшем виде в работах Амати, Бертокки, Фубини, Стангеллини и Тонина [3]. Основой для этой модели послужило сформулированное в [3] уравнение БС для абсорбтивной (мнимой) части амплитуды рассеяния вне массовой оболочки. Уравнение для абсорбтивной части амплитуды рассеяния получается из уравнения БС для полной амплитуды с помощью обобщения известных правил Куткоссого [7] на сумму, вообще говоря, бесконечного числа диаграмм, которое (абсорбтивная часть) имеет четкий физический смысл; при нулевой передаче импульса абсорбтивная часть амплитуды рассеяния оптической теоремой связана с полным сечением рассеяния. В дальнейшем мультипериферическая модель получила свое развитие в многочисленных работах, посвященных ее обобщению и численному сравнению с экспериментальными данными. Одновременно Арбузовым, Рочевым, Клименко и др. [4] был предпринят ряд исследований структуры уравнения БС для абсорбтивной части амплитуды рассеяния и различными методами были получены точные решения лестничных уравнений для амплитуды рассеяния вперед в ряде моделей, и исследованы поведение этих решений как реджевской, так и в глубоконеупругой (бьеркеновской) областях. Однако, подход, использующий уравнение БС, хотя позволяет в значительной степени выйти за рамки ТВ, но при этом, решение самого уравнения наталкивается на большие математические трудности. Видимо, этим можно объяснить тот факт, что авторы [4] по изучению уравнения БС для амплитуды рассеяния рассматривали только случай рассеяния вперёд.

Переход к мнимой части осуществляется с помощью унитарного рассечения диаграмм, согласно правилам Куткосского [7], что в некоторой степени упрощает ядро уравнения БС:

$$F(s,t;p^2,k^2)=\pi\lambda^2\delta\left[s-m_0^2\right]+$$
$$+\frac{\pi\lambda^2}{(2\pi)^4}\int d^4q\,\frac{\theta(q_0)\delta(q^2-m_0^2)}{\left[(p-q)^2-m^2\right]\left[(k-q)^2-m^2\right]}F(s',t;(p-q)^2,(k-q)^2)\,. \quad (1)$$

Здесь p,p' и k,k' начальные и конечные 4-импульсы, соответственно, m_0-масса обменной частицы, т.е. масса в перекладинах лестницы, m-масса в прочих пропагаторах, $s=(p+p')^2$, $t=(p-q)^2$-полная энергия и переданный импульс, $d^4q=dq_0\vec{q}^{\,2}d|\vec{q}|d\cos\theta d\varphi$. Подынтегральная функция F является функцией инвариантов $s'=(p+p'-q)^2$ и t.

В частности, в работе [4] в случае рассеяния вперед в С.Ц.И. $\vec{p}+\vec{p}\,'=0$ ($t=0,\ p=k,\ p'=k'$) при условиях $m=m_0,\ s>>m^2,\ p'^2=0,\ p^2\to 0$ найденное решение

$$F(s)=\pi\lambda^2\delta(s)+64\pi^3g^4\,{}_2F_1(\alpha+1,2-\alpha;2;-s/m^2)\,, \quad (2)$$

(где $\alpha=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+g^2}$, $g^2=\frac{\lambda^2}{32\pi^2m^2}$ и ${}_2F_1$ гипергеометрическая функция Гаусса) при высоких энергиях $s\to\infty$, обеспечивает для мнимой части амплитуды рассеяния степенную асимптотику,

$$F(s)\cong 64\pi^3g^4\frac{\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{s}{m^2}\right)^{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+g^2}}\,, \quad (3)$$

что и в купе с выводами из реджевской теории [8] стимулируют разрабатывать более простой метод для обоснования реджевской асимптотики амплитуды рассеяния.

ISSN 1512-1461

2. Метод и применение в случае рассеяния вперед. В работах [9] исследована лестничное уравнение БС в скалярной теории с взаимодействием $\varphi\phi^2$, которая как известно, относится к числу сверхперенормируемых и содержит константу связи размерностью массы. Метод разработан как для случая рассеяния вперед, так и для рассеяния на малые переданные импульсы в реджевской области изменения энергии.

Введя в подынтеграл единицу $1=\int\delta\left((p+p'-q)^2-s'\right)ds'$, и предполагая частицу с импульсом p на массовой поверхности $p^2=m^2$, в реджевской области изменения энергии для решения (1) выбираем $F(s)\cong s^{\alpha}$. После тривиальных интегрирований С.Ц.И. $\vec{p}+\vec{p}'=0$ по угловым и импульсным переменным, и по s' в высокоэнергетическом пределе $s\to\infty$, получаем выражение

$$64\pi^2 m_0^2(\alpha+1)(\alpha+2)\frac{1}{\lambda^2}={}_2F_1\left(1,2;\ \alpha+3;\ -i\frac{m}{m_0}\right)+{}_2F_1\left(1,2;\ \alpha+3;\ i\frac{m}{m_0}\right),$$

что и позволяет определить явный аналитический вид реджевского показателя α в двух предельных случаях:

1) $m_0>>m$ -большие обменные массы,

$$\alpha=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{8\pi^2 m_0^2}}\,, \qquad (4)$$

которое находится в хорошем соответствии с выводами, полученными в рамках метода полюсов Редже [8] и результатом Арбузова и Рочева (3) [4].

2) $m_0<<m$ -малые обменные массы,

$$\alpha\approx-n\pm\left[-\frac{32\pi^2 m^2}{\lambda^2}-\frac{1}{2}\ln\frac{m_0^2}{m^2}\right],\quad n=1,2,\ldots \qquad (5)$$

причем,

$$\left|\frac{32\pi^2 m^2}{\lambda^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{m_0^2}{m^2}\right|<<1. \qquad (6)$$

Выясняется, что в случае очень малых обменных масс ситуация качественно изменяется. Амплитуда становится неаналитичной по константе связи. Следует также отметить, что амплитуда согласуется с ограничением Фруасара [8]. Полученные результаты позволяют утверждать, что только последовательный учет инфракрасных особенностей по массе m_0 обменной частицы может обеспечить реджевское поведение амплитуды рассеяния.

3. Случай рассеяния при ненулевых передачах импульса. Далее в рамках скалярной теории $\lambda\varphi\phi^2$ в лестничном приближении рассматривается процесс рассеяния на малые углы.

Предполагая $p^2=m^2$, $p'^2=m^2$ и проводя интегрирования в уравнении (1) в С.Ц.И. $\vec{p}+\vec{p}'=0$ по импульсным переменным $q_0,|\vec{q}|$, и по φ, получаем

$$F(s,t)=\frac{\pi^2\lambda^2}{8(2\pi)^4\sqrt{s}|\vec{p}|^2}\left[\frac{(s-s'+m_0^2)^2}{4s}-m_0^2\right]^{-1/2}\times$$
$$\times\int_{-1}^{+1}dzds'\frac{F(s',t)}{(\beta+z)(z^2+2\beta z_0 z+\beta^2+z_0^2-1)^{1/2}},$$

ISSN 1512-1461

где $z_0 = \cos\theta_0$ - косинус угла рассеяния, $z = \cos\theta$ и

$$\beta = (m_0^2 - s + s')^2 / 4|\vec{p}|\left[\frac{(s - s' + m_0^2)^2}{4s} - m_0^2\right]^{1/2}.$$

Введя малый параметр $\varepsilon << 1$ рассмотрим случай рассеяния на малые передаваемые импульсы (при этом заменяем z_0 на $z_0 = 1 + \varepsilon$). Разлогая ядро полученного уравнения по степеням ε удерживаем первые два члена разложения. Вычисляя интеграл по z, при $s >> m_0^2$ и далее полагая $F(s,t) = s^{\alpha(t)}$ (следовательно $F(s',t) = s'^{\alpha(t)}$) получаем нижеследующее уравнение

$$64\pi^2 m_0^2 \frac{(\alpha(t)+1)(\alpha(t)+2)}{\lambda^2\left(1+\frac{t}{6m^2}\right)} =$$

$$= {}_2F_1\left(1,2;\ \alpha(t)+3;\ -i\frac{m}{m_0}\right) + {}_2F_1\left(1,2;\ \alpha(t)+3;\ i\frac{m}{m_0}\right),$$

что позволяет определить $\alpha(t)$ в двух предельных значениях обменной массы:

1) $m_0 >> m$,

$$\alpha(t) = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{8\pi^2 m_0^2}\left(1+\frac{t}{6m^2}\right)}; \tag{7}$$

2) $m_0 << m$,

$$\alpha(t) \approx -n \pm \left[-\frac{32\pi^2 m^2}{\lambda^2}\left(1+\frac{t}{6m^2}\right)^{-1} - \frac{1}{2}\ln\frac{m_0^2}{m^2}\right], \quad n = 1,2,\ldots, \tag{8}$$

причем,

$$\left|\frac{32\pi^2 m^2}{\lambda^2}\left(1+\frac{t}{6m^2}\right)^{-1} + \frac{1}{2}\ln\frac{m_0^2}{m^2}\right| << 1. \tag{9}$$

Отметим, что в (7)-(9) при $t = 0$ существует точный переход в случай рассеяния вперёд (4)-(6). Этот факт не оставляет сомнений в надёжности полученных результатов для процесса рассеяния при малых передаваемых импульсах. В (8), как и в случае рассеяния вперёд, сохраняется особенность по массе m_0 обменной частицы, которая содержалась в исходном уравнении, и только последовательный учет этих особенностей обеспечивает реджевскую асимптотику амплитуды рассеяния.

Отметим, что решение уравнения БС для амплитуды рассеяния при ненулевых передачах импульса в научной литературе впервые встречалось в работах [9].

Полезность этого подхода, помимо всего прочего, состоит в том, что с его помощью можно исследовать подобные задачи для широкого класса квантово-полевых моделей, когда не удается получить точные решения уравнения БС.

ISSN 1512-1461

Литература

1. Bethe H., Salpeter E. Phys. Rev., 1951, **84**, 1232.
2. Arbuzov B.A., Logunov A.A., Tavkhelidze A.N., Faustov R.N. Phys. Lett., 1962, **2**, 150.
3. Bertocchi L., Fubini S., Tonin M. Nuovo Cim., 1962, **25**, N4, 626; Amati P., Stanghellini A., Fubini S. Nuovo Cim., 1962, **26**, N4, 896.
4. Арбузов Б.А., Рочев В.Е. ЯФ, 1975, **21**, 883; Арбузов Б.А., Дьяконов В.Ю., Рочев В.Е. ЯФ, 1976, **23**, 904; Клименко К.Г. ТМФ, 1978, **37**, №3, 416; Клименко К.Г., Рочев В.Е. ТМФ, 1977, **32,** 348; Клименко К.Г., Рочев В.Е. ТМФ, 1977, **30**, 191.
5. Huang K., Weldon H.A. Phys. Rev., 1975, **D11**, N2, 257.
6. Рочев В.Е. ТМФ, 1982, **51**, 22; Рочев В.Е. ТМФ, 1981, **47**, №2, 184; Jafarov R.G. and Rochev Central European Journal of Physics, 2004, N2, 367; Rochev V.E. J. Phys., 2000, **A33**, 7379; Rochev V.E. J. Phys., 1998, **A31**, 409; Rochev V.E. J. Phys., 1993, **A26**, 1235.
7. Cutkosky R.E. Journ. Math. Phys., 1960, **1**, N5, 429.
8. Коллинз П. Введение в реджевскую теорию и физику высоких энергий, Москва: Атомиздат., 1980, 432с.; Кайдалов А.Б. УФН, 2003, **173**, №11, 1153; Липатов Л.Н. УФН, 2008, **178**, №6, 668.
9. Гаджиев С.А., Джафаров Р.К., Ливашвили А.И. Множественное рождение и структура молекул, Баку: АГУ, 1985, 51;

   Гаджиев С.А., Джафаров Р.К. Докл. АН Азерб. ССР, 1986, **42**, №11, 20;

   Гаджиев С.А., Джафаров Р.К. Краткие сообщения по физике ФИАН СССР, 1986, №11, 25;

   Гаджиев С.А., Джафаров Р.К., Ливашвили А.И. Взаимодействие частиц с ядрами, атомами и молекулами, Баку: АГУ, 1987, 9;

   Гаджиев С.А., Джафаров Р.К. Докл. АН Азерб. ССР, 1987, **43**, №1, 34;

   Гаджиев С.А., Джафаров Р.К. Физика элементарных частиц, атомов и молекул, Баку: АГУ, 1988, 69;

   Гаджиев С.А., Джафаров Р.К., Ливашвили А.И. Изв.Вузов СССР, Физика, 1989, №5, 49.

Article received: 2010-09-14