ISSN 1512-1801
Teachers' first conference "University and School - essential to each other", 29-30 November 2013.
Materials

0 - ის სწავლების პრობლემა

დავით წამალაშვილი
სსიპ N21 საჯარო სკოლის მათემატიკის მასწავლებელი და თსუ-ის პედაგოგიკის სამეცნიერო-კვლევითი ინსტიტუტის დოქტორანტი, მოწვეული მასწავლებელი

რეზიუმე:

სტატიაში განხილულია მათემატიკის სწავლებაში ერთ-ერთი პრობლემური საკითხი - ნულის სწავლება. განხილულია უზუსტობები, რომელსაც ხშირად უშვებენ მასწავლებლები ნულის შემოტანის საწყის ეტაპზე, რაც მოსწავლეებში სწავლების მაღალ კლასებში იჩენს თავს სხვადასხვა სიტუაციაში. ნულის სწავლებას მეთოდიკურად დიდი ყურადღება უნდა ეთმობოდეს ცნების შემოტანის საწყისი ეტაპიდანვე.

<u>საკვანძო სიტყვები:</u> *ნული, სწავლების პრობლემა, ნულზე გაყოფა, ნულის ნული ხარისხი*

ნებისმიერი საგნის სწავლება სკოლაში დიდ პრობლემებთანაა დაკავშირებული. მათ შორის არაა გამონაკლისი მათემატიკა, უფრო მეტიც, აქ ყველაზე დიდ აბსტრაქციებთან გვაქვს საქმე. ყველაზე დიდი პრობლემა მათემატიკის სწავლების დროს საწყისშივეა ჩადებული - როგორ ვასწავლოთ მოსწავლეებს რიცხვები, განსხვავება დავანახოთ რიცხვსა და ციფრს შორის და ა.შ. თუმცა რიცხვებზე მოქმედებების ჩატარების სწავლება, ჩემი აზრით, ნაკლებად საინტერესოა. უფრო მეტი განხილვის ღირსია თვით ცნების შემოტანა. ასე, რომ განსახილველი საკითხი ძალიან ბევრია, შესაბამისად ბევრია საკამათოც.

მათემატიკის სწავლებისას ძალიან დიდ პრობლემას ქმნის 0. მოსწავლეებს ყველაზე მეტად უჭირთ 0-ის ადეკვატური გაგება. დასაწყისისსთვის საინეტრესოა, ვინ შემოიტანა მათემატიკაში 0. რათქმა უნდა ამის ზუსტად განსაზღვრა შეუძლებელია. ერთი რამის თქმა კი ნამდვილად შეიძლება, რომ ეს იყო გენიალური გამოგონება. ყველაზე ადრე ძველ ბაბილონში გამოიყენეს 0, ოღონდაც არა როგორც რიცხვი, არამედ როგორც თანრიგის აღმნიშვნელი ციფრი. 0-ის წარმოშობის შესახებ შეგვიძლია ვისაუბროთ ძველი ინდური ნაშრომებიდანაც -არიაბხატას, ბრახმაგუპტას და ბხასკარას შრომებიდან. ბრახმაგუპტა წერს, თუ რიცხვს გავამრავლებთ 0-ზე, მიიღება 0, ხოლო გაყოფასთან დაკავშირებით, ვაწყდებით პრობლემებსო და წერს, რომ n რიცხვი გაყოფილი 0-ზე არის $\frac{n}{\mathbf{0}}$ და ის არის 0-ის ტოლიო. რათქმა უნდა მისი ეს მტკიცება არასწორია, თუმცა ის კი ნამდვილად დასაფასებელია, რომ 0-ის გაშიფვრის პრობლემა ნამდვილად დგას უკვე დღის წესრიგში. ბრახმაგუპტას ამ არასწორი წინადადების შესახებ 200 წლის შემდეგ (ახ.წ. 830 წ.) მახავირა თავის წიგნში "Ganita sara samgraha" - ში ცდილობს გამოასწოროს შეცდომა და წერს, რომ რიცხვი რჩება უცვლელი, თუ მას ნულზე გავყოფთო, ცხადია, ისი შეცდომით იძლევა 0-ის თვისების ინტერპრეტაციას. ბრახმაგუპტას შეცდომის 500 წლის შემდეგ ბხასკარა ცდილობს გადაჭრას პრობლემა

ISSN 1512-1801
Teachers' first conference "University and School - essential to each other", 29-30 November 2013. Materials

$\frac{n}{0} = \infty$, აქაც შეცდომასთან გვაქვს საქმე, თუმცა მან 0-ის სხვა თვისებები სწორად აღნიშნა. მაგალითად, და $\sqrt{0} = 0$. აქვე, საინტერესოა აღვნიშნოთ, რომ 0-ს იყენებდნენ მაიას ტომები (ახ.წ. 250-900 წწ), თუმცა ობიექტური მიზეზების გამო მათი ეს დიდი გამოგონება ბვერაფრით გაიცნო მსოფლიომ.

როგორც ცნობილია, ციფრები, რომლებსაც დღეს ვიყენებთ, გამოიგონეს ინდოეთში. ისინი მალე გავრცელდა არაბეთის ქვეყნებშიც, შემდეგ კი არაბმა მათემატიკოსებმა გააცნეს ევროპას, შესაბამისად მათ ხშირად არაბულ ციფრებსაც უწოდებენ. „ნული" არაბულად ჟღერს, როგორც "sifr", საიდანაც მოდის ტერმინი „ციფრი". XII საუკუნეში იბნ ეზრამ დაწერა ტრაქტატი ციფრების შესახებ, რომელშიც იყენებს 0-ს და მას უწოდებს "Galgal"- ს, იგი ნიშნავს ბორბალს ან წრეს. 0-ს ხშირად იყენებდნენ ძველი ჩნელი სწავლულებიც თავიანთ შრომებში. 1247 წელს ცზინ ჩიუ-შაოს და 1303 წელს ჩჟუ შიცზეს "0" სიმბოლო გამოყენებული აქვთ 0-ის მნიშვნელობით. ასევე, ბევრი ევროპელი მათემატიკოსი შეძლებდა უკეთ ამოეხსნათ პრობლემები, მათ რომ გამოეყენებინათ 0. ევროპაში 1600 წლიდან ხდება ნულის გამოყენება უფრო ხშირად, ოღონდ დიდი წინააღმდეგობების შემდეგ.

შესაბამისად „0" - ის ისტორია ასე ტრაგიზმითაა მოცული და „შიშის" და შეცდომების მიუხედავად ჩანს მათემატიკოსთა დიდი ინტერესი მის მიმართ. პრობლემები 0 -ის დაფუძნებისათვის საკმაოდ დიდი იყო კაცობრიობის დასაბამიდან ვიდრე 1600 წლამდე. ცხადია, მისი სწავლებაც პრობლემურია. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით ქვემოთ მოყვანილი რამდენიმე მარტივი მაგალითით.

ხშირად 0 - ზე წარმოდგენის შესაქმნელად, დაწყებითი საფეხურის მასწავლებლებს, მოყავთ ძალიან მარტივი მაგალითი : დავუშვათ, მაგიდაზე იდო სამი ვაშლი, ნიკამ აიღო სამივე ვაშლი. რა დარჩა მაგიდაზე? - მოსწავლეები პასუხობენ, რომ არაფერი. მათემატიკურად $3 - 3 = 0$ და ხდება 0-ის იდეის გაიგივება სიტყვა **„არაფერთან"**, **„არცერთთან"**, რაც შემდგომ კლასებში იწვევს ძალიან დიდ პრობლემას. მოვიყვან მაგალითს: როცა მოსწავლეს ვაძლევთ განტოლებას ამოსახსნელად, მოსწავლე მარტივად პოულობს ამონახსნს $x = \frac{0}{7}$ ანუ $x = 0$, მაგრამ კითხვაზე, თუ რამდენი ამონახსნი აქვს მოცემულ განტოლებას, დაუფიქრებლად პასუხობს, რომ ამონახსნი არ გააჩნია, ნათლად ჩანს რომ ამის გამომწვევი მიზეზი 0-ია. რადგანაც მოსწავლე ხედავს 0-ს, მაშინვე უჩნდება ასოციაცია „არაფერთან", „არცერთთან" და შესაბამისად მოსწავლის არასწორი პასუხიც ამის შედეგია. იბადება კითხვა, როგორ შემოვიტანოთ ნულის ცნება დაწყებით საფეხურზე, ისე, რომ მაღალ კლასებში აღარ დაუშვან შეცდომები. უკვე განხილული მაგალითის საფუძველზე მარტივია მოსწავლეს აუხსნა თუ სად ცდება. მოვიყვანთ მეორე მაგალითსაც . პირველ სიტუაციაში მოსწავლე წერს, რომ x=0, ხოლო

ISSN 1512-1801
Teachers' first conference "University and School - essential to each other", 29-30 November 2013.
Materials

მეორე სიტუაციაში $x = \frac{7}{0}$, შესაბამისად, რადგანაც 0-ზე გაყოფა არ შეიძლება, მოსწავლე მიგვყავს დასკვნამდე, რომ $x \in \emptyset$. აქედან ვღებულობთ, რომ მეორე სიტუაციაში არ აქვს განტოლებას ამონახსნი, რაც შეეხება პირველ სიტუაციას, ამონახსნიც გვაქვს, თანაც ერთადერთი და ეს რიცხვია 0.

ამ ყველაფრის შემდეგ ჩნდება კითხვა, კი მაგრამ რატომ არ შიძლება რიცხვის 0-ზე გაყოფა? მათემატიკის მასწავლებლებს მოკლე და ცალსახა პასუხი აქვთ, -„არ შეიძლება და მორჩა". რა თქმა უნდა ასეთი მიდგომა ისეთი ფუნდამენტური ცნებისადმი, რასაც გაყოფა ქვია და თანაც, 0-ზე გაყოფა, არ შეიძლება. მოსწავლეები ბავშვობიდანვე უნდა მიეჩვიონ იმ აზრს, რომ ნებისმიერ მათემატიკურ დებულებას დამტკიცება სჭირდება, რაღა თქმა უნდა, თუ ის აქსიომად არ არის მიღებული. აქ აშკარად ჩანს, რომ 0-ზე გაყოფის დროს ხდება რაღაც ისეთი რაც „არ შეიძლება" მათემატიკაში. კარგი იქნებოდა , თუ ამაზე გამახვილდება ყურადღება მასწავლებლების მხრიდან და მოსწავლეებს „უტყუარი ჭეშმარიტების" სახით კი არ მიაწვდიან მათემატიკურ ფორმულებსა თუ დებულებებს, არამედ, უჩვენებენ, დაუმტკიცებენ მათ მართებულებას. შევეცადოთ ჩვენც საბოლოოდ გადავწყვიტოთ ეს პრობლემა. პირველ რიგში, სანამ გაყოფის სწავლებაზე გადავიდოდეთ, მანამდე მოსწავლეებს გავლილი უნდა ქონდეთ შეკრება, გამოკლება და გამრავლება. ეს ნამდვილად ასეც ხდება ხოლმე. ყველაფერი ეს გვჭირდება იმისათვის, რომ მოსწავლეებს გავაგებინოთ რა კავშირშია შეკრება და გამოკლება ან გაყოფა და გამრავლება ერთმანეთთან. დავუშვათ:

$7 + 10 = 17$ $\quad 17 - 7 = 10$ $\quad 5 \times 4 = 20$ $\quad 20 : 4 = 5$

შემოწმება:

$17 - 10 = 7$ $\quad 10 + 7 = 17$ $\quad 20 : 4 = 5$ $\quad 5 \times 4 = 20$

მოცემული მაგალითებით იმის თქმა გვინდა, მოსწავლეებს შეგვიძლია ვაჩვენოთ, როგორ ხდება შეკრების გადამოწმება გამოკლებით, გამოკლების - შეკრებით, გამრავლების გადამოწმება ხდება გაყოფით, გაყოფის - გამრავლებით. მაშინ სადაა პრობლემა? გავყვეთ ლოგიკურ ჯაჭვს, 0-ის გაიგივება სიტყვა „არაფერთან", „არცერთთან", გაგვიადვილებს მასწავლებლებს საქმეს იმ შემთხვევაში, როდესაც ვასწავლიით შეკრებას და გამოკლებას: $20 + 0 = 20$; $20 - 0 = 20$; იდეურად 20-ს მივუმატოთ „არაფერი", „არცერთი", ისეც 20-ია.

20-ს გამოვაკლოთ „არაფერი", „არცერთი", რათქმა უნდა 20-ია. თითქოს ძალიან მარტივი „ფორმულაა", მაგრამ რამდენად წინააღმდეგობრივია იგი, როდესაგ გამარავლებაზე და გაყოფაზე გადავდივართ. მოვიყვანოთ მაგალითი:

მათემატიკურად $a \times 0 = 0$ ანუ რიცხვის 0-ზე გამრავლებისას მიიღება 0. მოდით მივყვეთ იდეურად, თუ 20-ს გავამრავლებთ „არაფერზე", „არცერთზე", ისევ 20 უნდა

ISSN 1512-1801

მიიღებოდეს, მაგრამ ასე არაა. რაც შეეხება პირიქით, $0 \times 20 = 0$, „არაფერი" გამრავლებული 20-ზე , ფაქტია, რომ ისევ არაფერია. მაშ სადაა ჭეშმარიტება? წესით $20 \times 0 = 0 \times 20$ მათემატიკურად, მაგრამ იდეური თვალსაზრისით, ერთ შემთხვევაში ვიღებთ 20-ს, მეორე შემთხვევაში - 0-ს. აქედან უკვე კარგად ჩანს, რომ 0-ის გაიგივება სიტყვა „არაფერთან", „არცერთთან" არ შეიძლება. მოსწავლეები იდეურად უფრო აქცევენ 0-ს ყურადღებას, ვიდრე მათემატიკურ შინაარსს. კარგი იქნება, მასწავლებლები მათემატიკურ მხარეზე თუ გაამახვილებენ ყურადღებას.

მაშ, საბოლოოდ დავრწმუნდეთ, რატომ არ შიძლება 0-ზე გაყოფა. იდეურად, $20 : 0 = 20$ ანუ 20 გაყოფილი „არაფერზე", ისევ 20-ის ტოლი უნდა რჩებოდეს, ვნახოთ რატომ არ შეიძლება იგივეს გაკეთება მათემატიკურად: $20 : 0 = 20$, შემოწმებისას მივიღებთ $20 \times 0 = 20$, მაშინ როცა ცნობილია, რომ $20 \times 0 = 0$ ე.ი. ვიღებთ წინააღმდეგობას, ანუ გადამოწმების დროს ირღვევა მათემატიკური მოქმედების სამართლიანობა. აქედან დასკვნა, რომ ძალიან საგულისხმოა და მნიშვნელოვანია 0-თან მოპყრობა. ერთი საქმის გაკეთებით, ანუ შკრება-გამოკლების მარტივად სწავლებით, „ფუჭდება" მეორე საქმე, ანუ გამრავლება-გაყოფის სწავლებისას 0-ის გაიგივება სიტყვებთან „არაფერი", „არცერთთან" მივყავართ ცუდ შედეგებამდე და არაადეკვატურ პასუხებამდე. კარგი იქნება, თუნდაც დაწყებით კლასებშივე დებულებათა დამტკიცების ელემენტარული გზების ათვისება, მათემატიკაში მას ხომ გადამწყვეტი მნიშვნელობა ენიჭება.

0-სგან განსახვავებული რიცხვის 0-ზე გაყოფა არ შეიძლება, რაშიც უკვე დავრწმუნდით, მაგრამ იბადება კითხვა, შესაძლებელია თუ არა 0-ის 0-ზე გაყოფა. ვნახოთ: განვიხილოთ განტოლება 0×x=0, როგორც განტოლებას, აქვს უსასრულო რაოდენობა ამონახსნებისა, რადგანაც უცნობის მაგიერ ნებისმიერი რიცხვის ჩასმა, მოგვცემს ჭეშმარიტ ტოლობას, მაგრამ ჩანაწერის გაკეთება $x = \frac{0}{0}$ არ შეიძლება. შეიძლება ითქვას, რომ მოცემული მაგალითი უკვე შეიცავს პასუხს ნახსენებ კითხვაზე, წესით, რიცხვის თავის-თავზე გაყოფა უნდა გვაძლევდეს 1-ს, მაგრამ მოცემული განტოლებიდან ნათლად ჩანდა, რომ უცნობის მაგიერ შეგვეძლო ჩაგვესვა არამარტო 1, არამედ ნებისმიერი სხვა რიცხვიც. შესაბამისად ირღვევა წესი, რომ რიცხვის საკუთარ თავზე გაყოფა გვაძლევს 1-ს, ამიტომაც 0-ის 0-ზე გაყოფაც მათემატიკურად არ განიმარტება, თუმცა იდეურად აქაც კარგად ჯდება ის, რომ „არაფერი" : „არაფერზე"= „არაფერს".

რადგანაც 0-ზე ვსაუბრობთ, აქვე მინდა მოვიყვანო მაგალითი, როდესაც მასწავლებელი მოსწავლეს ასწავლის ხარისხის თვისებებს, ძალიან მარტივად წერს, რომ $a^0 = 1$, თუმცა არსად ჩანს დამტკიცება, თუ რატომაა რიცხვი 0-ხარისხში 1-ის ტოლი. ეს

ISSN 1512-1801
Teachers' first conference "University and School - essential to each other", 29-30 November 2013.
Materials

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},$$

გამომდინარეობს სხვა ფორმულიდან, თუ მაშინ ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ რომ $\frac{a^n}{a^n} = 1$, იმიტომ რომ რიცხვის საკუთარ თავზე გაყოფა გვაძლევს 1-ს. მეორე მხრივ, $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$ ე.ი. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა. დამტკიცების შემდეგ მოსწავლეს აღარ უჩნდება კითხვა და გაზეპირებულად არ იცის უკვე, თუ რატომაა $a^0 = 1$.

აქვე იბადება კითხვა, რისი ტოლია ნულის ნული ხარისხი . ერთი მხრივ, ვიცით რომ 0 ნებისმიერ ხარისხში 0-ის ტოლია. მეორე მხრივ, ისიც ვიცით, რომ ნებისმიერი რიცხვი 0 ხარისში უდრის 1-ს. ე.ი. გამოდის რომ ორივე „ჭეშმარიტი" განმარტების მიხედვით გვაქვს ორი სიტუაცია...

სადაა ჭეშმარიტება?! აქედან დასკვნა: ნულის ნული ხარისხი არ განიმარტება ამ მარტივი მიზეზის გამო. თუ შევალთ შემეცნებით ფორუმებზე, მოცემული საკითხის გარშემო დიდი დავა აქვთ ხოლმე ატეხილი პროფესიონალ თუ დილეტანტ მათემატიკოსებს. ზოგიერთი უმაღლესი მათემატიკის მეთოდებითაც ცდილობს თავისი თვალსაზრისის დამტკიცებას და დაცვას, თუმცა აქ დასამტკიცებელი არაფერია, რადგანაც ორივე შემთხვევა ერთდროულად შეუძლებელია, შესაბამისად, ნულის ნული ხარისხი არ განიმარტება. ასეთი სიზუსტე ხშირად აკლია მათემატიკურ წიგნებს. კარგი იქნებოდა ამის გამოსწორება.

და ბოლოს, დასკვნის სახით აღვნიშნავდი, რადგანაც ზოგიერთი საკითხის სწავლება ძალიან ძნელია და პრობლემურია, უმჯობესი იქნება საკითხის სწავლებისას ყურადღება გავამახვილოთ ტერმინის შემოტანის მიზეზებზე. 0 - ის შემთხვევას რაც შეეხება, ძველ მათემატიკოსებს იგი არ შემოუტანიათ „არაფრის" ასაღნიშნად, და რომელი მათემატიკოსიც კი მას აძლევდა „არაფრის" მნიშვნელობას, ავტომატურად აწყდებოდა პრობლემას. კარგი იქნება გამახვილდეს ყურადღება ნულის, როგორც რიცხვის თვისებებზე და არა „იდეურად" შეკრება-გამოკლების დროს რას შეიძლება გამოხატავდეს იგი.

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. J J O'Connor and E F Robertson- A history of Zero, 2000.
2. С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.В. Решетников - Математика. Школьная энциклопедия, 1996.