ISSN 1512-1232

უაკ 004.89 + 65.011

ბაიესური ქსელები და მათთან დაკავშირებული ჰიპოთეზების მათემატიკური მიმოხილვა

არჩილ ფრანგიშვილი, ნათია ნამიჩეიშვილი

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, 0175 თბილისი, კოსტავას 77

ანოტაცია: *სტატია შეიცავს ბაიესური ქსელების - როგორც საგნობრივი სფეროს აღწერილობითი ანალიზის მეთოდის - შექმნისადმი მიდგომის მათემატიკურ მიმოხილვას. შემოტანილია აუცილებელი ცნებები გრაფთა თეორიიდან და ჩამოყალიბებულია შემდგომი განხილვისათვის აუცილებელი შედეგები. განსაზღვრულია ბაიესური ქსელი როგორც მიმართული (ორიენტირებული) აციკლური გრაფი, რომლის კვანძები შეესაბამება ცნებებს საგნობრივ სფეროდან, ხოლო რკალები - უშალოდ სტოქასტიკურ კავშირებს მათ შორის. ალბათური განაწილებისათვის გრაფის კვანძების მნიშვნელობათა სიმრავლეზე ფორმულირებულია ბაიესური ქსელის შესაბამისი ჰიპოთეზები პირობითი დამოუკიდებლობის, ფაქტორიზაციის და განცალკევების შესახებ. მტკიცდება ამ ჰიპოთეზათა ეკვივალენტობა, რაც შემდგომ ერთიანი ჰიპოთეზის გამოყენების საშუალებას იძლევა, რომელიც შეზღუდვებს ადებს ქსელში კვანძების ალბათური განაწილების პარამეტრთა სიმრავლეზე. ეს შეზღუდვები შეესაბამება პირობით დამოუკიდებლობას კვანძებს შორის, რომლებიც ქსელში დაკავშრებულია ამ კვანძების გამთიშველ (გამაცალკევებელ) სიმრავლეებზე გამავალი მარშრუტებით.*

საკვანძო სიტყვები: *ბაიესური ქსელი, მიმართული გრაფი, აციკლური გრაფი, სტოქასტიკური კავშირები, ჰიპოთეზა პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ, ჰიპოთეზა ფაქტორიზაციის შესახებ, ჰიპოთეზა განცალკევების შესახებ, მარკოვის საფარი.*

1. შესავალი

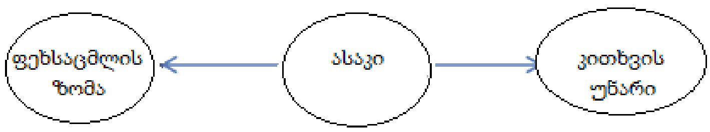
საგნობრივი არის ობიექტებს შორის ინფორმაციული დამოკიებულების ცნება ბუნებრივია ადამიანის აზროვნებისათვის. ადამიანები ავლენენ ტენდენციას იმსჯელონ ფაქტორებს შორის სამდონიანი კავშირების ტერმინებში: x ფაქტორი გავლენას ახდენს y-ზე z-ის საშუალებით. ამიტომ საგნობრივი სფეროს ინტუიციურად გასაგები მოდელის აგების მცდელობა დაკავშირებულია ისეთი ენის გამოყენების აუცილებლობასთან, რომელსაც შეუძლია ნათლად გამოამჟღავნოს და ჩამოაყალიბოს დამოკიდებულებები ფაქტორებს შორის შუალედური კავშირების საშუალებით.

ალბათობათა თეორიაში ინფორმაციული დამოკიდებულების მოდელირება პირობითი დამოკიდებულებით (ან უფრო ზუსტად რომ ვთქვათ: პირობითი დამოუკიდებლობის არარსებობით) ხდება, რომელიც აღწერს ჩვენი რწმენის ცვლილებას რომელიმე ხდომილობის შედეგზე ახალი ცოდნის მიღებისას ფაქტების შესახებ, იმ პირობით, რომ ჩვენთვის უკვე ცნობილია სხვა ფაქტთა გარკვეული სიმრავლე.

მოხერხებულია და ინტუიციით ასევე გასაგებია წარმოვადგინოთ კავშირები ელემენტებს შორის მიმართული გზის საშუალებით, რომელიც ამ ელემენტებს აკავშირებს გრაფში. თუ დამოკიდებულება x და y ელემენტებს შორის არ არის უშუალო და ხორციელდება მესამე z ელემენტის საშალებით, მაშინ ლოგიკურია ველოდოთ, რომ გზაზე x-სა და y-ს შორის განთავსებული იქნება z ელემენტი. ასეთი შუამავალი კვანძები განახორციელებს x და y ელემენტებს შორის დამოკიდებულების «მოკვეთას» («მოჭრას»), ესე იგი გავლენის უშუალო ფაქტორთა მნიშვნელობების ცოდნისას მოახდენს მათ შორის პირობითი დამოუკიდებლობის მოდელირებას.

მოდელირების ასეთ ენათა შორის წარმოდგენილია ბაიესური ქსელები, რომლებიც გამოიყენება რაღაც საგნობრივი სფეროს ცნებათა შორის პირობითი დამოკიდებულებების აღწერისათვის. განასხვავებენ ბაიესური ქსელების გამოყენების ორ ძირითად სცენარს:

1. *აღწერილობითი ანალიზი.* საგნობრივი არე აისახება გრაფის სახით, რომლის კვანძები წარმოადგენს ცნებებს, ხოლო ისრებით მოცემული მიმართული რკალები იძლევა ამ ცნებებს შორის უშუალო დამოკიდებულების ილუსტრირებას. კავშირი x და y ცნებებს შორის ნიშნავს: x-ის მნიშვნელობის ცოდნა გვეხმარება გავაკეთოთ უფრო დასაბუთებული ვარაუდი y-ის მნიშნელობის შესახებ. უშუალო კავშირის არარსებობა ცნებებს შორის ახდენს პირობითი დამოუკიდებლობის მოდელირებას მათ შორის «გამყოფი» ცნებების გარკვეული ნაკრების ცნობილ მნიშვნელობათა პირობებში. მაგალითად, ბავშვის ფეხსაცმლის დიდი ზომა გვიმტკიცებს რწმენას (გულდამაჯერებლობას) იმის შესახებს, რომ ბავშვი კითხულობს, მაგრამ, თუ ჩვენთვის წინასწარ ცნობილია მისი ასაკი, ფეხსაცმლის ზომის ცოდნა უკვე არ გვაძლევს დამატებით ინფორმაციას ბავშვის უნარზე წაიკითხოს რაიმე.



ნახ.1 კავშირი ბავშვის ასაკს, მისი ფეხსაცმლის ზომასა და კითხვის უნარს შორის

მეორე, საწინააღმდეგო, მაგალითის სახით განვიხილოთ ისეთი თავდაპირველად არადაკავშირებული ფაქტორები, როგორიც არის თამბაქოს მოწევა და გაცივება. მაგრამ, თუ ჩვენთვის ცნობილია სიმპტომი - ადამიანს დილით აწუხებს ხველა, მაშინ იმის ცოდნა, რომ ადამიანი არ ეწევა, მეტ დამაჯერებლობას აძლევს ვარაუდს მისი გაცივების შესახებ. ადამიანი გაციებულია.

ნახ.2 საწინააღმდეგო მაგალითი

2. *კლასიფიკაცია და პროგნოზირება.* ბაიესურ ქსელში დასაშვებია რიგი ცნების პირობითი დამოუკიდებლობა. ეს პარამეტრების ერთობლივი განაწილების რიცხვის შემცირებისა და მონაცემთა არსებულ მოცულობებზე მათი სარწმუნო (სანდო, ინგლ. confidential) შეფასების საშუალებას იძლევა. ასე, მაგალითად, ათი ცვლადის შემთხვევაში, როცა თითოეულს შეუძლია ათი მნიშნელობის მიღება, ერთობლივი

ISSN 1512-1232

განაწილების პარამეტრთა რიცხვი $\left(10\cdot10^{9}-1\right)$ სიდიდეს შეადგენს. თუ დავუშვებთ, რომ ამ ცვლადებს შორის ერთმანეთზე მხოლოდ ორი ცვლადია დამოკიდებული, მაშინ პარამეტრების რიცხვი $8\cdot\left(10-1\right)+\left(10\cdot10-1\right)=171$ სიდიდის ტოლი ხდება. თუ ერთობლივი განაწილებისათვის გვექნება გამოთვლითი რესურსების თვალსაზრისით რეალისტური მოდელი, მაშინ რომელიმე ცნების უცნობი მნიშვნელობის პროგნოზირება შესაძლებელი ხდება, როგორც, მაგალითად, ამ ცნების ყველაზე საალბათო (შესაძლებელი) მნიშნელობის.

ქვემოთ განხილული გვაქვს ბაიესური ქსელების ძირითადი თვისებები, ასევე კავშირები მათ შორის.

2. მიმოხილვის სტრუქტურა

ამ მიმოხილვაში, უპირველეს ყოვლისა, შემოგვავს აუცილებელი ცნებები გრაფთა თეორიიდან და შემოვიფარგლებით შემდგომი განხილვისათვის საჭირო შედეგებით.

შემდეგ განვსაზღვრავთ ბაიესურ ქსელს როგორც მიმართულ (ორიენტირებულ) აციკლურ გრაფს, რომლის კვანძები შეესაბამება ცნებებს საგნობრივ სფეროდან, ხოლო რკალები - უშალოდ სტაქასტიკურ კავშირებს მათ შორის. ალბათური განაწილებისათვის გრაფის კვანძების მნიშვნელობათა სიმრავლეზე ჩვენ ვაყალიბებთ ბაიესური ქსელის შესაბამის ჰიპოთეზებს პირობითი დამოუკიდებლობის, ფაქტორიზაციის და გაყოფის (განცალკევების) შესახებ. ვამტკიცებთ ამ ჰიპოთეზათა ეკვივალენტობას, რაც შემდგომ ერთიანი ჰიპოთეზის გამოყენების საშუალებას იძლევა, რომელიც შეზღუდვებს ადებს ქსელში კვანძების ალბათური განაწილების პარამეტრთა სიმრავლეზე. ეს შეზღუდვები შეესაბამება პირობით დამოუკიდებლობას კვანძებს შორის, რომლებიც ქსელში დაკავშრებულია ამ კვანძების გამყოფ (გამაცალკევებელ) სიმრავლეებზე გამავალი მარშრუტებით.

მიმოხილვა ეფუძნება მრავალი ავტორის სხვადასხვა შედეგს. ამ ავტორთა შორის არიან: Judea Pearl, Thomas Verma, David Heckerman, David Maxwell Chickering, Dan Geiger, Maxim Goncharov და მრავალი სხვა. მათი შრომების ნუსხა მოცემულია ლიტერატურის სიაში [1-22].

3. განსაზღვრებები და აღნიშვნები

$G=\left(N,E\right)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ მიმართულ აციკლურ გრაფს კვანძების, ანუ წვეროების (ინგლ. Node) $N=\left\{x_1,x_2,\ldots,x_n\right\}$ სიმრავლითა და მიმართული რკალების, ანუ წიბოების (ინგლ. Edge) $E=\left\{\left\langle x_i,x_j\right\rangle \middle| x_i,x_j\in N\right\}$ სიმრავლით. დავუშვათ, რომ $Y\in N$ - კვანძების გარკვეული სიმრავლეა და შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$P\left(Y\right)=\left\{x\in N\,\middle|\,\exists y\in Y,\exists\left(x,y\right)\in E\right\}$ **-** Y **-ის მშობელთა (Parent) სიმრავლე,**

$C\left(Y\right)=\left\{x\in N\,\middle|\,\exists y\in Y,\exists\left(y,x\right)\in E\right\}$ **-** Y **-ის შვილთა (Child) სიმრავლე,**

ISSN 1512-1232

$A_k(Y)=\begin{cases}P(Y), k=1\\ P\left(A_{k-1}(Y)\right), k>1\end{cases}$ - Y-ის k -ური დონის წინაპართა (Ancestor) სიმრავლე,

$A(Y)=\bigcup_{i=1}^{n}A_i(Y)$ - Y-ის წინაპართა (Ancestor) სიმრავლე,

$D_k(Y)=\begin{cases}C(Y), k=1\\ C\left(D_{k-1}(Y)\right), k>1\end{cases}$ - Y-ის k -ური დონის შთამომავალთა (Descendant) სიმრავლე,

$D(Y)=\bigcup_{i=1}^{n}D_i(Y)$ - Y-ის შთამომავალთა (Descendant) სიმრავლე.

გავითვალისწინოთ შემდეგი განსაზღვრებებიც:

განსაზღვრება: **წიბო** - რკალი მიმართულების გაუთვალისწინებლად.

განსაზღვრება: მიმართული გრაფის **ჩონჩხი** - არამიმართული გრაფი, რომელსაც მიმრთული გრაფი იძლევა მისი რკალების ჩანაცვლებისას წიბოებით.

განსაზღვრება: x კვანძსა და e რკალს **ინციდენტურს** უწოდებენ, თუ e შედის x-ში ან გამოდის x-დან.

განსაზღვრება: კვანძებს **მოსაზღვრე** ეწოდება, თუ ისინი ერთისა და იმავე რკალის ინციდენტურია, ე.ი. თუ ერთ-ერთი მათ შორის მეორე კვანძის მშობელია.

განსაზღვრება: **მარშრუტი** - კვანძებისა და რკალების მიმდევრობაა, რომელშიც ისინი ერთმანეთს ენაცვლება და ნებისმიერი ორი მეზობელი ელემენტი ინციდენტურია.

განსაზღვრება: ორ კვანძს **ბმული** ეწოდება, თუ მათ შორის მარშრუტი არსებობს.

განსაზღვრება: **გზა** რკალების ისეთი მიმდევრობაა, რომელშიც ერთი რკალის ბოლო მეორე რკალის სათავეა.

განსაზღვრება: მიმართული აციკლური G გრაფის კვანძთა **ტოპოლოგიური ნუმერაცია** ეწოდება ნებისმიერ $\sigma:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$ გადაადგილებას, რომელსაც მშობლებთან შესაბამისაბაში მოჰყავს შვილებზე უფრო მცირე ნომერი, ე.ი. თუ $x_j\in P\left(x_j\right)$, მაშინ $\sigma(i)<\sigma(j)$.

თეორემა 1: ყოველი მიმართული აციკლური $G=(N,E)$ გრაფისათვის არსებობს ტოპოლოგიური ნუმერაცია.

მტკიცება: ჯერ ნებისმიერად ვნომრავთ ყველა კვანძს, რომლებსაც არ გააჩნია მშობლები (ასეთი კვანძები არის, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში იარსებებდა უსასრულო სიგრძის მიმდევრობები კვანძების სასრული რიცხვით, ეს იგი გრაფში იქნებოდა ციკლები). ასეთნაირად გადანომრილი კვანძების სიმრავლე აღვნიშნოთ $L_1:=\left\{x\in N \mid P\left(\{x\}\right)=\varnothing\right\}$ ფორმით. თუ $N\setminus L_1\neq\varnothing$, მაშინ ნებისმიერად ვნომრავთ $L_2:=\left\{x\in N\setminus L_1 \mid P\left(\{x\}\right)\subset L_1\right\}$ სიმრავლის ელემენტებს - ესე იგი კვანძებს მშობლებით მხოლოდ $L_1\cdot L_2\neq\varnothing$ სიმრავლიდან, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში ყველა კვანძს $N\setminus L_1$ -დან ეყოლებოდა მშობლები იმავე $N\setminus L_1$ სიმრავლეში და, მაშასადამე, $N\setminus L_1$-ში

ISSN 1512-1232

იარსებებდა უსასრულო სიგრძის გზები და, მაშასადამე, ციკლები. იტერაციულად, თუ $N \backslash \bigcup_{i=1}^{k-1} L_i \neq \varnothing$, მაშინ k-ურ ბიჯზე ვნომრავთ კვანძებს $L_k := \left\{ x \in N \backslash \bigcup_{i=1}^{k-1} L_i \mid P\left(\{x\}\right) \subset \bigcup_{i=1}^{k-1} L_i \right\}$ სიმრავლიდან, ესე იგი ყველა იმ კვანძის სიმრავლეს, რომელთა მშობლები მხოლოდ უკვე დანომრილ $L_1, \ldots, L_{k-1}$ სიმრავლეებში იმყოფება. L_2 სიმრავლე $L_2 \neq \varnothing$ პირობას აკმაყოფილებს, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში ყველა კვანძისათვის $N \backslash \bigcup_{i=1}^{k-1} L_i$-დან მშობლები იარსებებდა იმავე $N \backslash \bigcup_{i=1}^{k-1} L_i$ სიმრავლიდან, რაც $N \backslash \bigcup_{i=1}^{k-1} L_i$ სიმრავლეში ციკლების არსებობის მანიშნებელი იქნებოდა. ამრიგად, $p <= n$ ბიჯის შემდეგ ვიღებთ წყვილ-წყვილად გადაუკვეთელ $L_1, \ldots, L_p$ სიმრავლეთა ნაკრებს, რომლისთვისაც $N = \bigcup_{i=1}^{p} L_i$. მოცემული ალგორითმი გარანტირებულად ნომრავს ჯერ მშობლებს, ხოლო შემდეგ - შვილებს. მართლაც, დავუშვათ, რომ $x_i \in L_k$ კვანძი $x_j \in L_m$ კვანძის მშობელია. აგების თანახმად, L_m-ში მყოფი კვანძების ყველა მშობელი და მათ შორის x_j კვანძის ყველა მშობელიც, იმყოფება $\bigcup_{i=1}^{m-1} L_i$-ში, მაშასადამე, $x_i \in \bigcup_{i=1}^{m-1} L_i$, ამრიგად, $L_k \subset \bigcup_{i=1}^{m-1} L_i$, ე.ი. $k < m$. ეს ნიშნავს, რომ ჯერ გადაინომრა ყველა კვანძი L_k-დან, ხოლო შემდეგ - ყველა კვანძი L_m-დან, ე.ი. $\sigma(i) < \sigma(j)$.

თეორემა 2: ყოველი მიმართული აციკლური $G = (N, E)$ გრაფის, $x \in N$ კვანძისა და კვანძების $Y = \{y_1, \ldots, y_k\} \subset N$ სიმრავლისათვის, რომელიც არ შეიცავს x-ს და x-ის შთამომავლებს, ე.ი. $x \notin Y, Y \cap D(\{x\}) = \varnothing$, არსებობს კვანძების ტოპოლოგიური ნუმერაცია, ისეთი, რომ ნომრებს Y სიმრავლიდან აქვს უფრო ნაკლები მნიშვნელობა, ვიდრე x კვანძის ნომერს, ესე იგი $\sigma(y_i) < \sigma(x), \forall y_i \in Y$.

მტკიცება:

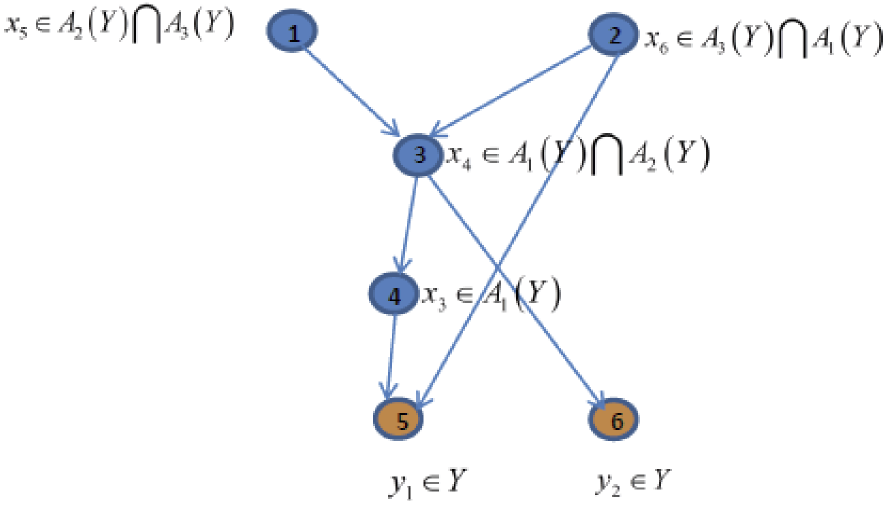
ეტაპი 1.

ავაგოთ თანამიმდევრობით ყველა დონის წინაპართა სიმრავლეები კვანძებისათვის Y სიმრავლიდან: $A_1(Y), \ldots, A_n(Y)$ (ამ სიმრავლეებს შეიძლება გააჩნდეს არაცარიელი გადაკვეთა, რადგან ნებისმიერი კვანძისათვის გამორიცხული არ არის რამდენიმე მშობელი და ამიტომ სხვადასხვა სიგრძის რამდენიმე გზა ერთი კვანძიდან მეორემდე). ვინაიდან ნებისმიერ შემთხვევაში G გრაფი აციკლურია, ამიტომ არსებობს რაღაც $p <= n$ რიცხვი, რომლისთვისაც $p+1$ დონის შთამომავალთა სიმრავლე ცარიელია, ესე იგი $A_{p+1}(Y) = \ldots = A_n(Y) = \varnothing$.

ნებისმიერად გადავნომროთ ჯერ $A_p(Y)$-ში შემავალი კვანძები, ხოლო შემდეგ - გადაუნომრავი კვანძები, რომლებიც შედის $A_{p-1}(Y)$-ში და ასე შემდეგ $A_i(Y)$-მდე და Y-მდე. ამრიგად, თუ კვანძი შედის რამდენიმე $A_s(Y)$ და $A_l(Y), s < l$ სიმრავლეში, მისი დანომვრა ხდება იმ კვანძთა ნუმერაციის ფარგლებში, რომლებიც მიეკუთვნება უფრო დიდი l ინდექსით მონიშნულ სიმრავლეს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ყოველი კვანძი ინომრება ამ კვანძიდან Y სიმრავლისადმი მიმავალი მაქსიმალური გზის

ISSN 1512-1232

სიგრძის მიხედვით. ნუმერაციის ასეთი ხერხის გამოყენებისას ყოველი შვილის ნომერი მისი მშობლის ნომერზე მეტი იქნება. მართლაც, დავუშვათ, რომ დანომრილი w კვანძი დანომრილი v კვანძის მშობელია. მაშინ w-დან Y-მდე მაქსიმალური გზის სიგრძე v კვანძიდან Y-მდე მაქსიმალური გზის სიგრძეზე მეტი იქნება. ეს იმას ნიშნავს, რომ w-ს უფრო ადრე მიენჭება ნომერი, ვიდრე v-ს, ესე იგი $\sigma(w)<\sigma(v)$.



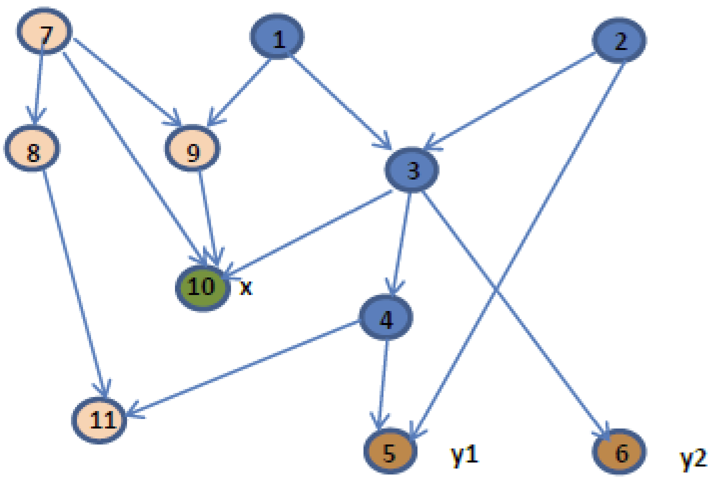
ნახ.3 კვანძების ტოპოლოგიური ნუმერაციის პირველი ილუსტრაცია

მაშასადამე, ჩვენ განვახორციელეთ $A(Y)$-დან კვანძების ტოპოლოგიური ნუმერაცია. Y-ის წინაპრებს შორის არ შეიძლება იყოს x კვანძი, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში თუნდაც ერთი კვანძი Y-დან იქნებოდა x-ის შთამომავალი. ამიტომ x კვანძი ამ ეტაპზე ჯერ დაუნომრავი რჩება.

ეტაპი 2.

შემდეგ ვნომრავთ ყველა დაუნომრავ კვანძს პირველ თეორემაში მოცემული ალგორითმით: ჯერ პირველ ბიჯზე ვნომრავთ ყველა დაუნომრავ კვანძს გრაფის პირველ დონიდან - უმშობლო კვანძებს. შემდეგ, იტერაციულად i -ურ ბიჯძე ვნომრავთ დაუნომრავ კვანძებს მშობლებით მხოლოდ უკვე გადანომრილი კვანძების რიცხვიდან, რომლებიც გრაფის უფრო დაბალ დონეებს მიეკუთვნება, ე.ი. რომელთა მშობლები იმყოფება დონეებზე 1-დან $(i-1)$-ის ჩათვლით. ამრიგად, ვმოძრაობთ გრაფში «ქვევით» და არ შეიძლება «წავაწყდეთ» ვითარებას, როცა ვნომრავთ რომელიმე t კვანძს უკვე ნაკლები s რიცხვით დანომრილი შვილით. ეს იმიტომ, რომ ამ შემთხვევაში s კვანძი დანომრილი აღმოჩნდებოდა Y წინაპრების ნუმერაციის პირველსავე ეტაპზე, ესე იგი s იქნებოდა Y-ის წინაპარი - $Y: s \in A(\mathrm{Y})$, და, მაშასადამე, t ასევე იქნებოდა Y-ის წინაპარი - $Y: t \in A(\mathrm{Y})$, ესე იგი t დანომრილი იქნებოდა უკვე პირველ ეტაპზე. ამროგად, ვიღებთ გრაფის ტოპოლოგიურ ნუმერაციას, რომლის დროსაც x კვანძის ნომერი მეტია ყველა ნომერზე Y სიმრავლიდან.

ISSN 1512-1232



ნახ.4 კვანძების ტოპოლოგიური ნუმერაციის მეორე ილუსტრაცია

განსაზღვრება: დავუშვათ, რომ Ω არის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე, ხოლო A წარმოადგენს $\sigma-$ალგებრას ამ სიმრავლეზე. დავუშვათ ასევე, რომ $\varsigma\left(\{1,\ldots,r_i\}\right)$ არის $\sigma-$ალგებრა $\{1,\ldots,r_i\}$-ზე და წარმოადგენს $\{1,\ldots,r_i\}$-დან შედგენილი ყველა სიმრავლის ერთობლიობას.

ამის შემდეგ დავუშვათ, რომ $X_i:(\Omega,A)\to\left(\{1,\ldots,r_i\},\zeta\left(\{1,\ldots,r\}\right)\right); i=1,\ldots,n$ არის შემთხვევით სიდიდეთა იმ განზომადი ფუნქციების ოჯახი, რომლებიც განსაზღვრულია ხდომილობათა Ω სიმრავლეზე და ამასთან ერთად მნიშნელობებით $Val\left(X_i\right)=\{1,\ldots,r_i\}$-ში.

4. ბაიესური ქსელი

განსაზღვრება: ბაიესურ ქსელად მიიჩნევა ნებისმიერი მიმართული აციკლური $G(N,E)$ გრაფი $X_1,\ldots,X_n$ შემთხვევით სიდიდეთა სიმრავლის შესაბამისი კვანძებით, ესე იგი $N=\{X_1,\ldots,X_n\}$.

განვსაზღვროთ $r_1\ldots r_n$ განზომილების ვექტორთა პარამეტრული სიმრავლე:

$$\Theta:\left\{\theta=\left(\theta_{k_1\ldots k_n}\mid k_i\in\{1,\ldots,r_i\}\right)\in\mathbf{R}^{r_1\ldots r_n}\mid\theta_{k_1\ldots k_n}>0,\quad\sum_{k_1=1}^{r_1}\cdots\sum_{k_n=1}^{r_n}\theta_{k_1\ldots k_n}=1\right\}.$$

ყოველი $\theta\in\Theta$ სიდიდისათვის შემოვიღოთ ალბათობის განაწილება სიმრავლეზე $\{1,\ldots,r_1\}\times\ldots\times\{1,\ldots,r_n\}$ როგორც

$$P_\theta\left(X_1=k_1,\ldots,X_n=k_n\right):=\theta_{k_1,\ldots,k_n}.$$

ყოველგვარი დამატებითი დაშვების გარეშე $\theta-$ს განზომილება, რომელიც $\#\theta$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ, შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$\#\theta=\prod_{i=1}^{n}r_i-1.$$

ISSN 1512-1232

4.1 ჰიპოთეზა პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ

განსაზღვრება: ბაიესური ქსელის შესაბამისი ჰიპოთეზა პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ წარმოადგენს დაშვებას, რომ ყოველი x კვანძი, x-ის მშობლების მნიშვნელობათა ცოდნისას, პირობითად დამოკიდებული არ არის არც ერთი Y სიმრავლისგან, რომელიც არ შეიცავს x-სა და x-ის შთამომავლებს.

ჰიპოთეზა პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ G_{ind} სიმბოლოთი აღვნიშნოთ, ხოლო გარკვეული პარამეტრების სიმრავლე, რომლებიც ამ ჰიპოთეზას აკმაყოფილებს, $\Theta_{G_{ind}} \subset \Theta$ ფორმით ავსახოთ. მაშასადამე, ჰიპოთეზას პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ ფორმალურად შემდეგი სახე აქვს:

$$\left.\begin{aligned} & P_\theta\left(X_i, Y \mid P\left(X_i\right)\right) = P_\theta\left(X_i \mid P\left(X_i\right)\right) P_\theta\left(Y \mid P\left(X_i\right)\right) \\ & \forall \theta \in \Theta_{G_{ind}}, \forall Y \subset \left\{X_1, \ldots, X_n\right\} \setminus \left\{X_i\right\}, Y \bigcap D(X_i) = \varnothing \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

თეორემა 3: თუ სამართლიანია ჰიპოთეზა პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ, მაშინ კვანძების ნებისმიერი ტოპოლოგიური ნუმერაციისათვის სამართლიანია:

$$P_\theta\left(X_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1}\right) = P_\theta\left(X_i \mid P\left(X_i\right)\right), \forall \theta \in \Theta_{G_{ind}}, \forall i \in \left\{1, \ldots, n\right\}. \tag{2}$$

მტკიცება:

ტოპოლოგიური ნუმერაციის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ შვილის ნომერი ყოველთვის აღემატება მისი მშობლების ნომერს, ამიტომ i მეტია $P\left(X_i\right)$-დან აღებული ნებისმიერი კვანძის ნომერზე, მაშასადამე, $P\left(X_i\right) \subset \left\{X_1, \ldots, X_{i-1}\right\}$. შემდეგ: $Y : \left\{X_1, \ldots, X_{i-1}\right\} \setminus P\left(X_i\right)$ სიმრავლე არ შეიძლება შეიცავდეს X_i-ის შთამომავლებს, რადგან შთამომავლებს აქვს უფრო დიდი ნომერი, ვიდრე i მნიშვნელობაა, ამრიგად, $Y \bigcap D\left(X_i\right) = \varnothing$. ვიღებთ:

$$P_\theta\left(X_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1}\right) = P_\theta\left(X_i \mid P\left(X_i\right), Y\right) = \frac{P_\theta\left(X_i, Y \mid P\left(X_i\right)\right)}{P_\theta\left(Y \mid P\left(X_i\right)\right)}.$$

პირობითი დამოუკიდებლობის [1] ჰიპოთეზის გათვალისწინებით:

$$P_\theta\left(X_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1}\right) = \frac{P_\theta\left(X_i \mid P\left(X_i\right)\right) P_\theta\left(Y \mid P\left(X_i\right)\right)}{P_\theta\left(Y \mid P\left(X_i\right)\right)} = P_\theta\left(X_i \mid P\left(X_i\right)\right).$$

4.2 ჰიპოთეზა ფაქტორიზაციის შესახებ

განსაზღვრება: ჰიპოთეზა ფაქტორიზაციის შესახებ, რომელიც შეესაბამება ბაიესურ ქსელს, წარმოადგენს ვარაუდს, რომ ერთობლივი ალბათობა არის თითოეული კვანძის პირობითი ალბათობების ნამრავლი მშობელთა ცნობილი მნიშვნელობებისას:

$$P_\theta\left(X_1, \ldots, X_{i-1}\right) = \prod_{i=1}^{n} P_\theta\left(X_i \mid P\left(X_i\right)\right), \quad \forall \theta \in \Theta_{G_{ind}}. \tag{3}$$

ფაქტორიზაციის ჰიპოთეზა აღვნიშნოთ G_{fact} სიმბოლოთი, ხოლო ჰიპოთეზას ფაქტორიზაციის შესახებ $\Theta_{G_{fact}} \subset \Theta$ სახე მივცეთ.

ISSN 1512-1232

თეორემა 4: ჰიპოთეზიდან პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ გამომდინარეობს ჰიპოთეზა ფაქტორიზაციის შესახებ, ესე იგი

$$G_{ind} \Rightarrow G_{fact}.$$

მტკიცება:

დავუშვათ, რომ სრულდება ჰიპოთეზა პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ, ესე იგი

$$\theta \in \Theta_{G_{ind}}.$$

მაშინ მესამე თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ კვანძების ნებისმიერი ტოპოლოგიური ნუმერაციისათვის სამართლიანია:

$$P_\theta\left(X_i \mid X_1,\ldots,X_{i-1}\right) = P_\theta\left(X_i \mid P\left(X_i\right)\right), \forall i \in \{1,\ldots,n\}.$$

პირობითი ალბათობის სიმკვრივის განმარტებიდან კვანძების ნებისმიერი ტოპოლოგიური ნუმერაციისათვის სამართლიანია:

$$P_\theta\left(X_1,\ldots,X_{i-1}\right) = \prod_{i=1}^{n} P_\theta\left(X_i \mid X_1,\ldots,X_{i-1}\right).$$

ამ ორი ტოლობის კომბინირებით ვიღებთ:

$$P_\theta\left(X_1,\ldots,X_{i-1}\right) = \prod_{i=1}^{n} P_\theta\left(X_i \mid P\left(X_i\right)\right).$$

მაშასადამე, სრულდება ჰიპოთეზა ფაქორიზაციის შესახებ, სხვანაირად :

$$\theta \in \Theta_{G_{fact}}.$$

თეორემა 5: ჰიპოთეზიდან ფაქტორიზაციის შესახებ კვანძების ნებისმიერი ტოპოლოგიური ნუმერაციისათვის გამომდინარეობს მე-(2) ტოლობა:

$$P_\theta\left(X_i \mid X_1,\ldots,X_{i-1}\right) = P_\theta\left(X_i \mid P\left(X_i\right)\right), \forall \theta \in \Theta_{G_{ind}}, \forall i \in \{1,\ldots,n\}.$$

მტკიცება:

გადავნომროთ ქსელის კვანძები რაღაც ტოპოლოგიური ნუმერაციით. პირობითი ალბათობის განმარტებიდან კვანძების ნებისიერი ნუმერაციისათის გვექნება:

$$P_\theta\left(X_1,\ldots,X_n\right) = \prod_{i=1}^{n} P_\theta\left(X_i \middle| X_1,\ldots,X_{i-1}\right). \tag{4}$$

რადგან $\theta \in \Theta_{G_{fact}}$, ამიტომ

$$P_\theta\left(X_1,\ldots,X_n\right) = \prod_{i=1}^{n} P_\theta\left(X_i \middle| P\left(X_i\right)\right). \tag{5}$$

იმის გამო, რომ ნუმერაცია ტოპოლოგიურია, პირველი კვანძს არ შეიძლება გააჩნდეს მშობლები, ესე იგი $P\left(X_1\right) = \varnothing$ და, მაშასადამე,

$$P_\theta\left(X_1\right) = P_\theta\left(X_1 \mid P\left(X_1\right)\right). \tag{6}$$

ISSN 1512-1232

შემდეგ, ვინაიდან $i+1,\ldots,n$ კვანძები არ შეიძლება შედიოდეს $i-$ური კვანძის მშობელთა სიმრავლეში, ამიტომ მე-(4) და მე-(5) ტოლობათა შეკრებისას კვანძების ყველა მნიშვნელობისათვის მესამედან $n-$მდე, ვღებულობთ შესაბამისად:

$$\left.\begin{aligned}
&P_\theta\left(X_1,X_2\right)=\sum_{X_3}\ldots\sum_{X_n}P_\theta\left(X_1,\ldots,X_n\right)\underset{(4)}{=}\sum_{X_3}\ldots\sum_{X_n}\prod_{i=1}^{n}P_\theta\left(X_i\mid X_1,\ldots,X_n\right)=\\
&=P_\theta\left(X_1\right)P_\theta\left(X_2\mid X_1\right)\sum_{X_3}P_\theta\left(X_3\mid X_2,X_1\right)\ldots\underbrace{\sum_{X_n}P_\theta\left(X_n\mid X_1,\ldots,X_{n-1}\right)}_{=1}=\\
&=P_\theta\left(X_1\right)P_\theta\left(X_2\mid X_1\right)\sum_{X_3}P_\theta\left(X_3\mid X_2,X_1\right)\ldots\underbrace{\sum_{X_{n-1}}P_\theta\left(X_{n-1}\mid X_1,\ldots,X_{n-2}\right)}_{=1}=\\
&=\ldots=P_\theta\left(X_1\right)P_\theta\left(X_2\mid X_1\right)\underbrace{\sum_{X_n}P_\theta\left(X_3\mid X_2,X_1\right)}_{=1}=P_\theta\left(X_1\right)P_\theta\left(X_2\mid X_1\right)
\end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}
&P_\theta\left(X_1,X_2\right)=\sum_{X_3}\ldots\sum_{X_n}P_\theta\left(X_1,\ldots,X_n\right)\underset{(5)}{=}\sum_{X_3}\ldots\sum_{X_n}\prod_{i=1}^{n}P_\theta\left(X_i\mid P\left(X_i\right)\right)=\\
&=P_\theta\left(X_1\right)P_\theta\left(X_2\,\middle|\,\underbrace{P\left(X_2\right)}_{X_3,\ldots,X_n\notin P(X_2)}\right)\sum_{X_3}P_\theta\left(X_3\,\middle|\,\underbrace{P\left(X_3\right)}_{X_4,\ldots,X_n\notin P(X_3)}\right)\ldots\underbrace{\sum_{X_n}P_\theta\left(X_n\mid P(X_n)\right)}_{=1}=\\
&=P_\theta\left(X_1\right)P_\theta\left(X_2\mid P(X_2)\right)\sum_{X_3}P_\theta\left(X_3\mid P(X_3)\right)\ldots\underbrace{\sum_{X_{n-1}}P_\theta\left(X_{n-1}\mid P(X_{n-1})\right)}_{=1}=\\
&=\ldots=P_\theta\left(X_1\right)P_\theta\left(X_2\mid P(X_2)\right)\underbrace{\sum_{X_n}P_\theta\left(X_3\mid P(X_3)\right)}_{=1}=P_\theta\left(X_1\right)P_\theta\left(X_2\mid X_2\right)
\end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

მე-(7) და მე-(8) ფორმულებიდან კი მიიღება:

$$P_\theta\left(X_1\right)P_\theta\left(X_2\mid X_1\right)=P_\theta\left(X_1\right)P_\theta\left(X_2\mid P\left(X_2\right)\right).$$

მაშასადამე:

$$P_\theta\left(X_2\mid X_1\right)=P_\theta\left(X_2\mid P\left(X_2\right)\right). \tag{9}$$

ანალოგიურად, მე-(4) და მე-(5) ტოლობათა შეკრებისას კვანძების ყველა მნიშვნელობისათვის მეოთხედან $n-$მდე, ვღებულობთ შესაბამისად:

$$P_\theta\left(X_1\right)P_\theta\left(X_2\mid X_1\right)P_\theta\left(X_3\mid X_1,X_2\right)=P_\theta\left(X_1\right)P_\theta\left(X_2\mid P\left(X_2\right)\right)P_\theta\left(X_3\mid P\left(X_3\right)\right).$$

მაშასადამე, მე-(9) თანაფარდობის გათვალისწინებით:

$$P_\theta\left(X_3\mid X_1,X_2\right)=P_\theta\left(X_3\mid P\left(X_3\right)\right). \tag{10}$$

ამ ოპერაციის იტერაციულად გაგრძელებისას, მე-(4) და მე-(5) ტოლობათა შეკრებით კვანძების ყველა მნიშვნელობისათვის $(i+1)$-დან $n-$მდე, ვღებულობთ შესაბამისად:

$$P_\theta\left(X_i\mid X_1,\ldots,X_{i-1}\right)=P_\theta\left(X_i\mid P\left(X_i\right)\right).$$

თეორემა 6: ჰიპოთეზიდან ფაქტორიზაციის შესახებ გამომდინარეობს ჰიპოთეზა პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ, ესე იგი

$$G_{fact} \Rightarrow G_{ind}.$$

მტკიცება:

დავუშვათ, რომ სრულდება ჰიპოთეზა ფაქტორიზაციის შესახებ, ესე იგი

$$\theta \in \Theta_{G_{fact}}.$$

დავუშვათ ასევე, რომ Y გარკვეული კვანძების სიმრავლეა და იგი არ შეიცავს X კვანძსა და მის შთამომავლებს. ჩვენ უნდა ვუჩვენოთ, რომ X პირობითად დამოუკიდებელია Y-გან, როცა ცნობილია X-ის მშობელთა მნიშვნელობა.

მეორე თეორემის თანახმად არსებობს კვანძების ტოპოლოგიური ნუმერაცია, რომლის დროსაც Y-ში შემავალი ყველა ელემენტის ნომრები $X = X_i$ კვანძის ნომერზე ნაკლები იქნება. მაშასადამე, $Y \subset \{X_1,\dots,X_n\}$. რადგან ნუმერაცია ტოპოლოგიურია, ამიტომ $P(X_i) \subset \{X_1,\dots,X_n\}$. ამასთან ერთად შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$Z := \{X_1,\dots,X_{i-1}\} \setminus \left(P(X_i) \cup Y\right).$$

მეხუთე თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ კვანძების ნებისმიერი ტოპოლოგიური ნუმერაციისათვის სამართლიანია:

$$P_\theta\left(X_i \mid X_1,\dots,X_{i-1}\right) = P_\theta\left(X_i \mid P(X_i)\right).$$

მაშასადამე,

$$P_\theta\left(X_1,\dots,X_i\right) P_\theta\left(P(X_i)\right) = P_\theta\left(X_i, P(X_i)\right) P_\theta\left(X_1,\dots,X_{i-1}\right). \tag{11}$$

მე-(11) გამოსახულების შეკრებისას Z-დან აღებული ცვლადების ყველა მნიშნელობით, მივიღებთ:

$$P_\theta\left(P(X_i),Y,X_i\right) P_\theta\left(P(X_i)\right) = P_\theta\left(X_i, P(X_i)\right) P_\theta\left(P(X_i),Y\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_\theta\left(X_i \mid P(X_i),Y\right) = P_\theta\left(X_i \mid P(X_i)\right).$$

ამრიგად, სრულდება ჰიპოთეზა პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ, ე.ი. $\theta \in \Theta_{G_{ind}}$.

მე-4 და მე-6 თეორემებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი წინადადება:

თეორემა 7: ერთისა და იმავე ბაიესური ქსელის შესაბამისი ჰიპოთეზა პირობითი დამოუკიდებლობისა და ჰიპოთეზა ფაქტორიზაციის შესახებ ემთხვევა ერთმანეთს, ესე იგი:

$$G_{fact} \Leftrightarrow G_{ind} \text{ ან } G_{ind} \Leftrightarrow G_{fact}.$$

4.3 ჰიპოთეზა განცალკევების შესახებ

განსაზღვრება: ნებისმიერი წყვილად გადაუკვეთელი $X,Y,Z \subset N$ სიმრავლეებისათვის ჩვენ ვუწოდებთ G **ჰიპოთეზის შესაბამის თეორემად პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ** $I_G(X,Y \mid Z)$ გამოსახულებას იმ შემთხვევაში, თუ

ISSN 1512-1232

$$P_\theta\left(X,Y,Z\right)P_\theta\left(Z\right)=P_\theta\left(X,Z\right)P_\theta\left(Y,Z\right),\forall\theta\in\Theta_G. \qquad (12)$$

აქ $\Theta_G\subset\Theta$ გარკვეული პარამეტრების სიმრავლეა, რომლებიც შეესაბამება G ჰიპოთეზით დადებულ შეზღუდვებს.

რადგან ალბათური ზომა ჩვენი პირობით მკაცრად დადებითია, ე.ი. $P_\theta\left(Z\right)>0$ ყველა Z -სათვის, ამიტომ მე-(12) გამოსახულება მე-(13) გამოსახულების ეკვივალენტურია:

$$I_G\left(X,Y\,|\,Z\right)\Leftrightarrow P_\theta\left(X,Y\,|\,Z\right)=P_\theta\left(X\,|\,Z\right)P_\theta\left(Y\,|\,Z\right),\quad\forall\theta\in\Theta_G. \qquad (13)$$

განსაზღვრება: ნებისმიერი წყვილად გადაუკვეთელი $X,Y\subset N$ სიმრავლეებისათვის ჩვენ ვუწოდებთ G **ჰიპოთეზის შესაბამის თეორემად უპირობო დამოუკიდებლობის შესახებ** $I_G\left(X,Y\,|\,\varnothing\right)$ გამოსახულებას იმ შემთხვევაში, თუ

$$I_G\left(X,Y\,|\,\varnothing\right)\Leftrightarrow P_\theta\left(X,Y\right)=P_\theta\left(X\right)P_\theta\left(Y\right),\quad\forall\theta\in\Theta_G. \qquad (14)$$

თეორემა უპირობო დამოუკიდებლობის შესახებ, ცხადია, წარმოადგენს პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ თეორემის კერძო შემთხვევას დამატებითი $Z=\varnothing$ შეზღუდვის შემოტანისას.

უშუალოდ პირობითი დამოუკიდებლობის თვისებებიდან მიიღება:

თეორემა 7: წყვილად გადაუკვეთელი X,Y,Z,W სიმრავლეებისათვის გამომდინარეობს:

1. ტრივიალური დამოუკიდებლობა

$$I_G\left(X,\varnothing\,|\,Z\right), \qquad (15)$$

2. სიმეტრია

$$I_G\left(X,Y\,|\,Z\right)\Leftrightarrow I_G\left(Y,X\,|\,Z\right), \qquad (16)$$

3. დაშლა

$$I_G\left(X,Y\cup W\,|\,Z\right)\Leftrightarrow I_G\left(X,Y\,|\,Z\right)\wedge I_G\left(X,W\,|\,Z\right), \qquad (17)$$

4. სუსტი გაერთიანება

$$I_G\left(X,Y\cup W\,|\,Z\right)\Leftrightarrow I_G\left(X,Y\,|\,Z\cup W\right)\wedge I_G\left(X,W\,|\,Z\cup Y\right), \qquad (18)$$

5. შეკუმშვა

$$I_G\left(X,Y\,|\,Z\right)\wedge I_G\left(X,W\,|\,Z\cup Y\right)\Rightarrow I_G\left(X,Y\cup W\,|\,Z\right); \qquad (19)$$

მკაცრად დადებითი ალბათური ზომებისათვის სამართლიანია ასევე

6. გადაკვეთა

$$I_G\left(X,Y\,|\,Z\cup W\right)\wedge I_G\left(X,W\,|\,Z\cup Y\right)\Rightarrow I_G\left(X,Y\cup W\,|\,Z\right). \qquad (19')$$

მტკიცება:

მაგალითისათვის დავამტკიცოთ მე-(19) ტოლობა:

$$I_G\left(X,Y\,|\,Z\right)\Rightarrow P_\theta\left(X,Y,Z\right)P_\theta\left(Z\right)=P_\theta\left(X,Z\right)P_\theta\left(Y,Z\right), \qquad (*)$$

$$\begin{aligned} &I_G\left(X,W \mid Z\cup Y\right) \Rightarrow P_\theta\left(X,W,Z\cup Y\right)P_\theta\left(Z\cup Y\right) = P_\theta\left(X,Z\cup Y\right)P_\theta\left(W,Z\cup Y\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow P_\theta\left(X,W,Z,Y\right)P_\theta\left(Z,Y\right) = P_\theta\left(X,Z,Y\right)P_\theta\left(W,Z,Y\right) \end{aligned} \quad . \qquad (**)$$

მივიღებთ:

$$\begin{aligned} &P_\theta\left(X,Y\cup W,Z\right)P_\theta\left(Z\right) = P_\theta\left(X,Y,W,Z\right)P_\theta\left(Z\right) = \frac{P_\theta\left(X,Z,Y\right)P_\theta\left(W,Z,Y\right)}{P_\theta\left(Z,Y\right)}P_\theta\left(Z\right) = \\ &= P_\theta\left(X,Y,Z\right)P_\theta\left(Z\right)\frac{P_\theta\left(W,Z,Y\right)}{P_\theta\left(Z,Y\right)} = P_\theta\left(X,Z\right)P_\theta\left(Y,Z\right)\frac{P_\theta\left(W,Z,Y\right)}{P_\theta\left(Z,Y\right)} = \\ &= P_\theta\left(X,Z\right)P_\theta\left(W,Z,Y\right) = P_\theta\left(X,Z\right)P_\theta\left(Z,Y\cup W\right). \end{aligned}$$

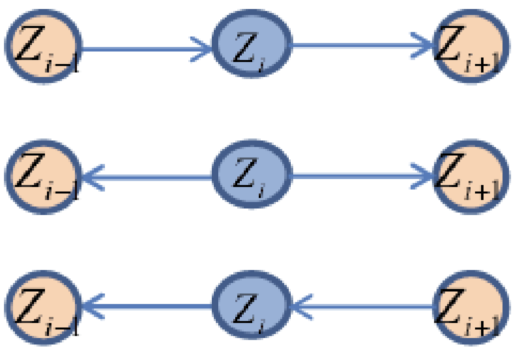
საბოლოოდ,

$$P_\theta\left(X,Y\cup W,Z\right)P_\theta\left(Z\right) = P_\theta\left(X,Z\right)P_\theta\left(Y\cup W,Z\right) \Rightarrow I_G\left(X,Y\cup W \mid Z\right).$$

შემოვიტანოთ ბაიესური ქსელის შესაბამისი კიდევ ერთი ჰიპოთეზა. ამისათვის დაგვჭირდება რიგი განმარტებისა.

დავუშვათ, რომ მოცემულია მარშრუტი (ერთმანეთის ინციდენტური კვანძების თანამიმდევრობა): $R = \left\langle X, Z_1, \ldots, Z_k, Y \right\rangle$.

განსაზღვრება: ვამბობთ, რომ Z_i **კვანძის შესვლა** R **მარშრუტში პირველ ტიპს მიეკუთვნება**, თუ ხსენებულ მარშრუტში ამ კვანძის ინციდენტური ორი რკალიდან ერთ-ერთი მაინც გამოდის კვანძიდან. პირველი ტიპის შესვლა სიმბოლურად ასე აღინიშნება: $Z \in_1 R$.



ნახ.5 Z_i კვანძის ინციდენტური ორი რკალის ორიენტაციის სამი ვარიანტი ამ კვანძის პირველი ტიპის შესვლის დროს მარშრუტში

განსაზღვრება: ვამბობთ, რომ Z_i **კვანძის შესვლა** R **მარშრუტში მეორე ტიპს მიეკუთვნება**, თუ ხსენებულ მარშრუტში ამ კვანძის ინციდენტური ორივე რკალი შედის კვანძში. მეორე ტიპის შესვლა სიმბოლურად ასე აღინიშნება: $Z \in_2 R$.

ნახ.6 Z_i კვანძის ინციდენტური ორი რკალის ორიენტაციის ერთადერთი ვარიანტი ამ კვანძის მეორე ტიპის შესვლის დროს მარშრუტში

ISSN 1512-1232

პრინციპული განსხვავება პირველი და მეორე ტიპის შეერთებათა შორის საკმაოდ ცხადია. ბაიესური ქსელისათვის, სადაც მასში შემავალი სამი კვანძი მეხუთე ნახაზის შესაბამისად არის შეერთებული, განაპირა Z_{i-1} და Z_{i+1} კვანძები შეიძლება იყოს ერთმანეთზე დამოკიდებული, მაგრამ პირობითი დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზის შესაბამისად დამოუკიდებლობას იძენს, თუ ცნობილი ხდება Z_i კვანძის მნიშვნელობა. მართლაც, მაგალითად, ყველაზე ზედა გრაფიკისათვის მეხუთე ნახაზზე, Z_{i+1} კვანძი დამოკიდებული არ არის თავის არაშთამომავალზე (Z_{i-1} კვანძზე), როცა ცნობილია მშობლის (Z_i კვანძის) მნიშვნელობა. მაგალითის სახით შესაძლებელია Z_{i-1} კვანძის განხილვა ინვესტიციებად, Z_i კვანძის - ჩატარებულ გამოკვლევათა რიცხვად, ხოლო Z_{i+1} კვანძის - გამოვლენილ დაავადებათა რაოდენობად. ცხადია, რომ Z_{i-1} და Z_{i+1} დამოკიდებულია ერთმანეთზე Z_i კვანძის საშუალებით, ესე იგი რაც მეტია ინვესტიციები, მით მეტია გამოკვლევები და, ამრიგად, მით მეტია გამოვლენილი დაავადებები. მაგრამ, თუ ჩვენთვის უკვე ცნობილია ჩატარებულ გამოკვლევათა რიცხვი, მაშინ გამოვლენილ დაავადებათა რიცხვი უკვე დამოკიდებული არ არის ინვესტიციებზე, რომლებიც ჩაიდო ამ გამოკვლევებში. ანალოგიური მტკიცებები გამომდინარეობს დანარჩენი ორი გრაფიკისათვისაც ნახ.5-ზე. სრულიად სხვა სიტუაცია შეესაბამება მეორე ტიპით შეერთებას, რომელიც ნაჩვენებია ნახ.6-ზე. ამ შემთხვევაში Z_{i-1} და Z_{i+1} კვანძები დამოკიდებული არ არის ერთმანეთზე (Z_{i-1} კვანძი, როცა ცნობილია მისი მშობლები - ცარიელი სიმრავლე, დამოკიდებული არ არის თავის არაშთამომავალზე - Z_{i+1} კვანძზე, რაც ნიშნავს Z_{i-1}-ის უპირობო დამოუკიდებლობას Z_{i+1}-ზე). მაგრამ ჩვენ არაფერი შეგვიძლია ვთქვათ Z_{i-1}-ის პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ Z_{i+1}-ზე, როცა ცნობილია Z_i კვანძის მნიშვნელობა. ასე, მაგალითად, Z_{i-1} და Z_{i+1} კვანძები შეიძლება აღწერდეს ორ დამოუკიდებელ მიზეზს, ხოლო Z_i კვანძი - ამ მიზეზთა კომბინაციის გამოვლინების სიმპტომს. ამ შემთხვევაში მიზეზები შეიძლება ერთმანეთზე დამოკიდებული ხდებოდეს, როცა ცნობილია სიმპტომის მნიშვნელობა. მაგალითად, თუ Z_{i-1} არის ავტომობილის მუხრუჭების მდგომარეობა, ხოლო Z_{i+1} - გზების მდგომარეობა, მაშინ ეს ფაქტორები დამოუკიდებელია. მაგრამ, თუ Z_i აღწერს ავარიის ფაქტს და ცნობილია, რომ ავტომობილს ავარია მოუვიდა, მაშინ გზის მდგომარეობის ცოდნა საშუალებას იძლევა მეტი დამაჯერებლობით გავაკეთოთ დასკვნა მუხრუჭების მდგომარეობაზე: თუ გზა კარგი იყო, მაგრამ ავარია მაინც მოხდა, ალბათობა იმისა, რომ მუხრუჭები იყო გაუმართავი, იზრდება.

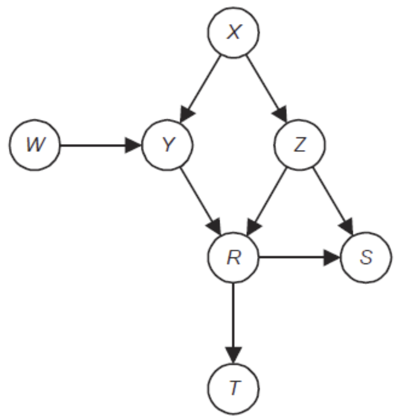
განსაზღვრება: ვთქვათ, რომ მოცემულია ორი $X, Y \in N$ განსხვავებული კვანძი, ამ კვანძების შემაერთებელი $R = \langle X, Z_1, \ldots, Z_k, Y \rangle$ მარშრუტი, ასევე $A \subset N$ სიმრავლე, რომელიც არ შეიცავს X -სა და Y -ს. ჩვენ ვიტყვით, რომ A **სიმრავლე ბლოკავს** R **მარშრუტს** X **და** Y **კვანძებს შორის**, თუ სრულდება ერთ-ერთი შემდეგი პირობა:

1. არსებობს Z კვანძი, რომელიც პირველი ტიპის წესით შედის R მარშრუტში და მიეკუთვნება A სიმრავლეს, ე.ი. $\exists Z \in_1 R : Z \in A$;

2. არსებობს Z კვანძი, რომელიც მეორე ტიპის წესით შედის R მარშრუტში და ამასთან ერთად არც თავად Z კვანძი და არც რომელიმე მისი შთამომავალი არ შედის A სიმრავლეში, ე.ი. $\exists Z \in_2 R : (Z \notin A) \wedge \left(D(\{Z\}) \bigcap A \neq \varnothing \right)$.

ISSN 1512-1232

მაგალითი 1: განვიხილოთ ნახ.7-ზე ნაჩვენები ბაიესური ქსელი, სადაც:



ნახ.7 ბაიესური ქსელის მაგალითი

1. $\langle Y, X, Z, S\rangle$ მარშრუტი არ იბლოკება $\{X\}$ სიმავლით, რადგან X შედის მარშრუტში შესვლის პირველი ტიპისათვის დამახასიათებელი წესით.

2. $\langle W, Y, R, Z, S\rangle$ მარშრუტი იბლოკება ცარიელი სიმავლით, რადგან R შედის მარშრუტში შესვლის მეორე ტიპისათვის დამახასიათებელი წესით და არც R და არც მისი ერთადერთი T შთამომავალი არ მიეკუთვნება მაბლოკირებელ ცარიელ სიმრავლეს.

3. $\langle W, Y, R, S\rangle$ მარშრუტი იბლოკება $\{R\}$ სიმავლით, რადგან R შედის მარშრუტში შესვლის პირველი ტიპისათვის დამახასიათებელი წესით.

4. $\langle W, Y, R, Z, S\rangle$ მარშრუტი არ იბლოკება $\{R\}$ სიმავლით, რადგან R შედის მარშრუტში შესვლის მეორე ტიპისათვის დამახასიათებელი წესით.

განსაზღვრება: ვთქვათ, რომ მოცემულია ორი X და Y კვანძი და A სიმრავლე. ჩვენ ვიტყვით, რომ A **სიმრავლე განაცალკევებს** X **და** Y **კვანძებს**, თუ იგი ბლოკავს ყველა მარშრუტს X და Y კვანძებს შორის.

მაგალითი 2: კვლავ დავუბრუნდეთ ნახ.7-ზე წარმოდგენილ ბაიესურ ქსელს.

1. X და Y კვანძები განცალკევებულია $\{Y, Z\}$ სიმრავლით იმიტომ, რომ $\langle X, Y, R\rangle$ მარშრუტი იბლოკება Y კვანძში, ხოლო $\langle X, Z, R\rangle$ მარშრუტი იბლოკება Z კვანძში.

2. X და T კვანძები განცალკევებულია $\{Y, Z\}$ სიმრავლით იმიტომ, რომ $\langle X, Y, R, T\rangle$ მარშრუტი იბლოკება Y კვანძში, ასევე $\langle X, Z, R, T\rangle$ მარშრუტი იბლოკება Z კვანძში, ხოლო $\langle X, Z, S, R, T\rangle$ მარშრუტი იბლოკება Z და S კვანძებში.

განსაზღვრება: დავუშვათ, რომ A, B და C არის მიმართული აციკლური G გაფის კვანძთა წყვილად გადაუკვეთელი სიმრავლეები. ჩვენ ვიტყვით, რომ C **სიმრავლე განაცალკევებს** A **და** B **სიმრავლეებს**, თუ იგი განაცალკევებს A და B სიმრავლეებში შემავალი კვანძების ყველა წყვილს. ამ განცალკევების ფაქტს $J_G(A, B|C)$ ფორმით აღნიშნავენ.

ISSN 1512-1232

მაგალითი 3: კიდევ ერთხელ განვიხილოთ ნახ.7-ზე მოცემული ბაიესური ქსელი. რადგან ყოველი მარშრუტი W და S, W და T, X და S, აგრეთვე X და T კვანძებს შორის იბლოკება $\{R,Z\}$ სიმრავლით, ამიტომ $J_G\left(\{W,X\},\{S,T\}\middle|\{R,Z\}\right)$.

შემდეგი თეორემიდან იღებენ სიმრავლეთა განცალკევების თვისებათა იმავე ნაკრებს, რომელთანაც საქმე აქვთ პირობითი დამოუკიდებლობისათვის.

თეორემა 9: წყვილად გადაუკვეთელი X,Y,Z,W სიმრავლეებისათვის გამომდინარეობს:

1. ტრივიალური განცალკევება

$$J_G\left(X,\varnothing \mid Z\right); \tag{20}$$

2. სიმეტრია

$$J_G\left(X,Y \mid Z\right) \Leftrightarrow J_G\left(Y,X \mid Z\right); \tag{21}$$

3. დაშლა

$$J_G\left(X,Y \cup W \mid Z\right) \Rightarrow J_G\left(X,Y \mid Z\right) \wedge J_G\left(X,W \mid Z\right); \tag{22}$$

4. სუსტი გაერთიანება

$$J_G\left(X,Y \cup W \mid Z\right) \Rightarrow J_G\left(X,Y \mid Z \cup W\right) \wedge J_G\left(X,W \mid Z \cup Y\right); \tag{23}$$

5. შეკუმშვა

$$J_G\left(X,Y \mid Z\right) \wedge J_G\left(X,W \mid Z \cup Y\right) \Rightarrow J_G\left(X,Y \cup W \mid Z\right); \tag{24}$$

6. გადაკვეთა

$$J_G\left(X,Y \mid Z \cup W\right) \wedge J_G\left(X,W \mid Z \cup Y\right) \Rightarrow J_G\left(X,Y \cup \mathrm{W} \mid Z\right). \tag{25}$$

მტკიცება:

დავამტკიცოთ მაგალითისათვის კვლავ (24)-ე ტოლობა. განვიხილოთ ნებისმიერი R მარშრუტი X და $Y \cup W$ სიმრავლეებს შორის. ეს მარშრუტი აკავშირებს ორ რომელიმე წერტილს ამ სიმრავლეთა შორის. შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1. R მარშრუტი აკავშირებს $x \in X$ და $y \in Y$ კვანძებს. $J_G\left(X,Y \mid Z\right)$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ R მარშრუტი იბლოკება Z სიმრავლით. ბლოკირების განმარტებიდან შესაძლებელია ორი ვარიანტი:

1.1. არსებობს $a \in_1 R$ კვანძი, რომელიც შედის R მარშრუტში შესვლის პირველი ტიპის წესით და ეს კვანძი ამავდროულად მიეკუთვნება Z სიმრავლეს. ამრიგად, Z **ბლოკავს** R **მარშრუტს**.

1.2. არსებობს $a \in_2 R$ კვანძი, რომელიც შედის R მარშრუტში შესვლის მეორე ტიპის წესით. ესე იგი არც იგი და არც მისი შთამომავლები არ შედის Z-ში. მაშასადამე, Z **ბლოკავს** R **მარშრუტს**.

2. R მარშრუტი აკავშირებს $x \in X$ და $w \in W$ კვანძებს. $J_G\left(X,W \mid Z \bigcup Y\right)$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ R მარშრუტი იბლოკება $Z \bigcup Y$ სიმრავლით. კვლავ იმავე ბლოკირების განმარტებიდან შესაძლებელია ორი ვარიანტი:

2.1. არსებობს $a \in_1 R$ კვანძი, რომელიც შედის R მარშრუტში შესვლის პირველი ტიპის წესით და ამავე დროს მიეკუთვნება $Z \bigcup Y$ სიმრავლეს. შესაძლებელია ორი ვარიანტი:

2.1.1. თუ $a \in Z$, მაშინ Z **ბლოკავს ამ მარშრუტს**.

2.1.2. თუ $a \in Y$, მაშინ შეიძლება განვიხილოთ $x \in X$ და $a \in Y$ კვანძების შემაერთებელი $R' \subset R$ ქვემარშრუტი და მივიღებთ უკვე ადრე შესწავლილ პირველ შემთხვევას, საიდანაც კეთდება დასკვნა: Z **ბლოკავს** R **მარშრუტს**.

2.2. არსებობს $a \in_2 R$ კვანძი, რომელიც შედის R მარშრუტში შესვლის მეორე ტიპის წესით და ამასთან ერთად არც იგი და არც მისი შთამომავლები არ შედის $Z \bigcup Y$ სიმრავლეში. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ არც იგი და არც მისი შთამომავლები არ შედის Z სიმრავლეში. მაშასადამე, Z **ბლოკავს** R **მარშრუტს**.

ამრიგად, ნებისმიერ შემთხვევაში, ჩვენ იმ დასკვნამდე მივდივართ, რომ Z ბლოკავს ყველა მარშრუტს ყველა წყვილს შორის X-დან და $Y \bigcup W$-დან, ესე იგი $J_G\left(X,Y \bigcup W \mid Z\right)$.

განსაზღვრება: ბაიესური G ქსელის შესაბამისი **ჰიპოთეზა განცალკევების შესახებ** ასახავს შემდეგ ვარაუდს: თუ კვანძთა წყვილად გადაუკვეთელ X, Y და Z სიმრავლე-თათვის სამართლიანია თეორემა X-სა და Y-ის განცალკევებაზე Z-ით, მაშინ X და Y პირობითად დამოუკიდებელია Z-ის ცნობილი მნიშვნელობების პირობებში.

ჰიპოთეზა განცალკევების შესახებ აღვნიშნოთ G_{sep} სახით, ხოლო იმ პარამეტრების სიმრავლე, რომლებიც ამ ჰიპოთეზას აკმაყოფილებს, - $\theta_{G_{sep}}$ სიმბოლოთი. განცალკევების შესახებ ჰიპოთეზის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$J_G\left(X,Y \mid Z\right) \Rightarrow I_\theta\left(X,Y \mid Z\right), \quad \forall \theta \in \theta_{G_{sep}}. \tag{26}$$

თეორემა 10: ჰიპოთეზიდან განცალკევების შესახებ გამომდინარეობს პირობითი დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზა, ე.ი $G_{sep} = G_{ind}$.

მტკიცება:

უნდა დავამტკიცოთ, რომ კვანძის მშობელთა სიმრავლე განაცალკევებს საკუთრივ კვანძს მისივე შთამომავლების სიმრავლისაგან. ამ შემთხვევაში, განცალკევების შესახებ ჰიპოთეზის თანახმად, ეს კვანძი დამოუკიდებელი იქნება არაშთამომავლებისგან მშობელთა მნიშნელობების ცოდნისას, რაც პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ ჰიპოთეზის სამართლიანობას დაადასტურებს.

დავუშვათ, რომ $x \in N$ - ნებისმიერი კვანძია; $Y := N \setminus \left(D\left(\{x\}\right) \bigcup \{x\} \bigcup P\left(\{x\}\right)\right)$- სიმრავლეა, რომელიც არ შეიცავს x-ს, x-ის მშობლებს და შთამომავლებს, ხოლო $Z := P\left(\{x\}\right)$- x-ის მშობლების სიმრავლეა. ამასთან ერთად X, Y და Z - წყვილად გადაუკვეთელი სიმრავლეები არის.

ISSN 1512-1232

თუ X-სა და Y-ს შორის არ არის მარშრუტი, მაშინ X-სა და Y-ს განაცალკევებს ნებისმიერი სიმრავლე, მათ შორის Z-იც, მაშასადამე, განცალკევების შესახებ თეორემის თანახმად, X და Y პირობითად დამოუკიდებელია Z-ის ცნობილი მნიშვნელობებისათვის, ანუ, სხვანაირად, $I_\theta\left(X,Y|Z\right), \forall\theta\in\Theta_{G_{sep}}$.

დავუშვათ, რომ R წარმოადგენს მარშრუტს x და $y\in Y$ კვანძებს შორის, ხოლო a არის x-ის მოსაზღვრე პირველი კვანძი. შესაძლებელია x და y კვანძებს შორის შეერთების შემდეგი ვარიანტები:

1. $x\leftarrow a$, ამ შემხვევაში a შედის R მარშრუტში პირველი ტიპის მიხედვით და a ასევე წარმოადგენს x-ის მშობელს, ე.ი. $a\in Z$. მაშასადამე, Z განაცალკევებს R მარშრუტს. თანახმად ჰიპოთეზისა განცალკევების შესახებ, $I_\theta\left(X,Y|Z\right), \forall\theta\in\Theta_{G_{sep}}$.

2. $x\rightarrow a$. აქ შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

2.1. ყველა მომდევნო შეერთებას R მარშრუტში აქვს შემდეგი სახე: $x\rightarrow a\rightarrow\ldots\rightarrow y$. ასეთ შემთხვევაში y არის x-ის შთამომავალი, რაც ეწინააღმდეგება y-ის არჩევას

$$y\in Y=N\setminus\left(D\left(\{x\}\right)\bigcup\{x\}\bigcup P\left(\{x\}\right)\right)\Rightarrow Y\bigcap D\left(\{x\}\right)=\varnothing\Rightarrow y\notin D\left(\{x\}\right).$$

2.2. მარშრუტში არის კვანძი მეორე ტიპის შეერთებით. დავუშვათ, რომ w - რიგით პირველი ასეთი კვანძია, ესე იგი $x\rightarrow a\rightarrow\ldots\rightarrow w\leftarrow\ldots y$. w კვანძი ან მისი შთამომავალი Z სიმრავლეში რომ ყოფილიყო, ესე იგი რომ ყოფილიყო x-ის მშობელი, მაშინ გრაფში იარსებებდა ციკლი x-დან w-საკენ, შემდეგ (შესაძლოა, შთამომავლების საშუალებით) x-ის მშობლისკენ, დაბოლოს, თავად x-საკენ. ამიტომ, არც თავად w და არც მისი შთამომავლები არ მიეკუთვნება Z სიმრავლეს, ესე იგი Z განაცალკევებს R მარშრუტს, ამიტომ $I_\theta\left(X,Y|Z\right), \forall\theta\in\Theta_{G_{sep}}$.

ჩვენ მივიღეთ, რომ ნებისმიერ შემთხვევაში $I_\theta\left(X,Y|Z\right), \forall\theta\in\Theta_{G_{sep}}$, ესე იგი

$$I_\theta\left(\{x\},N\setminus\left(D\left(\{x\}\right)\bigcup\{x\}\bigcup P\left(\{x\}\right)\right)|P\left(\{x\}\right)\right), \forall\theta\in\Theta_{G_{sep}}. \quad (27)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $I\left(X,Y|Z\right)\Rightarrow I\left(X,Y\bigcup Z|Z\right)$, მაშინ (27)-დან მივიღებთ:

$$I_\theta\left(\{x\},N\setminus\left(D\left(\{x\}\right)\bigcup\{x\}\right)|P\left(\{x\}\right)\right), \forall\theta\in\Theta_{G_{sep}}. \quad (28)$$

ამრიგად, (28) ნიშნავს, რომ ბაიესური ქსელის ყოველი კვანძი პირობითად დამოუკიდებელია თავისი არაშთამომავლებისგან, როცა ცნობილია მშობლების მნიშვნელობები. მაშასადამე სრულდება ჰიპოთეზა პირობითი დამოუკიდებობის შესახებ და ვღებულობთ, რომ $\Theta_{G_{sep}}\subset\Theta_{G_{ind}}$ ან $G_{sep}\Rightarrow G_{ind}$.

დაგვჭირდება კიდევ ერთი დამხმარე მათემატიკური წინადადება.

თეროემა 11: სუსტი ტრანზიტივობის თვისება:

$$J_G\left(X,Y|W\right)\wedge J_G\left(X,Y|W\bigcup\{v\}\right)\Rightarrow J_G\left(X,\{v\}|W\right)\vee J_G\left(Y,\{v\}|W\right). \quad (29)$$

აქ $X,Y,W,\{v\}$ - გადაუკვეთელი სიმრავლეებია და $\{v\}$ ერთ ელემენტს შეიცავს.

მტკიცება:

ISSN 1512-1232

დავუშვათ, რომ შესრულებულია (29)-ე თანაფარდობის მარცხენა ნაწილი: $J_G\left(X,Y|W\right)\wedge J_G\left(X,Y|W\cup\{v\}\right)$. დავუშვათ ასევე, რომ (29)-ე თანაფარდობის მარჯვენა ნაწილი არ სრულდება, ესე იგი W არ განაცალკევებს X და $\{v\}$, ასევე Y და $\{v\}$ სიმრავლეებს: $\neg J_G\left(X,\{v\}|W\right)\vee\neg J_G\left(Y,\{v\}|W\right)$. მაშასადამე, არსებობს R_1 მარშრუტი X სიმრავლეში შემავალ რაღაც x კვანძსა და v კვანძს შორის, ასევე R_2 მარშრუტი Y სიმრავლეში შემავალ რაღაც y კვანძსა და v კვანძს შორის. ორივე მარშრუტი არ იბლოკება W სიმრავლით. R_1 და R_2 მარშრუტების შეერთებით მიღებული R მარშრუტი აკავშირებს x და y კვანძებს v კვანძის მეშვეობით. პირობის თანახმად, W და $W\cup\{v\}$ სიმრავლეები განაცალკევებს X და Y სიმრავლეებს, და, ამრიგად, ბლოკავს R მარშრუტს. დავუშვათ, რომ R მარშრუტში შემავალი w_1 კვანძი იბლოკება W სიმრავლით, ხოლო R მარშრუტში შემავალი w_2 კვანძი იბლოკება $W\cup\{v\}$ სიმრავლით.

1. თუ w_1 არ უდრის v-ს, მაშინ იგი განთავსებულია ან R_1 მარშრუტზე x-დან v-მდე, ან R_2 მარშრუტზე y-დან v-მდე. კონკრეტულობისათვის დავუშვათ, რომ $w_1\in R_1$. რადგან W სიმრავლე ბლოკავს R მარშრუტს w_1 კვანძში, ამიტომ:

1.1. ან w_1 მიეკუთვნება W-ს, თუ w_1 შედის R-ში (და R_1-ში) პირველი ტიპის მიხედვით;

1.2. ან w_1 და ყველა მისი შთამომავალი არ მიეკუთვნება W-ს, ხოლო თავად იგი შედის R-ში (და R_1-ში) მეორე ტიპით.

ორივე შემთხვევაში იმ დასკვნამდე მივდივართ, რომ W სიმრავლე ბლოკავს R_1 მარშრუტს w_1 კვანძის მეშვეობით, რაც ეწინააღმდეგება R_1 მარშრუტის არჩევას. ამის მსგავსად:

2. თუ w_2 არ უდრის v-ს, მაშინ w_2 განთავსებულია R_1 ან R_2 მარშრუტზე. კონკრეტულობისათვის დავუშვათ, რომ $w_2\in R_1$. რადგან R მარშრუტი იბლოკება $W\cup\{v\}$ სიმრავლით w_2 კვანძში, ამიტომ:

2.1. ან w_2 მიეკუთვნება W-ს (რადგან w_2 არ შეიძლება მიეკუთვნებოდეს $\{v\}$ სიმრავლეს) და შედის R-ში (და R_1-ში) პირველი ტიპის მიხედვით;

2.2. ან არც თავად w_2 და არც მისი შთამომავლები არ მიეკუთვნება $W\cup\{v\}$ სიმრავლეს და, ამრიგად, W სიმრავლესაც. ამასთან ერთად, w_2 შედის R-ში (და R_1-ში) მეორე ტიპით.

გამოდის, რომ W სიმრავლე ბლოკავს R_1 მარშრუტს w_2 კვანძში, რაც ეწინააღმდეგება R_1 მარშრუტის არჩევას.

3. როცა ორივე w_1 და w_2 კვანძი უდრის v-ს, და ამასთან ერთად:

3.1. თუ v შედის R მარშრუტში პირველი ტიპით, მაშინ, რადგან W ბლოკავს R მარშრუტს v კვანძით, v უნდა იმყოფებოდეს W სიმრავლეში, მაგრამ $\{v\}$ და W, პრობის თანახმად, არ გადაიკვეთება და წინააღმდეგობამდე მივდივართ;

3.2. თუ v შედის R მარშრუტში მეორე ტიპით, მაშინ, რადგან W ბლოკავს R მარშრუტს v კვანძით, v არ უნდა მიეკუთვნებოდეს $W\cup\{v\}$ სიმრავლეს, რაც აშკარა წინააღმდეგობას წარმოადგენს.

ISSN 1512-1232

მიღებული წინააღმდეგობების გათვალისწინებით გამომდინარეობს, რომ

$$\neg J_G\left(X,V\,|\,W\right)\vee\neg J_G\left(Y,V\,|\,W\right)$$

დაშვება მცდარი იყო და, ამრიგად, თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 12: ჰიპოთეზიდან პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ გამომდინარეობს ჰიპოთეზა განცალკევებაზე, ე.ი. $G_{ind}\Rightarrow G_{sep}$.

მტკიცება (Thomas Verma, Judea Pearl):

დავუშვათ, რომ მოცემულია $G=\left(N,E\right)$ გრაფი და ალბათური P_θ მოდელი, რომელიც აკმაყოფილებს ჰიპოთეზას პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ, ესე იგი $\theta\in\Theta_{G_{ind}}$. საჭიროა იმის ჩვენება, რომ $\theta\in\Theta_{G_{isep}}$, ესე იგი θ პარამეტრისათვის სრულდება ასევე ჰიპოთეზა განცალკევებაზე, რაც ცნობილი Z სიმრავლის პირობებში X და Y სიმრავლეთა პირობით დამოუკიდებლობას ნიშნავს, თუ Z განაცალკევებს X და Y სიმრავლეებს: $J_G\left(X,Y\,|\,Z\right)\Rightarrow I_\theta\left(X,Y\,|\,Z\right)$.

დამტკიცება ჩავატაროთ ინდიქციით კვანძების $n=\#N$ რიცხვის მიმართ[1]. როცა $n=1$, დასამტკიცებელი არაფერია. $n=2$ შემთხვევაში ორი X და Y კვანძი განცალკევებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათ შორის კავშირი არ არსებობს, რაც პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ ჰიპოთეზის საფუძველზე იწვევს მათ უპირობო დამოუკიდებლობას (X დამოკიდებული არ არის Y არა-შთამომავალზე მშობლების ცარიელი სიმრავლის პირობებში).

ამრიგად, დავუშვათ, რომ თეორემა სამართლიანია ყველა $n<k$ სიდიდისათვის. ვუჩვენოთ თეორემის სამართლიანობა $n=k$ მნიშვნელობისათვის. დავნომროთ კვანძები რაღაც ტოპოლოგიური ნუმერაციის მიხედვით. მაშინ ჰიპოთეზიდან პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ გამომდინარეობს:

$$I_\theta\left(\left\{X_i\right\},\left\{X_1,\ldots,X_{i-1}\right\}|\,P\left(X_i\right)\right),\forall i\in\left\{1,\ldots,n\right\}. \tag{30}$$

განვსაზღვროთ $G-n$ გრაფი როგორც ობიექტი, რომელიც მიღებულია G გრაფიდან მისი $n-$ური კვანძისა და ამ კვანძის ყველა ინციდენტური რკალის ამოღებით. ინდუქციის დაშვებით, $J_{G-n}\left(X,Y\,|\,Z\right)\Rightarrow I_\theta\left(X,Y\,|\,Z\right)$ ყველა წყვილ-წყვილად გადაუკვეთელი X,Y,Z სიმრავლისათვის $N\setminus\{X_n\}-$ დან.

დავუშვათ, რომ წყვილ-წყვილად გადაუკვეთელი X,Y,Z სიმრავლისათვის $N-$დან სამართლიანია $J_G\left(X,Y\,|\,Z\right)$ თანაფარდობა. $n-$ური X_n კვანძის მიკუთვნების ვარიანტების მიხედვით, განვიხილავთ ოთხ სხვადასხვა შემთხვევას.

1. X,Y და Z სიმრავლიდან X_n კვანძი არც ერთში არ შედის, ე.ი. $X_n\notin X\bigcup Y\bigcup Z$. ამრიგად, X,Y და Z მიეკუთვნება $G-n$ გრაფს. Z განაცალკევებს X და Y სიმრავლეებს $G-$ში, მაშასადამე, Z განაცალკევებს X და Y სიმრავლეებს ($G-n$)-შიც, რადგან ყოველი მარშრუტი ($G-n$)-დან ერთდროულად არის მარშრუტი $G-$დანაც და იბლოკება Z სიმრავლით, რომელიც ასევე მიეკუთვნება $G-n$ გრაფს. ასე რომ თეორემიდან ინდუქციის შესახებ $I_\theta\left(X,Y\,|\,Z\right)$ თანაფარდობა გამომდინარეობს.

[1] როგორც შევთანხმდით, $\#N$ სიმბოლოთი $N-$ის განზომილება აღინიშნება

ISSN 1512-1232

2. X_n შედის X სიმრავლეში, ე.ი. $X_n \in X$. მაშინ X შეიძლება წარმოვადგინოთ $X=\{X_n\}\bigcup X', X' \subset N \setminus \{X_n\}$ სახით. ჰიპოთეზიდან პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ გამომდინარეობს: $I_\theta\left(\{X_n\},\{X_1,\ldots,X_{n-1}\}\setminus P(X_n)\,|\,P(X_n)\right)$.

აღვნიშნოთ $B:=P(X_n)$ და $A:=\{X_1,\ldots,X_{n-1}\}\setminus P(X_n)$, მაშასადამე

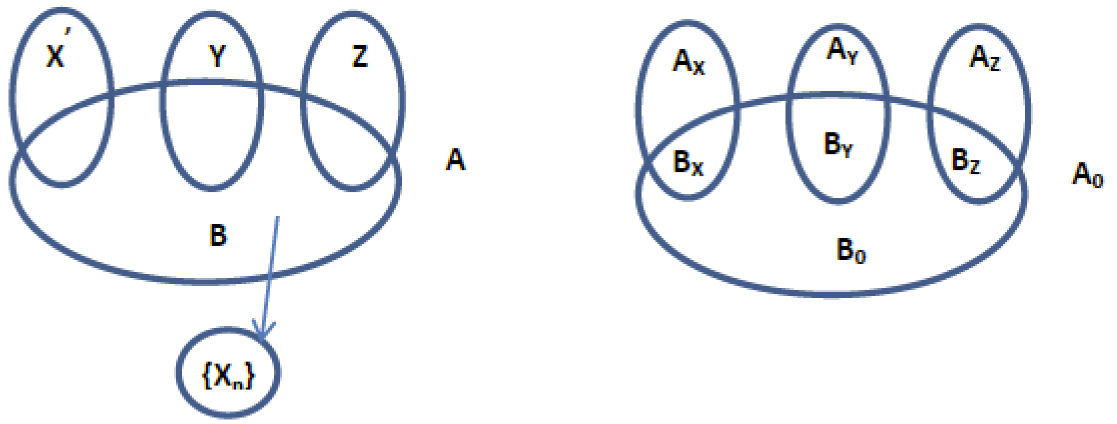
$$I_\theta\left(\{X_n\},A\,|\,B\right),\ A\bigcap B=\varnothing,\ A\bigcup B=\{X_1,\ldots,X_{n-1}\}=G-n. \tag{31}$$

ვინაიდან X,Y და Z სიმრავლეები წყვილ-წყვილად გადაუკვეთელია, A და B სიმრავლეები შეიძლება დავშალოთ შემდეგ წყვილ-წყვილად გადაუკვეთელ სიმრავლეებად:

$$B_X := B\bigcap X',\ B_Y := B\bigcap Y,\ B_Z := B\bigcap Z,\ B_0 := B\setminus\left(B_X\cup B_Y\cup B_Z\right)\Rightarrow B=B_X+B_Y+B_Z+B_0,$$

სადაც «+» ნიშნით წარმოდგენილია გადაუკვეთელ სიმრავლეთა გაერთიანება. ანალოგიურად:

$$A_X := A\bigcap X',\ A_Y := A\bigcap Y,\ A_Z := A\bigcap Z,\ A_0 := A\setminus\left(A_X\cup A_Y\cup A_Z\right)\Rightarrow A=A_X+A_Y+A_Z+A_0.$$



ნახ.8 A და B სიმრავლეთა დაყოფა

ვინაიდან B არის X_n-ის მშობლების სიმრავლე, ამიტომ G გრაფში B სიმრავლის ყოველი წერტილიდან არსებობს X_n-კენ მიმავალი რკალი, მათ შორის არის რკალი B_Y-ის ყველა კვანძიდან X_n-კენ. მაგრამ, რადგან პირობის თანახმად, $J_G\left(\underbrace{X'\bigcup\{X_n\}}_{=X},Y\,|\,Z\right)$,

ამიტომ ყოველი მარშრუტი Y სიმრავლის ნებისმიერი კვანძიდან X_n-მდე უნდა იბლოკებოდეს Z-ით, მათ შორის უნდა იბლოკებოდეს ყველა გზა B_Y-დან X_n-კენ. მაგრამ ეს შეუძლებელია, რადგან რკალის ბლოკირება არ ხდება. ამიტომ B_Y სიმრავლე უნდა იყოს ცარიელი. მაშასადამე $B=B_X+B_Z+B_0$ და $A_Y=Y\Rightarrow A=A_X+Y+A_Z+A_0$. ამრიგად. (31) თანაფარდობა შემდეგ სახეს იძენს:

$$I_\theta\left(\{X_n\},A_X+Y+A_Z+A_0\,|\,B_X+B_Z+B_0\right). \tag{32}$$

მე-(17) და მე-(18) გამოსახულებების გათვალისწინებით (32)-ე თანაფარდობიდან ვიღებთ:

ISSN 1512-1232

$$
\begin{aligned}
& I_\theta\left(\{X_n\}, A_X + Y + A_Z + A_0 \mid B_X + B_Z + B_0\right) \Rightarrow \\
& \underset{(18)}{\Rightarrow} I_\theta\left(\{X_n\}, Y + A_0 \mid \underbrace{B_X + A_X}_{X} + \underbrace{B_Z + A_Z}_{Z} + B_0\right) \Rightarrow \\
& \underset{(17)}{\Rightarrow} I_\theta\left(\{X_n\}, Y \mid X' + B_0 + Z\right).
\end{aligned}
$$

ამრიგად,

$$I_\theta\left(\{X_n\}, Y \mid X' + B_0 + Z\right). \tag{33}$$

დავუშვათ, რომ არსებობს მარშრუტი Y-დან B_0-მდე, რომელიც არ იბლოკება Z სიმრავლით G-ში. შევავსოთ ეს მარშრუტი რკალით B_0-ის w კვანძიდან X_n-მდე (ასეთი რკალი არსებობს, რადგან B_0-ის ყველა კვანძი X_n-ის მშობელია). პირობის თანახმად, Z სიმრავლე ბლოკავს ყველა მარშრუტს, რომელიც Y სიმრავლიდან G-ს გავლით X_n-ში მიდის, სხვანაირად რომ ვთქვათ, Z ბლოკავს w კვანძს, რომელიც წარმოდგენილია მარშრუტში პირველი ტიპით. მაშასადამე, w უნდა მიეკუთვნებოდეს Z-ს, რაც შეუძლებელია, ვინაიდან B_0 და Z არ გადაიკვეთება იმის გამო, რომ

$$B_0 \cap B_Z = \varnothing,$$

$$B_0 \subset B,\ A_Z \subset A,\ B \cap A = \varnothing \Rightarrow B_0 \cap A_Z = \varnothing$$

და ამიტომ

$$B_0 \cap \left(B_Z + A_Z\right) = \varnothing.$$

ამ წინააღმდეგობიდან კი გამომდინარეობს, რომ Z განაცალკევებს Y-ს B_0-გან G-ში, ე.ი.

$$J_G\left(B_0, Y \mid Z\right). \tag{34}$$

რადგან Z განაცალკევებს Y-ს როგორც X'-გან (პირობის მიხედვით), ასევე B_0-გან ((34)-ე თანაფარდობის თანახმად), ამიტომ Z ასევე განაცალკევებს Y-ს ამ სიმრავლეთა გაერთიანებისგანაც, ე.ი.

$$J_G\left(B_0 + X', Y \mid Z\right). \tag{35}$$

(35)-ე თანაფარდობაში X_n კვანძი სამ სიმრავლიდან არც ერთში არ შედის, ამიტომ, როგორც ეს უკვე იყო ნაჩვენები პირველ შემთხვევაში, (35)-ე გამოსახულებიდან გამომდინარეობს განცალკევება $G-n$ გრაფში, და, მაშასადამე, ინდუქციის დაშვებით, პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ მტკიცებულების სამართლიანობა:

$$J_G\left(B_0 + X', Y \mid Z\right) \underset{X_n \notin B_0 + X' + Y + Z}{\Rightarrow} J_{G-n}\left(B_0 + X', Y \mid Z\right) \underset{\text{ინდუქცია}}{\Rightarrow} I_\theta\left(B_0 + X', Y \mid Z\right). \tag{36}$$

მე-(17) და მე-(19) თვისებათა გათვალისწინებით (36)-ე და (33)-ე გამოსახულებებიდან გამომდინარეობს:

$$
\begin{aligned}
& I_\theta\left(Y, B_0 + X' \mid Z\right) \wedge I_\theta\left(Y, \{X_n\} \mid X' + B_0 + Z\right) \Rightarrow \\
& \underset{(19)}{\Rightarrow} I_\theta\left(Y, B_0 + \underbrace{X' + \{X_n\}}_{=X} \mid Z\right) \underset{(17)}{\Rightarrow} I_\theta\left(Y, X \mid Z\right).
\end{aligned}
$$

ამრიგად, მივიღეთ $I_\theta\left(X, Y \mid Z\right)$.

3. X_n შედის Y-ში. განცალკევებისა და პირობითი დამოუკიდებლობის სიმეტრიის გამო ეს შემთხვევა მტკიცდება მეორე შემთხვევის მსგავსად.

4. X_n შედის Z-ში. მაშინ Z შეიძლება წარმოვადგინოთ $Z=\{X_n\}\cup Z', Z'\subset N\setminus\{X_n\}$ სახით. $Z=\{X_n\}\cup Z'$ სიმრავლით ბლოკირებული ყველა მარშრუტი X-დან Y-ში იბლოკება Z' სიმრავლით. მართლაც, დავუშვათ, რომ არსებობს მარშრუტი X-დან Y-ში, რომელიც იბლოკება Z-ით და არ იბლოკება Z'-ით. მაშინ, ან არსებობს პირველი ტიპის მარშრუტში წარმოდგენილი w კვანძი, რომელიც შედის Z-ში, მაგრამ არ შედის Z'-ში. მაშასადამე, w კვანძი შედის $Z\setminus Z'=\{X_n\}$-ში, ესე იგი $w=X_n$. მაგრამ ეს შეუძლებელია, რადგან X_n უკანასკნელი კვანძია ტოპოლოგიური ნუმერაციის თანახმად, და, ამრიგად, მას არ გააჩნია შვილები, ამიტომ მისი ინციდენტური ყველა რკალი შედის მასში და არ შეიძლება შედიოდეს მარშრუტში პირველი ტიპის მიხედვით. ან არსებობს მეორე ტიპის მარშრუტში შემავალი w კვანძი და ამ დროს არც თავად იგი, და არც მისი შთამომავლები არ შედის Z-ში. მაშასადამე, არც თავად იგი, და არც მისი შთამომავლები არ შედის Z'-ში. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ იგი ასევე იბლოკება Z' სიმრავლით. მივიღებთ:

$$J_G(X,Y\mid Z'). \tag{37}$$

მეთერთმეტე თეორემის თანახმად, (37)-ე გამოსახულებიდან $J_G(X,Y\mid Z)$ პირობის გათვალისწინებით გამომდინარეობს, რომ

$$J_G(\{X_n\},X\mid Z')\vee J_G(\{X_n\},Y\mid Z'). \tag{38}$$

(37)-ე და (38)-ე გამოსახულებათა კომბინირებით გვაქვს:

$$\begin{aligned}&\left(J_G(\{X_n\},X\mid Z')\vee J_G(\{X_n\},Y\mid Z')\right)\wedge J_G(X,Y\mid Z')\Rightarrow\\&\Rightarrow\left(J_G(\{X_n\},X\mid Z')\wedge J_G(Y,X\mid Z')\right)\vee\left(J_G(\{X_n\},Y\mid Z')\wedge J_G(X,Y\mid Z')\right)\Rightarrow\\&\Rightarrow J_G(\{X_n\}\cup Y,X\mid Z')\vee J_G(\{X_n\}\cup X,Y\mid Z').\end{aligned}$$

ესე იგი მიიღება:

$$J_G(X,Y\cup\{X_n\}\mid Z')\vee J_G(X\cup\{X_n\},Y\mid Z'). \tag{39}$$

(39)-ე პირობა შეესაბამება ერთ-ერთ შემთხვევას უკვე განხილულ მე-2 ან მე-3 შემთხვევებიდან. მათთვის დამტკიცებული იყო $I_\theta(X,Y\cup\{X_n\}\mid Z')$ ან $I_\theta(X\cup\{X_n\},Y\mid Z')$ შესაბამისად. მაგალითად, დავუშვათ, რომ სამართლიანია $I_\theta(X\cup\{X_n\},Y\mid Z')$ გამოსახულება. მაშინ, (23)-ე თანაფარდობის გათვალისწინებით, მივიღებთ $I_\theta(X,Y\mid Z'\cup\{X_n\})$ გამოსახულებას, რაც $I_\theta(X,Y\mid Z)$ გამოსახულების ტოლფასია.

ამრიგად, დამტკიცებულია X-სა და Y-ის პირობითი დამოუკიდებლობა Z-გან, ე.ი. დამტკიცებულია, რომ სრულდება ჰიპოთეზა განცალკევების შესახებ.

უშუალოდ მეშვიდე, მეათე და მეთორმეტე თეორემებიდან გამომდინარეობს:

თეორემა 13: ერთისა და იმავე ბაიესური ქსელის შესაბამისი ჰიპოთეზები პირობითი დამოუკიდებლობის, ფაქტორიზაციისა და განცალკევების შესახებ ერთმანეთს ემთხვევა, ე.ი. $G_{fact}\Leftrightarrow G_{ind}\Leftrightarrow G_{sep}$ ან $\Theta_{G_{ind}}\Leftrightarrow\Theta_{G_{fact}}\Leftrightarrow\Theta_{G_{sep}}$.

ISSN 1512-1232

განსაზღვრება: ჰიპოთეზას პირობითი დამოუკიდებლობის შესახებ, მის ეკვივალენტურ ჰიპოთეზას ფაქტორიზაციის შესახებ და ეკვივალენტურ ჰიპოთეზას განცალკევების შესახებ, რომელიც შეესაბამება $G(N,E)$ ბაიესურ ქსელს, ვუწოდოთ ***ბაიესური ქსელის შესაბამისი ჰიპოთეზა*** და აღვნიშნოთ იგი G სომბოლოთი. ხოლო $\{1,\ldots,r_1\}\times\ldots\times\{1,\ldots,r_n\}$ ალბათური განაწილების იმ პარამეტრთა სიმრავლე, რომლებიც შესაბამის ჰიპოთეზებს აკმაყოფილებს, Θ_G სახით წარმოვადგინოთ.

მომდევნო მასალაში, ბაიესური წრედის განხილვისას, გაუცხადებელი შეთანხმებით ნაგულისხმები იქნება, რომ მოცემული ალბათური განაწილებისათვის ცვლადთა მნიშვნელობების სიმრავლეზე სრულდება ამ ქსელის შესაბამისი ჰიპოთეზა.

4.3.1 განცალკევების შესახებ ჰიპოთეზიდან გამომდინარე შედეგები

სიმრავლეთა განცალკევების შესახებ ცნება საშუალებას იძლევა ბაიესური ქსელის დიაგრამით ვიზუალურად განისაზღვროს ცვლადების პირობითი დამოუკიდებლობა.

შემოვიღოთ შემდეგი სასარგებლო ცნება.

განსაზღვრება: ბაიესური ქსელის X კვანძის $MB(X)$ **მარკოვის საფარი** (ინგლ. Markov Blanket) ეწოდება X-ის მშობლების, მისი (ე.ი. X-ის) შვილების და მისი (ე.ი. X-ის) შვილების სხვა მშობლების სიმრავლეს, ესე იგი

$$MB(X):=P(X)\cup C(X)\cup\{y\in N\,|\,C(y)\cap C(X)\neq\varnothing\}.$$

თეორემა 14: ბაიესური ქსელის ნებისმიერი კვანძი, თუ ცნობილია მისი მარკოვის საფარის მნიშვნელობა, პირობითად დამოუკიდებელია ქსელის ყველა დანარჩენი კვანძისგან.

მტკიცება: დავუშვათ, რომ $x\in N, y\in N\setminus MB(\{x\})$. საკმარისია ვუჩვენოთ, რომ ნებისმიერი მარშრუტი y-დან x-კენ იბლოკება $MB(x)$-ით. ნებისმიერი R მარშრუტი y-დან x-კენ გადის x-ის მშობლების სიმრავლეზე, ან x-ის შვილების სიმრავლეზე.

1. თუ R გადის w კვანძზე, რომელიც იმყოფება x-ის მშობლების სიმრავლეში, მაშინ იგი შედის R-ში პირველი ტიპის შესაბამისად, რადგან ყველა რკალი მშობლებსა და x-ს შორის მიმართულია x-კენ. ამრიგად, R მარშრუტი იბლოკება მშობლების სიმრავლით.

2. თუ R გადის w კვანძზე, რომელიც იმყოფება x-ის შვილების სიმრავლეში, მაშინ შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

2.1. w კვანძის ინციდენტური სხვა რკალი მიმართულია ამ კვანძიდან, ესე იგი გამოდის w კვანძიდან, ამიტომ w კვანძის შემცველი მარშრუტის ფრაგმენტი $x\to w\to$ სახისაა. ასეთ შემთხვევაში w შედის R-ში პირველი ტიპის შესაბამისად და, ამრიგად, R მარშრუტი ბლოკირებულია შვილების სიმრავლით.

2.2. w კვანძის ინციდენტური სხვა რკალი მიმართულია w კვანძისკენ, ესე იგი w შედის R მარშრუტში შესვლის მეორე ტიპისათვის დამახასიათებელი ფორმით. მარშრუტის შესაბამისი ფრაგმენტი მოიცემა $x\to w\leftarrow z$ ფორმით. ამ შემთხვევაში z შედის R მარშრუტში მეორე ტიპით და აგრეთვე შედის x-ის შვილების მშობელთა სიმრავლეშიც, რომელიც მას ბლოკავს.

ISSN 1512-1232

თეორემა 15: ორი კვანძი მოსაზღვრეა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი არ განცალკევდება თავიანთი მშობლების გაერთიანებული სიმრავლით. სხვანაირად რომ ვთქვათ, $G=(N,E)$ გრაფისათვის და ორი a და b კვანძისათვის ადგილი აქვს $\langle a,b\rangle \in E \vee \langle b,a\rangle \in E \Leftrightarrow \neg J_G\left(a,b\,|\,P\left(\{a,b\}\right)\right)$ თანაფარდობას.

მტკიცება:

1. თუ ორი კვანძი დაკავშირებულია, მაგალითად, $a \to b$ რკალით, მაშინ ამ რკალით შემდგარი მარშრუტის ბლოკირება, განმარტების თანახმად, რომელიმე სიმრავლით შეუძლებელია, რადგან ეს მარშრუტი არ შეიცავს შიდა კვანძებს. მათ შორის შეუძლებელია მისი დაბლოკვა $P\left(\{a,b\}\right)$ სიმრავლითაც, რაც იმას ნიშნავს, რომ $P\left(\{a,b\}\right)$ არ განაცალკევებს a და b კვანძებს.

2. დავუშვათ, რომ სამართლიანია $\neg J_G\left(a,b\,|\,P\left(\{a,b\}\right)\right)$ თანაფარდობა, მაშინ a და b კვანძებს შორის არსებობს R მარშრუტი, რომელიც არ იბლოკება $P\left(\{a,b\}\right)$ სიმრავლით. დავუშვათ, რომ a და b კვანძები არ არის მოსაზღვრე, მაშინ R მარშრუტი შეიცავს შიდა კვანძებს.

R მარშრუტში წარმოდგენილი ყველა შიდა კვანძი პირველი ტიპით რომ შედიოდეს ამ მარშრუტში, ე.ი. მათ რომ თუნდაც ერთი გამომავალი რკალი გააჩნდეს, მაშინ a კვანძსადმი უახლოეს ან b კვანძსადმი უახლოეს w კვანძს მარშრუტში ექნებოდა შესაბამისად a ან b კვანძში შემავალი რკალი. მარშრუტის შესაბამისი ფრაგმენტი ასეთ სახეს შეიძენდა: $a \leftarrow w \ldots b$ ან $a \ldots w \to b$.

ამრიგად, R მარშრუტში მეორე ტიპით შემავალი თუნდაც ერთი კვანძი არსებობს. დავუშვათ, რომ w_1 არის a კვანძისადმი უახლოესი ასეთი კვანძი, ხოლო w_2 არის b კვანძისადმი უახლოესი ასეთივე კვანძი (w_1 და w_2 კვანძები შეიძლება ემთხვეოდეს ერთმანეთს). R მარშრუტს შემდეგი სახე ექნება: $a \to \ldots \to w_1 \leftarrow \ldots\ldots \to w_2 \leftarrow \ldots \leftarrow b$. ვინაიდან R არ იბლოკება a და b კვანძების მშობლებით, თავად w_1 კვანძი ან მისი შთამომავალი უნდა იმყოფებოდეს $P\left(\{a,b\}\right)$-ში. მაგრამ w_1 კვანძი ან მისი შთამომავალი $P\left(\{a,b\}\right)$-ში რომ იმყოფებოდეს, მაშინ G-ში იარსებებდა a კვანძიდან w_1 კვანძამდე მიმავალი ციკლი, რომელიც w_1-დან მოვიდოდა a კვანძის მშობლების სიმრავლემდე და მათგან კვლავ გაემართებოდა a კვანძისკენ.

ჩვენ წინააღმდეგობამდე მივედით. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ a და b კვანძები მოსაზღვრეა.

შედეგი მე-15 თეორემიდან: ორი კვანძი მოსაზღვრეა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი არავითარი სიმრავლით არ განცალკევდება.

მტკიცება:

განცალკევების განმარტების თანახმად, ორი მოსაზღვრე კვანძის განცალკევება არავითარი სიმრავლით არ შეიძლება. მაგრამ, თუ ორი კვანძის განცალკევება შეუძებელია რომელიმე სიმრავლით, მაშინ, კერძოდ, ასეთი განცალკევება შეუძლებელი იქნება მათივე მშობლების გაერთიანებული სიმრავლითაც, მაშასადამე, მეთხუთმეტე თეორემით, ისინი მოსაზღვრე კვანძებია.

განსაზღვრება: დავუშვათ, რომ მოცემულია სამი - a, b და c - კვანძი. ჩვენ ვამბობთ, რომ a, b და c კვანძები ქმნის **v**-სტრუქტურას abc სახელწოდებით, თუ შესრულებულია ორი პირობა:

1. კვანძები დაკავშირებულია (ბმულია) $a \to b \leftarrow c$, ესე იგი $a, c \in P\left(\{b\}\right)$.

2. a და c კვანძები მოსაზღვრე არ არის, ესე იგი $a \notin P\left(\{c\}\right) \wedge c \notin P\left(\{a\}\right)$.

თეორემა 16: $a-b$ და $b-c$ კვანძების მოსაზღვრე წყვილები ქმნის abc სახელწოდების **v**-სტრუქტურას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია ორი პირობა:

1. არსებობს სიმრავლე, რომელიც განაცალკევებს a და c კვანძებს.

2. ნებისმიერი სიმრავლე, რომელიც a და c კვანძებს განაცალკევებს, არ შეიცავს b კვანძს.

მტკიცება:

1. მეთხუთმეტე თეორემიდან გამომდინარე შედეგის მიხედვით, მეთექვსმეტე თეორემის პირობის პირველი პუნქტი იმის ტოლფასია, რომ a და c კვანძები არ არის მოსაზღვრე კვანძები, რაც **v**-სტრუქტურის განსაზღვრების მეორე პუნქტის ეკვივალენტურია.

2. თუ კვანძები დაკავშირებულია ერთმანეთთან $a \to b \leftarrow c$ სახით, მაშინ ნებისმიერი სიმრავლე, რომელიც a და c კვანძებს განაცალკევებს, არ უნდა შეიცავდეს b კვანძს, გამომდინარე განცალკევების განსაზღვრებიდან.

დავუშვათ, რომ ნებისმიერი სიმრავლე, რომელიც a და c კვანძებს განაცალკევებს, არ შეიცავს b კვანძს, ხოლო Z არის გარკვეული სიმრავლე, რომელიც განაცალკევებს a და c კვანძებს. ვინაიდან არსებობს $a-b-c$ მარშრუტი, ამიტომ, თუ b შედის მასში პირველი ტიპით, მაშინ b უნდა მიეკუთვნებოდეს Z სიმრავლეს განცალკევების განსაზღვრების თანახმად. მაშასადამე, b შედის მარშრუტში მეორე ტიპის სახით, ანუ $a \to b \leftarrow c$ ფორმით.

ამრიგად, მეთექვსმეტე თეორემის პირობის მეორე პუნქტი **v**-სტრუქტურის განსაზღვრების პირველი პუნქტის ეკვივალენტურია.

5. დასკვნა

1. შემოტანილია ცნებები გრაფთა თეორიიდან და შემოფარგლულია შედეგების ის წრე, რომელიც მნიშვნელოვანი და აუცილებელია შემდგომი განხილვისათვის.

2. განსაზღვრულია ბაიესური ქსელი როგორც მიმართული (ორიენტირებული) აციკლური გრაფი, რომლის კვანძები შეესაბამება ცნებებს საგნობრივ სფეროდან, ხოლო რკალები - უშალოდ სტაქასტიკურ კავშირებს მათ შორის.

3. ალბათური განაწილებისათვის გრაფის კვანძების მნიშვნელობათა სიმრავლეზე შემოტანილია ბაიესური ქსელის შესაბამისი ჰიპოთეზები პირობითი დამოუკიდებლობის, ფაქტორიზაციის და გაყოფის (განცალკევების) შესახებ.

ISSN 1512-1232

4. დამტკიცებულია ამ ჰიპოთეზათა ეკვივალენტობა, რაც, ცხადია, ერთიანი ჰიპოთეზის გამოყენების საშუალებას იძლევა, რომელიც შეზღუდვებს ადებს ქსელში კვანძების ალბათური განაწილების პარამეტრთა სიმრავლეზე.

ეს შეზღუდვები შეესაბამება პირობით დამოუკიდებლობას კვანძებს შორის, რომლებიც ქსელში დაკავშრებულია ამ კვანძების გამყოფ (გამაცალკევებელ) სიმრავლეებზე გამავალი მარშრუტებით.

5. მომზადებულია თეორიული საფუძველი ეკვივალენტობის მიმართების შემოტანისათვის ბაიესური ქსელების სიმრავლეზე, მაქსიმალური დამაჯერებლობის შეფასების დასადგენად ასეთი ქსელების პარამეტრებისა და სტრუქტურისათვის, ასევე ძებნის მეთოდების დასადგენად, რომლებიც ოპტიმალურია სტრუქტურის არჩეული მეტრიკის თვალსაზრისით, რაც შემდგომი კვლევის საგანი უნდა გახდეს.

სტატიაში მოყვანილია რვა სურათი, ხოლო დიაგრამები და ცხრილები წარმოდგენილი არ არის.

6. ლიტერატურა

1. Thomas Verma, Judea Pearl, «*Causal Networks: Semantics and Expressiveness*», 1990
2. Thomas Verma, Judea Pearl, «*Equivalence and Synthesis of Causal Models*», 1991.
3. Thomas Verma, Judea Pearl, «*An Algorithm for Deciding if a Set of Observed Independencies Has a Causal Explanation*», 1992.
4. Judea Pearl, Thomas Verma, «*The Logic of Representing Dependencies by Directed Graphs*», 1987.
5. Dan Geiger, Judea Pearl, «*Logical and Algorithmic Properties of Conditional Independence and Graphical Models*», 1993.
6. R.G. Cowell, P. Dawid, S.L. Lauritzen, D.J. Spiegelhalter, «*Probabilistic Networks and Expert Systems*», 1999.
7. David Maxwell Chickering, «*A Transformational Characterization of Equivalent Bayesian Network Structures*», 1995.
8. David Maxwell Chickering, «*Learning Equivalence Classes of Bayesian-Network Structures*», 2002.
9. David Maxwell Chickering, «*Learning Bayesian Networks is NP-Complete*», 1996.
10. David Heckerman, Dan Geiger, David M. Chickering, «*Learning Bayesian Networks: The Combination of Knowledge and Statistical Dat*a», 1995.
11. David M. Chickering , Dan Geiger, David Heckerman, «*Learning Bayesian Networks: Search Methods and Experimental Results*», 1995.
12. David Heckerman, Christopher Meek, Gregory Cooper, «*A Bayesian Approach to Causal Discovery*», 1997.
13. David Heckerman, «*A Bayesian Approach to Learning Causal Networks*», 1995.
14. David Heckerman, Ross Shachter, «*Decision-Theoretic Foundations for Causal Reasoning*», 1995.
15. David Heckerman, Dan Geiger, «*Likelihoods and Parameter Priors for Bayesian Network*s», 1995.
16. David Heckerman, «*A Tutorial on Learning Bayesian Networks*», 1995.
17. David Maxwell Chickering, David Heckerman, «*Efficient Approximations for the Marginal Likelihood of a Bayesian Network*», 1997.
18. Luis M. de Campos, Juan M. Fernandez-Luna, J. Miguel Puerta, «*An Iterated Local Search Algorithm for Learning Bayesian Networks with Restarts Based on Conditional Independence Tests*», 2003
19. Richard E. Neapolitan, «*Learning Bayesian Networks*», 2003.
20. Ildik´o Flesch, Peter Lucas, «*Markov Equivalence in Bayesian Networks*», 2007.
21. Alexandra M. Carvalho, «*Scoring functions for learning Bayesian networks*», 2009.
22. Maxim Goncharov, «*Bayesian Networks*», in Russian, 2011: http://www.businessdataanalytics.ru/download/BayesianNetworks.pdf

Article received: 2014-03-04