უაკ 378.147:536.791.2

კვანტური იდეალური გაზის შესწავლისათვის ზოგადი ფიზიკის კურსში

მზევინარ მელიქია
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ფიზიკის ფაკულტეტი, ზოგადი ფიზიკის კათედრა

ანოტაცია

განხილულია კვანტური იდეალური გაზის თეორიის ელემენტები. შეფასებულია იდეალური გაზის კვანტურ გაზად გადაგვარების ტემპერატურის რიგი. ელემენტარულ ნაწილაკთა კვანტური იდეალური გაზისთვის ჩაწერილია ნაწილაკთა რიცხვისა და ენერგიის ზოგადი გამოსახულებანი. გამოკვლეულია ფერმი-გაზი, კერძოდ, გადაგვარებული ელექტრონული გაზი ლითონში აბსოლუტურ ნულზე და მის მახლობელ ტემპერატურებზე. გამოთვლილია ენერგია და სითბოტევადობა. ნაჩვენებია, რომ დაბალ ტემპერატურებზე ფერმიონების კვანტური თვისებები ვლინდება, კერძოდ, იმით, რომ სითბოტევადობა T აბსოლუტური ტემპერატურის პროპორციულად იცვლება და აბსოლუტურ ნულზე მიისწრაფის ნულისკენ. შესწავლილია ბოზე-გაზის თვისებები აბსოლუტურ ნულზე (ბოზე-კონდენსაცია) და გადაგვარების ტემპერატურაზე დაბალ ტემპერატურებზე. გამოთვლილია ენერგია და სითბოტევადობა. ნაჩვენებია, რომ ბოზე-ნაწილაკების კვანტური თვისებები ვლინდება, კერძოდ, იმით, რომ სითბოტევადობა $T^{3/2}$ კანონით იცვლება და აბსოლუტურ ნულზე მიისწრაფის ნულისკენ. ნაშრომში აღნიშნულია, რომ გადაგვარების ტემპერატურაზე მაღალ ტემპერატურებზე კვანტური კორელაცია უმნიშვნელოა – გაზი ორივე სტატისტიკის შემთხვევაში ამჟღავნებს კლასიკური გაზის თვისებებს (ემორჩილება ბოლცმანის სტატისტიკას, ენერგია აბსოლუტური ტემპერატურის პროპორციულად იცვლება, ხოლო სითბოტევადობა მუდმივია).

საკვანძო სიტყვები: *კვანტური სტატისტიკა, გადაგვარებული გაზი, გადაგვარების ტემპერატურა, ფერმი-გაზი, ბოზე-გაზი.*

1. შესავალი

ზოგადი ფიზიკის კურსში შეისწავლება კვანტური მექანიკის საფუძვლები. ეს საშუალებას გვაძლევს გავაშუქოთ კვანტური სტატისტიკური ფიზიკის ელემენტები ზოგადი ფიზიკის ჩარჩოებში.

ნაწილაკების ინდივიდუალურ თვისებებზე დაყრდნობით ფიზიკური სისტემის მაკროსკოპულ თვისებებს შეისწავლის სტატისტიკური ფიზიკა.

კვანტური სტატისტიკა კვლევის სტატისტიკური მეთოდია მაკროსკოპული სისტემებისა, რომელთა შემადგენელი ნაწილაკები ემორჩილებიან კვანტური მექანიკის კანონებს. კლასიკური სტატისტიკური ფიზიკისგან განსხვავებით, კვანტური სტატისტიკა ეყრდნობა იგივურ ნაწილაკთა განურჩევლობის პრინციპს: ყველა ერთნაირი ნაწილაკი (მაგალითად, ელექტრონები ლითონში) პრინციპულად განურჩეველია ერთმანეთისგან.

კვანტურ სტატისტიკაში ძირითადია კოორდინატების და იმპულსების მიხედვით ნაწილაკთა განაწილების ამოცანა. ფაზური სივრცის მოცულობის ელემენტი არ შეიძლება იყოს h^3 სიდიდეზე ნაკლები (h პლანკის მუდმივაა), რაც გამომდინარეობს

ნივთიერების ნაწილაკთა თვისებების კორპუსკულარულ-ტალღური დუალიზმიდან და ჰაიზენბერგის განუზღვრელობის თანაფარდობიდან.

2. კვანტური სტატისტიკა. გადაგვარების ტემპერატურა.

სტატისტოკური ფიზიკის წარმოდგენებით ყველაზე თვალსაჩინოა იდეალური გაზი. თუ k მდგომარეობაში ნაწილაკთა საშუალო რიცხვი $\overline{n}_k << 1$, მაშინ დასაშვებია ნაწილაკთა შორის არა მარტო უშუალო ძალური ურთიერთქმედების, არამედ სპეციფიური კვანტურმექანიკური, ნაწილაკთა იგივეობით განპირობებული კორელაციის (ლათ. correlatio - ურთიერთგავლენა) უგულებელჰყოფა.

კვანტური კორელაცია ვლინდება მაშინ, როდესაც ნაწილაკები უახლოვდებიან ერთმანეთს დე-ბროილის λ ტალღის სიგრძის რიგის მანძილებზე. ნაწილაკებს შორის საშუალო a მანძილი განისაზღვრება გაზის n სიმკვრივით ($n = N/V$):

$$a = n^{-1/3}. \tag{1}$$

იდეალური გაზის კვანტურ გაზად გადაგვარების T_0 ტემპერატურის კრიტერიუმია:

$$\lambda(T_0) \approx a \text{ ანუ } \frac{\hbar}{\sqrt{mk_B}} \cdot \frac{1}{\sqrt{T_0}} \approx n^{-1/3}, \tag{2}$$

სადაც $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ ერგი.წმ პლანკის მუდმივაა, $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ ერგი/K - ბოლცმანის მუდმივა, m - ნაწილაკის მასა, T - აბსოლუტური ტემპერატურა.

გადაგვარების ტემპერატურა წმინდა კვანტური ცნებაა – მისი გამოსახულება შეიცავს პლანკის მუდმივას:

$$T_0 \approx \frac{\hbar^2}{mk_B} \cdot n^{2/3}. \tag{3}$$

თუ იდეალური გაზის ტემპერატურა (მოცემული სიმკვრივისთვის) საკმაოდ დაბალია ($T < T_0$), ბოლცმანის სტატისტიკის გამოყენება დაუშვებელია. უნდა აიგოს სტატისტიკა, რომელშიც კვანტურ მდგომარეობაში ნაწილაკთა საშუალო $\overline{n}_k$ რიცხვები არ ჩაითვლება მცირე სიდიდეებად და აუცილებელი იქნება კვანტური კორელაციის გათვალისწინება.

მაკროსკოპული სისტემის ენერგეტიკული დონეები კვაზიუწყვეტია. კვანტური თვისებები ვლინდება არა ენერგიის დაკვანტვაში, არამედ სტატისტიკაში – მდგომარეობათა მიხედვით განაწილებაში.

განვიხილოთ N იგივურ (იდენტურ) კვანტურ ნაწილაკთა სისტემა [1]. განურჩევლობის პრინციპიდან გამომდინარეობს, რომ ასეთი სისტემის ტალღური ფუნქცია უნდა იყოს ანტისიმეტრიული (ნახევარმთელი სპინის მქონე ნაწილაკებისათვის) ან სიმეტრიული (მთელსპინიანი ნაწილაკებისათვის) ნებისმიერი წყვილის გადანაცვლების მიმართ. ვინაიდან ნაწილაკები უნდა მიეკუთვნებოდნენ ერთ-ერთ კლასს, არსებობს ორი, პრინციპულად განსხვავებული სტატისტიკა: ფერმი-

დირაკისა ნახევარმთელი სპინის მქონე ნაწილაკებისათვის (ფერმიონებისათვის) და ბოზე-აინშტაინისა მთელსპინიანი ნაწილაკებისათვის (ბოზონებისათვის).

ფერმიონების დამახასიათებელ თავისებურებას განაპირობებს პაულის პრინციპი: ერთ კვანტურ მდგომარეობაში არ შეიძლება იმყოფებოდეს ერთზე მეტი ნაწილაკი. ფერმიონების იდეალური გაზისთვის (ფერმი-გაზისთვის) ფერმი-დირაკის განაწილების ფუნქციას (1926წ) შემდეგი სახე აქვს ($\overline{n}_k \le 1$):

$$\overline{n}_k = \frac{1}{e^{(\varepsilon_k - \mu)/k_B T} + 1}. \qquad (4')$$

ბოზონების იდეალური გაზისთვის (ბოზე-გაზისთვის) ბოზე-აინშტაინის განაწილების ფუნქციას (1924წ) შემდეგი სახე აქვს ($\overline{n}_k$ არაა შეზღუდული):

$$\overline{n}_k = \frac{1}{e^{(\varepsilon_k - \mu)/k_B T} - 1}. \qquad (4'')$$

ε_k არის ნაწილაკის ენერგია k მდგომარეობაში, μ - ერთი ნაწილაკის შესაბამისი თერმოდინამიკური (ქიმიური) პოტენციალი.

დაბალ ტემპერატურებზე ($T < T_0$) ფერმიონებსა და ბოზონებს შორის პრინციპული განსხვავებაა, რაც ქრება მაღალ ტემპერატურებზე.

თუ $\exp\{(\mu - \varepsilon_k)/k_B T\} << 1$, მაშინ ($4'$) და ($4''$) კვანტური განაწილების ფუნქციები გადაიქცევა ბოლცმანის კლასიკური განაწილების ფუნქციად:

$$\overline{n}_k = e^{(\mu - \varepsilon_k)/k_B T}. \qquad (4''')$$

ქიმიური პოტენციალი ($4'$) ფუნქციაში შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ასევე უარყოფითი, ($4''$) ფუნქციაში – უარყოფითი, ხოლო ($4'''$)Fფუნქციაში – უარყოფითი და აბსოლუტური მნიშვნელობით დიდი (იგულისხმება $\varepsilon_k \ge 0$).

შევნიშნოთ, რომ ნორმირების პირობა ($\sum_k \overline{n}_k = N$) არაცხადი სახით განსაზღვრავს შესაბამის სტატისტიკაში ქიმიურ პოტენციალს, როგორც ტემპერატურისა და სიმკვრივის ფუნქციას.

3. კვანტური იდეალური გაზის ენერგია.

განვიხილოთ კვანტური იდეალური გაზი, რომელიც შედგება ელემენტარული ნაწილაკებისაგან [2]. ფორმულებში ზედა ნიშანი შევუსაბამოთ ფერმი-გაზს, ხოლო ქვედა ნიშანი – ბოზე-გაზს.

ელემენტარული ნაწილაკის ენერგია დაიყვანება გადატანითი მოძრაობის კინეტიკურ ენერგიაზე (იგულისხმება, რომ არ არის გარეშე ველი). ვინაიდან V მოცულობა დიდია, ენერგეტიკული სპექტრი კვაზიუწყვეტია – დაკვანტვა არ ვლინდება. ამიტომ მდგომარეობათა მიხედვით ჯამიდან შეგვიძლია გადავიდეთ ფაზურ სივრცეში ინტეგრალზე.

იმპულსის მოდულის მიხედვით dN_p განაწილებიდან ადვილად მიიღება ენერგიის მიხედვით dN_ε განაწილება ($\varepsilon = p^2/2m$):

$$dN_p = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_BT} \pm 1} \cdot \frac{(2s+1)V4\pi p^2}{(2\pi\hbar)^3} dp\,, \qquad (5')$$

$$dN_\varepsilon = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_BT} \pm 1} \cdot \frac{(2s+1)V4\pi m\sqrt{2m\varepsilon}}{(2\pi\hbar)^3} d\varepsilon \equiv \bar{n}(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon\,, \qquad (5'')$$

სადაც s არის ნაწილაკის სპინი (სპინური რიცხვი), $g(\varepsilon)$ - კვანტურ მდგომარეობათა რიცხვის სიმკვრივე, ხოლო $(2\pi\hbar)^3$ – ფაზურ სივრცეში ერთი კვანტური მდგომარეობის შესაბამისი მოცულობა.

კვანტური იდეალური გაზის სიმკვრივე და სრული ენერგია, შესაბამისად, გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$\frac{N}{V} = \frac{(2s+1)m^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon}}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_BT} \pm 1} d\varepsilon, \qquad (6)$$

$$E = \int_0^\infty \varepsilon dN_\varepsilon = \frac{(2s+1)Vm^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_BT} \pm 1} d\varepsilon\,. \qquad (7)$$

(6) და (7) გამოსახულებები შეიცავს ინტეგრალებს, რომელთა მნიშვნელობები შეგვიძლია დავადგინოთ კვანტური სტატისტიკური ფიზიკის ტიპიური ინტეგრალების გამოსათვლელი ზოგადი ფორმულით [2]:

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1}}{e^z + 1} dz = \left(1 - 2^{1-x}\right)\Gamma(x)\varsigma(x) \;\; (x > 0), \qquad (6')$$

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1}}{e^z - 1} dz = \Gamma(x)\varsigma(x) \;\; (x > 1)\,. \qquad (6'')$$

აქ $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ არის გამა-ფუნქცია, $\varsigma(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^x}$ - რიმანის ძეტა-ფუნქცია. მოვიყვანოთ ამ ფუნქციების მნიშვნელობები, რომლებიც შეესაბამება (6) და (7) გამოსახულებებში შემავალ ინტეგრალებს:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,,\; \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}\,; \qquad (7')$$

$$\varsigma\left(\frac{3}{2}\right) = 2{,}612\,,\; \varsigma\left(\frac{5}{2}\right) = 1{,}341\,. \qquad (7'')$$

4. ფერმი-გაზი აბსოლუტურ ნულზე. ფერმის დონე.

განვიხილოთ ფერმი-გაზი, კერძოდ, გადაგვარებული ელექტრონული გაზი (მაგალითად, თავისუფალი ელექტრონების გაზი ლითონში) აბსოლუტურ ნულზე. ორი მოთხოვნის – ენერგიის მინიმუმისა და პაულის პრინციპის დაკმაყოფილების აუცილებლობა განაპირობებს იმას, რომ ელექტრონები ავსებენ ენერგეტიკულ მდგომარეობებს უმცირესი (ნულოვანი) მნიშვნელობიდან გარკვეულ უდიდეს მნიშვნელობამდე, რომელიც განისაზღვრება გაზში ელექტრონთა რიცხვით (ფრენკელი, 1928წ).

ორჯერადი სპინური გადაგვარების ($s=1/2$, $2s+1=2$) გათვალისწინებით V მოცულობაში იმპულსის $(p, p+dp)$ ინტერვალის შესაბამისი მნიშვნელობებით მოძრავი ელექტრონების კვანტურ მდგომარეობათა რიცხვი გამოისახება შემდეგნაირად:

$$dN_P = 2\frac{V\cdot 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{8}$$

ელექტრონები ავსებენ ყველა მდგომარეობას სასაზღვრო p_F მნიშვნელობამდე. p_F სიდიდეს უწოდებენ იმპულსის სივრცეში ფერმი-სფეროს რადიუსს – ფერმის იმპულსს.

(8) გამოსახულების გამოყენებით მარტივად გამოითვლება ელექტრონთა რიცხვი:

$$N = 2\frac{V\cdot 4\pi}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{Vp_F^3}{3\pi^2\hbar^3}, \tag{9}$$

საიდანაც

$$p_F = (3\pi^2)^{1/3}\hbar\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3} = (3\pi^2)^{1/3}\hbar n^{1/3}. \tag{10}$$

სასაზღვრო ენერგია ანუ ფერმის ენერგია (ფერმის დონე) შემდეგნაირად ჩაიწერება [2]:

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} = (3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m}n^{2/3}. \tag{11}$$

ფერმის დონეს მარტივი თერმოდინამიკური აზრი აქვს. $T\to 0$ ზღვარში ფერმი-დირაკის განაწილების ($4'$) ფუნქცია საფეხუროვან ფუნქციად გადაიქცევა:

$$\bar{n}(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & \varepsilon < \mu(0) = \varepsilon_F \\ 0, & \varepsilon > \mu(0) = \varepsilon_F \end{cases} \tag{11'}$$

აბსოლუტურ ნულზე ქიმიური $\mu(0)$ პოტენციალი ემთხვევა ფერმის დონეს. ელექტრონული გაზის ენერგია მიიღება $p^2/2m$ კინეტიკური ენერგიის კვანტურ მდგომარეობათა (8) რიცხვზე ნამრავლის ინტეგრებით ნულიდან იმპულსის p_F მნიშვნელობამდე:

$$E_0 = 2 \cdot \frac{V \cdot 4\pi}{2m(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} p^4 dp = \frac{V p_F^5}{10 m \pi^2 \hbar^3}. \qquad (12)$$

(9) და (10) გამოსახულებების გათვალისწინებით აბსოლუტურ ნულზე ელექტრონული გაზის ენერგია შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$E_0 = \frac{3}{5}\left(3\pi^2\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} n^{2/3} \cdot N. \qquad (12')$$

(12′) გამოსახულების ფერმის ენერგიის (11) მნიშვნელობასთან შედარება გვიჩვენებს, რომ აბსოლუტურ ნულზე ელექტრონის საშუალო ენერგია ε_F სიდიდის რიგისაა:

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{E_0}{N} = \frac{3}{5}\varepsilon_F. \qquad (13)$$

(11) და (13) ფორმულებიდან ჩანს, რომ ერთი ნაწილაკის (ელექტრონის) საშუალო ენერგია დამოკიდებულია ნაწილაკთა კონცენტრაციაზე ($\bar{\varepsilon}_0 \approx \varepsilon_F \sim n^{2/3}$). ეს შედეგია ნაწილაკების მოძრაობაში კვანტური კორელაციისა – პაულის პრინციპისა.

5. ფერმი-გაზის ენერგია და სითბოტევადობა.

ფერმი-გაზის მდგომარეობა უმნიშვნელოდ განსხვავდება აბსოლუტური ნულის შესაბამისი მდგომარეობისგან მოცემული სიმკვრივისთვის საკმაოდ დაბალ ტემპერატურებზე:

$$k_B T << \varepsilon_F. \qquad (14)$$

(14) პირობა, როგორც მოსალოდნელი იყო, ემთხვევა გაზის ძლიერი გადაგვარების პირობას:

$$T << T_0. \qquad (14')$$

მართლაც, (3) და (11) გამოსახულებების შედარება გვიჩვენებს, რომ კელვინებში გაზომილი ε_F ფერმის დონე რიგით ემთხვევა T_0 ტემპერატურას:

$$\mu(0) = \varepsilon_F \equiv k_B T_F \approx k_B T_0 \approx \frac{\hbar^2}{m} n^{2/3} \qquad (15)$$

აბსოლუტური ნულის მახლობელ ტემპერატურებზე ($T << T_F$) ძლიერ გადაგვარებულ ფერმი-გაზში (ელექტრონების ფერმი-გაზში) ნაწილაკთა (ელექტრონთა) მცირე რიცხვი გადადის $p < p_F$ მდგომარეობიდან $p > p_F$ მდგომარეობაში. ასეთ ნაწილაკთა რიცხვი დამოკიდებულია ტემპერატურაზე. ფერმიონების გაზის აღგზნება ნიშნავს თავისუფალი მდგომარეობების – "ხვრელების" ($p < p_F$ იმპულსით) და ნაწილაკების ($p > p_F$ იმპულსით) გაჩენას. თუ უცვლელია ნაწილაკთა N რიცხვი, მაშინ

უმარტივესი (ელემენტარული) აღგზნება შეიძლება იყოს მხოლოდ ასეთი: წყვილის – ნაწილაკისა და "ხვრელის" გაჩენა. შესაძლებელია აღგზნებების გაქრობა (ანიჰილაცია): ნაწილაკი იკავებს $p < p_F$ იმპულსის შესაბამის თავისუფალ მდგომარეობას – ქრება ნაწილაკიცა და ხვრელიც.

ძირითადი მდგომარეობის E_0 ენერგიიდან ათვლილი ფერმი-გაზის E ენერგია აბსოლუტური ნულის მახლობელ ტემპერატურებზე შეგვიძლია შევაფასოთ მარტივი ფიზიკური მოსაზრებით. ძლიერი გადაგვარების $(T << T_F)$ პირობებში სითბოტევადობაში მონაწილეობის მიღება შეუძლიათ მხოლოდ ფერმის განაწილების მრუდზე ε_F ფერმის დონის მახლობლად $k_B T$ რიგის ვიწრო განრთხმის ზოლის შესაბამის ნაწილაკებს (ელექტრონებს), რადგან მხოლოდ მათ შეუძლიათ სითბური აღგზნება. ასეთ ელექტრონთა რიცხვი რიგით არის

$$N(k_B T/\varepsilon_F) \equiv N(T/T_F).$$

ამასთან თითოეულის მათგანის ენერგიის ნაზრდი სითბური მოძრაობის $k_B T$ საშუალო ენერგიის რიგისაა. აქედან გამომდინარეობს, რომ მთელი სისტემის ენერგიის ნაზრდი რიგით არის

$$E - E_o \approx N(k_B T/\varepsilon_F) k_B T = N \frac{1}{\varepsilon_F} k_B^2 T^2 = N k_B (T/T_F) T\,, \tag{16}$$

ხოლო სითბოტევადობა

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} \approx N \frac{1}{\varepsilon_F} k_B^2 T = N k_B (T/T_F). \tag{17}$$

(16) და (17) გამოსახულებები რიგით ემთხვევა (7) ფორმულის (ზედა ნიშნით) საშუალებით გამოთვლილ ენერგიისა და სითბოტევადობის დაბალტემპერატურულ გამოსახულებებს ფერმი-გაზისათვის (გადაგვარებული ელექტრონული ფერმი-გაზისათვის) [2]:

$$E = \frac{3}{5} N\varepsilon_F + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3} N \frac{1}{\varepsilon_F} k_b^2 T^2 \approx N k_B \left(T_F + \frac{T}{T_F} T\right), \tag{18′}$$

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3} \frac{m}{\hbar^2} N n^{-2/3} k_B^2 T \approx N k_B (T/T_F). \tag{18″}$$

აქ გათვალისწინებულია $(6')$ ინტეგრალი და $(7')$, $(7'')$ რიცხვითი მნიშვნელობები.

როგორც ვხედავთ, დაბალ $(T << T_F)$ ტემპერატურებზე ფერმიონების (ელექტრონების) კვანტური თვისებები ვლინდება, კერძოდ იმით, რომ ტემპერატურის შემცირებისას ფერმი-გაზის სითბოტევადობა ტემპერატურის პროპორციულად მცირდება (გავიხსენოთ, რომ ბოლცმანის კლასიკური გაზის სითბოტევადობა არაა დამოკიდებული ტემპერატურაზე).

6. ბოზე-გაზი აბსოლუტურ ნულზე. ბოზე-კონდენსაცია.

განვიხილოთ ბოზე-გაზის თვისებები. მოცემული სიმკვრივის პირობებში ტემპერატურის შემცირებისას (6) განტოლებით (ქვედა ნიშნით) განსაზღვრული μ ქიმიური პოტენციალი, ნიშნით უარყოფითი, მოდულით მცირდება და აღწევს ნულოვან მნიშვნელობას შემდეგი განტოლებით განსაზღვრულ T_B ტემპერატურაზე:

$$\frac{N}{V}=\frac{(2s+1)(mk_BT_B)^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty\frac{\sqrt{z}}{e^z-1}dz\,. \tag{19}$$

$(6'')$ ინტეგრალია და $(7')$, $(7'')$ რიცხვითი მნიშვნელობების გათვალისწინებით მიიღება [2]:

$$T_B=\frac{3{,}31}{(2s+1)^{2/3}}\frac{\hbar^2}{mk_B}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}\approx\frac{\hbar^2}{mk_B}n^{2/3}. \tag{20}$$

(3) ფორმულასთან შედარება გვიჩვენებს, რომ T_B ტემპერატურა გადაგვარების T_0 ტემპერატურის რიგისაა: $T_B\approx T_0$.

$0<T<T_B$ ინტერვალში აღგზნებულ $(\varepsilon>0)$ ნაწილაკთა რიცხვი განისაზღვრება (6) ფორმულით (ქვედა ნიშნით), თუ ჩავთვლით $\mu=0$.

$$N_{\varepsilon>0}=\frac{(2s+1)V(mk_BT)^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty\frac{\sqrt{z}}{e^z-1}dz\,. \tag{21}$$

ამ ინტეგრალში $\varepsilon\neq 0$. სინამდვილეში კი ტემპერატურის შემცირებისას ნაწილაკები უნდა გროვდებოდნენ უმცირესი ენერგიის $(\varepsilon=0)$ შესაბამის მდგომარეობაში, სანამ $T=0$ ტემპერატურაზე ყველა ნაწილაკი არ აღმოჩნდება ამ მდგომარეობაში (გარკვეული აზრით, ასე ვლინდება ნაწილაკთა შორის კვანტური კორელაცია). $\varepsilon=0$ მდგომარეობაში ნაწილაკთა დაგროვებას უწოდებენ ბოზე-აინშტაინის კონდენსაციას (იგულისხმება "იმპულსურ სივრცეში კონდენსაცია", არავითარი რეალური კონდენსაცია არ ხდება გაზში). ამასთან დაკავშირებით T_B ტემპერატურას უწოდებენ ბოზე-კონდენსაციის ტემპერატურას. ამ ტემპერატურაზე უფრო დაბალ ტემპერატურებზე ჩნდებიან $\varepsilon=0$ ენერგიის შესაბამისი ნაწილაკები, მათი რიცხვია

$$N_{\varepsilon=0}=N-N_{\varepsilon>0}\,. \tag{22}$$

(19), (20), (21) და (22) გამოსახულებების საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$N_{\varepsilon>0}(T)=N(T/T_B)^{3/2}\ \text{ და }\ N_{\varepsilon=0}(T)=N\left[1-(T/T_B)^{3/2}\right]. \tag{23}$$

ამ ფორმულებიდან ნათლად ჩანს ზღვრული მნიშვნელობები:

ა) თუ $T=0$, $N_{\varepsilon>0}=0$ და $N_{\varepsilon=0}=N$.

ბ) ტემპერატურის გაზრდით იზრდება აღგზნებულ $(\varepsilon > 0)$ ნაწილაკთა რიცხვი $T^{3/2}$ სიდიდის პროპორციულად. ბოზე-კონდენსაციის T_B ტემპერატურაზე ყველა ნაწილაკი გადადის აღგზნებულ მდგომარეობაში: $N_{\varepsilon=0}(T_B) = 0$ და $N_{\varepsilon>0}(T_B) = N$.

$T > T_B$ ტემპერატურებზე ყველა ნაწილაკი აღგზნებულ მდგომარეობაშია. მათი განაწილება ენერგიის მიხედვით გამოისახება ბოზე-აინშტაინის $(4'')$ ფუნქციიდან გამომდინარე $(5'')$ გამოსახულებით (ქვედა ნიშნითა და μ პოტენციალის უარყოფითი მნიშვნელობით).

$T < T_B$ ტემპერატურებზე ბოზე-გაზის ენერგია, ცხადია, განისაზღვრება აღგზნებულ მდგომარეობებში $(\varepsilon > 0)$ მყოფი ნაწილაკებით. თუ (7) ფორმულაში ჩავსვამთ $\mu = 0$, ენერგიისთვის შემდეგ გამოსახულებას მივიღებთ.

$$E = \frac{(2s+1)V(mk_BT)^{3/2}T}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty \frac{z^{3/2}}{e^z - 1}dz\,. \qquad (24)$$

7. ბოზე-გაზის ენერგია და სითბოტევადობა.

$(6'')$ ინტეგრალისა და $(7')$, $(7'')$ რიცხვითი მნიშვნელობების გათვალისწინებით ბოზე-გაზის ენერგია (24) შემდეგნაირად ჩაიწერება [2]:

$$E = 0{,}128(2s+1)V\frac{m^{3/2}}{\hbar^3}(k_BT)^{5/2} \qquad (25)$$

ანუ

$$E = 0{,}770Nk_BT(T/T_B)^{3/2}\,. \qquad (25')$$

ენერგიის ტემპერატურით გაწარმოებით მიიღება სითბოტევადობა:

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{5}{2}\frac{E}{T} = \frac{5}{2}\cdot 0{,}128(2s+1)Vk_B\frac{m^{3/2}}{\hbar^3}(k_BT)^{3/2} = \frac{5}{2}\cdot 0{,}770Nk_B(T/T_B)^{3/2}\,. \qquad (26)$$

ვხედავთ, რომ ბოზე-ნაწილაკების კვანტური თვისებები ვლინდება, კერძოდ, ბოზე-გაზის სითბოტევადობის $T^{3/2}$ სიდიდის პროპორციულად შემცირებით, როდესაც მცირდება ტემპერატურა (იგულისხმება დაბალი ტემპერატურები, $T < T_B$). ტემპერატურის აბსოლუტური ნულისკენ მისწრაფებისას ბოზე-გაზის სითბოტევადობაც ნულისკენ მიისწრაფის.

დასასრულს შევნიშნოთ, რომ კვანტურ გაზში ელემენტარულ აღგზნებებს (ნაწილაკებსა და ხვრელებს ფერმი-გაზში, ხოლო $\varepsilon > 0$ ენერგიის შესაბამის ნაწილაკებს ბოზე-გაზში) უწოდებენ კვაზინაწილაკებს [3]. მათი რიცხვი არ ინახება – ტემპერატურის შეცვლით იცვლება.

8. დასკვნა

როგორც ფერმი-გაზში, ისევე ბოზე-გაზში ერთი დამახასიათებელი ტემპერატურაა – გადაგვარების ტემპერატურა: $T_F \approx T_B \approx T_o \approx (\hbar^2/mk_B)n^{2/3}$ (მხოლოდ m და n სიდიდეების ფუნქცია).

ჩვეულებრივი გაზები ნორმალურ პირობებში ($T = 300K$) არაა გადაგვარებული. მაგალითად, წყალბადის გაზისთვის ($n \approx 10^{19}$ სმ$^{-3}$) $T_0 \sim 1K$.

ფოტონური გაზი ყოველთვის გადაგვარებულია ($T_0 \to \infty$, რადგან ფოტონის უძრაობს მასა ნულის ტოლია) და აიწერება ბოზე-აინშტაინის განაწილების ფუნქციით (როცა $\mu = 0$), ე.წ. პლანკის ფუნქციით.

ლითონში ელექტრონული გაზი წარმოადგენს გადაგვარებული ფერმი-გაზის მაგალითს, რადგან ჩვეულებრივ პირობებში ($T = 300K$, $n \approx 10^{22}$ სმ$^{-3}$) $T_F \sim 10^4 K$.

დაბალ ტემპერატურებზე ($T << T_0$) ფერმი-გაზის სითბოტევადობა ტემპერატურის პროპორციულია, ხოლო ბოზე-გაზისა – $T^{3/2}$ სიდიდის პროპორციული.

ტემპერატურის აბსოლუტური ნულისკენ მისწრაფებისას კვანტური იდეალური გაზის სითბოტევადობა ნულისკენ მიისწრაფის.

მაღალ ტემპერატურებზე $(T >> T_0)$ კვანტური კორელაცია უმნიშვნელოა – გაზი ამჟღავნებს კლასიკური გაზის თვისებებს ($E = N\bar{\varepsilon}$ - თანაბარი განაწილების კანონი, ამასთან ენერგია ტემპერატურის წრფივი ფუნქციაა, ხოლო სითბოტევადობა - მუდმივი).

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. Ансельм А.И. "Основы статистической физики и термодинамики", Москва, Наука, 1979.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. "Статистическая физика", ч.1, Москва, Физматлит, 2000.
3. Каганов М.И., Лифшиц И.М. "Квазичастицы", Москва, Наука, 1989.

სტატია მიღებულია: 2004-06-12
სტატია მიღებულია გადამუშავების შემდეგ: 2004-06-25