ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТОРАЛЬНОГО ПОВЕДЕНИЯ

[1]Нугзар Схиртладзе, [2]Павел Гиоргадзе
[1,2] Тбилисский Государственный Университет им. И. Джавахишвили

Аннотация

В представленной работе предложена одна модель, описывающая электоральное поведение и приведено два ее уточнения. Первое основывается на том соображении, что в разных социальных, культурных, возрастных и других возможных категориях общества возможно зафиксирование принципиально разного среднего уровня готовности индивида поменять свою политическую ориентацию от одного в пользу другого кандидата. Второе уточнение основано на том соображении, что в разных регионах страны избирательные кампании проводятся с различной интенсивностью. Для рассмотренной модели приведен алгоритм решения и доказана теорема о сходимости решения.

Ключевые слова: Модель Электорального Поведения, Численный Анализ.
Классификация: 65M06.

Введение:

Под термином «Электоральные Модели» подразумеваются такие математические модели, которые описывают (моделируют) поведение избирателей во время выборов в конкретные государственные или общественные органы с участием конкретных кандидатов. «Предком» подобных моделей может считаться проведенный в 1969-1984 гг. в конгрессе США многомерный статистический анализ годовой динамики выборов, хотя в этом конкретном случае речь совершенно не идет о строгой математической модели. Результат опубликованного статистического анализа заключался в том, что на протяжении относительно большого интервала времени был дан типологический анализ исходов выборов (см. [1]). Математические модели социального типа описаны в работах [2-5].

В идеальном случае электоральное поведение населения в первую очередь представляет социально-политическое поведение, которое отображает состояние существующих в обществе политических позиций и социально-политических институтов (общественных референдумов, митингов, партий, движений), а также динамику их изменений под воздействием тех или иных факторов.

Данная работа ставит целью попытку модельного описания динамики процесса выборов. Под словом «описание» подразумевается не столько реализация избирательных технологий, сколько описание той ситуации, которая возникает в какой-нибудь стране во время проведения какого-то исторического выбора некоторой довольно крупной этнической, социальной или политической группировкой.

В представленной работе предложена одна модель, описывающая электоральное поведение и приведено два ее уточнения. Первое основывается на том соображении, что в разных социальных, культурных, возрастных и других возможных категориях общества возможно зафиксирование принципиально разного среднего уровня готовности индивида поменять свою политическую ориентацию от одного в пользу другого кандидата. Более точно, в обществе, разделенном на части хотя бы только по возрастному признаку населения, молодое поколение легче и эмоциональнее меняет свою политическую позицию, в то время как старшее поколение более консервативно в своем политическом выборе и относительно инертно с точки зрения перемены мнения, хотя и здесь происходят массивные перетоки с почти полярным направлением.

Второе уточнение основано на том соображении, что в разных регионах страны избирательные кампании проводятся с различной интенсивностью. В частности, в разных регионах страны кандидаты пользуются разным авторитетом, кроме этого, в некоторых районах процесс проведения предвыборной кампании вообще затруднен, имеются в виду некоторые удаленные области страны, где из-за разных причин телевидение, пресса и другие средства для получения информации работают с меньшей эффективностью.

Для рассмотренной модели приведен алгоритм решения и доказана теорема о сходимости решения.

1. Постановка задачи: Рассмотрим описывающую электоральное поведение следующую модель: Допустим, в выборах принимает участие n кандидатов $X_1, X_2, ..., X_n$. Общее число избирателей обозначим через $B(t)$. Введем следующие обозначения:

$B_{X_i}(t)\,(i = 1,2,...,n)$ - количество избирателей, которые в момент времени t отдают предпочтение X_i кандидату,

$B_{X_0}(t)$ - количество избирателей, которые в момент времени t не отдают предпочтение ни одному из кандидатов.

Тогда, разумеется, $B(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{X_i}(t)$.

Допустим, что в каждый момент времени t, $f(t)$ является интенсивностью изменения общего количества избирателей. Разделим $f(t)$ на две части: $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$, где $f_1(t)$ является интенсивностью роста количества избирателей в момент t, а $f_2(t)$ является интенсивностью спада количества избирателей в момент t. Тогда понятно, что $\frac{dB(t)}{dt} = f(t) = f_1(t) - f_2(t)$

Допустим, $B_{X_{i,j}}(t)$ $(i, j = 1,2,...,n;\quad i \neq j)$ является интенсивностью перетока избирателей из числа сторонннников кандидата X_i на сторону кандидата X_j в момент времени t.

$B_{X_{i,0}}(t)$ $(i = 1,2,...,n)$ является интенсивностью перетока избирателей из числа сторонннников кандидата X_i в часть избирателей, не отдающих предпочтение ни одному из кандидатов в момент времени t.

$B_{X_{0,i}}(t)$ $(i = 1,2,...,n)$ является интенсивностью перетока избирателей, не отдающих предпочтение ни одному из кандидатов, на сторону кандидата X_i в момент времени t.

$f_{1,j}(t)$ является интенсивностью роста количества избирателей, пришедшееся на долю кандидата X_j в момент времени t. Понятно, что $f_1(t) = \sum_{j=0}^{n} f_{1,j}(t)$.

Соответственно, $f_{2,j}(t)$ является интенсивностью спада количества избирателей, пришедшееся на долю кандидата X_j в момент времени t. Понятно, что $f_2(t) = \sum_{j=0}^{n} f_{2,j}(t)$.

С учетом этих обозначений понятно, что динамика электорального поведения описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dB_{X_0}(t)}{dt} = \sum\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq 0}}^{n}\left(B_{X_{i,0}}(t) - B_{X_{0,i}}(t)\right) + f_{1,0}(t) - f_{2,0}(t), \\ B_{X_0}(0) = B_{00}; \\ \dfrac{dB_{X_1}(t)}{dt} = \sum\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq 1}}^{n}\left(B_{X_{i,1}}(t) - B_{X_{1,i}}(t)\right) + f_{1,1}(t) - f_{2,1}(t), \\ B_{X_1}(0) = B_{10}; \\ \bullet \qquad \bullet \qquad \bullet \\ \dfrac{dB_{X_n}(t)}{dt} = \sum\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq n}}^{n}\left(B_{X_{i,n}}(t) - B_{X_{n,i}}(t)\right) + f_{1,n}(t) - f_{2,n}(t), \\ B_{X_n}(0) = B_{n0}. \end{cases} \tag{1}$$

где $B_{00}, B_{10}, ..., B_{n0}$ является количеством сторонников соответственно ниодного и $X_1, ..., X_n$ кандидатов в момент времени $t = 0$.

Введем дополнительные обозначения, с использованием которых мы сможем описать динамику электорального поведения при помощи более доступных данных.

$k \in [0,1]$ является усредненным коэффициентом шаткости (неустойчивости) избирателей.

$\sigma_{X_i}(t)$ $i = 1,2,...,n$ является функцией эффективности избирательной кампании X_i кандидата в каждый момент времени t.

$\sigma_{X_0}(t)$ является функцией, определяющей уровень нигилизма, недоверия среди избирателей в каждый момент времени t. Эта функция способствует росту количества избирателей, которые не поддерживают ни одного кандидата.

После этого определим следующие функции:

$$\eta_{X_{i,j}}(t) = \begin{cases} \sigma_{X_j}(t) - \sigma_{X_i}(t), & \sigma_{X_j}(t) > \sigma_{X_i}(t), \\ 0 & \sigma_{X_j}(t) \le \sigma_{X_i}(t), \end{cases} \quad i, j = 0,1,..,n; \quad i \neq j;$$

Будем считать, что:

$$B_{X_{i,j}}(t) = k\eta_{X_{i.j}}(t) B_{X_i}(t), \quad i, j = 0,1,...,n; \quad i \neq j,$$

$$f_{1,j}(t) = \frac{\sigma_j(t)}{\sum\limits_{i=0}^{n}\sigma_i(t)} f_1(t), \quad j = 0,...,n$$

$$f_{2,j}(t) = \frac{B_j(t)}{\sum\limits_{i=0}^{n}B_i(t)} f_2(t), \quad j = 0,...,n$$

иначе говоря, будем полагать, что интенсивность перетока избирателей из числа сторонннников кандидата X_i на сторону кандидата X_j в момент времени t пропорциональна коэффициенту неустойчивости избирателей и функции $\eta_{X_{i,j}}(t)$, интенсивность роста количества избирателей, пришедшееся на долю кандидата X_j в момент времени t пропорциональна коэффициенту эффективности проводимой избирательной кампании кандидата, а интенсивность спада количества избирателей, пришедшееся на долю кандидата X_j в момент времени t пропорциональна количеству сторонников кандидата в этот момент.

Подставим эти значения в систему уравнений (1), тем самым мы получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dB_{X_0}(t)}{dt} = k\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{n}\left(\eta_{X_{j,0}}(t)B_{X_j} - \eta_{X_{0,j}}(t)B_{X_0}\right) + \dfrac{\sigma_{X_0}(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n}\sigma_{X_j}(t)} f_1(t) - \dfrac{B_{X_0}(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n}B_{X_j}(t)} f_2(t), \\ B_{X_0}(0) = B_{00}; \\ \dfrac{dB_{X_1}(t)}{dt} = k\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{n}\left(\eta_{X_{j,1}}(t)B_{X_j} - \eta_{X_{1,j}}(t)B_{X_1}\right) + \dfrac{\sigma_{X_1}(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n}\sigma_{X_j}(t)} f_1(t) - \dfrac{B_{X_1}(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n}B_{X_j}(t)} f_2(t), \\ B_{X_1}(0) = B_{10}; \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \dfrac{dB_{X_n}(t)}{dt} = k\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq n}}^{n}\left(\eta_{X_{j,n}}(t)B_{X_j} - \eta_{X_{n,j}}(t)B_{X_n}\right) + \dfrac{\sigma_{X_n}(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n}\sigma_{X_j}(t)} f_1(t) - \dfrac{B_{X_n}(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n}B_{X_j}(t)} f_2(t), \\ B_{X_n}(0) = B_{n0}. \end{cases}$$

Полученную систему уравнений перепишем в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dB_{X_0}(t)}{dt} = -\left(\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{n} k\eta_{X_{0,j}}(t) + \dfrac{f_2(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n}B_{X_j}(t)}\right)B_{X_0} + k\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{n}\eta_{X_{j,0}}(t)B_{X_j} + \dfrac{\sigma_{X_0}(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n}\sigma_{X_j}(t)} f_1(t), \\ B_{X_0}(0) = B_{00}; \\ \dfrac{dB_{X_1}(t)}{dt} = -\left(\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{n} k\eta_{X_{1,j}}(t) + \dfrac{f_2(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n}B_{X_j}(t)}\right)B_{X_1} + k\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{n}\eta_{X_{j,1}}(t)B_{X_j} + \dfrac{\sigma_{X_1}(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n}\sigma_{X_j}(t)} f_1(t), \\ B_{X_1}(0) = B_{10}; \\ \bullet \qquad \bullet \qquad \bullet \\ \dfrac{dB_{X_n}(t)}{dt} = -\left(\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq n}}^{n} k\eta_{X_{n,j}}(t) + \dfrac{f_2(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n}B_{X_j}(t)}\right)B_{X_n} + k\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq n}}^{n}\eta_{X_{j,1}}(t)B_{X_j} + \dfrac{\sigma_{X_n}(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n}\sigma_{X_j}(t)} f_1(t), \\ B_{X_n}(0) = B_{n0}. \end{cases} \qquad (2)$$

Несмотря на то, что в системе уравнений (2) неизвестные функции содержатся в знаменателе, она является системой линейных дифференциальных уравнений. Действительно, вспомним, что $\sum_{j=0}^{n} B_{X_j}(t) = B(t)$, в то же время,

$$\frac{dB(t)}{dt} = f(t).$$

отсюда получим, что

$$B(t) = B(0) + \int_0^t f(s)ds = \sum_{j=0}^{n} B_{x_j}(0) + \int_0^t f(s)ds, \tag{3}$$

а это известная функция. С учетом равенства (3) система уравнений (2) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dB_{X_0}(t)}{dt} = -\left(\sum\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{n} k\eta_{X_{0,j}}(t) + \dfrac{f_2(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n} B_{x_j}(0) + \int\limits_0^t f(s)ds} \right) B_{X_0} + k\sum\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{n} \eta_{X_{j,0}}(t) B_{X_j} + \dfrac{\sigma_{X_0}(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n} \sigma_{X_j}(t)} f_1(t), \\ B_{X_0}(0) = B_{00}; \\ \dfrac{dB_{X_1}(t)}{dt} = -\left(\sum\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{n} k\eta_{X_{1,j}}(t) + \dfrac{f_2(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n} B_{x_j}(0) + \int\limits_0^t f(s)ds} \right) B_{X_1} + k\sum\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{n} \eta_{X_{j,1}}(t) B_{X_j} + \dfrac{\sigma_{X_1}(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n} \sigma_{X_j}(t)} f_1(t), \\ B_{X_1}(0) = B_{10}; \\ \bullet \qquad \bullet \qquad \bullet \\ \dfrac{dB_{X_n}(t)}{dt} = -\left(\sum\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq n}}^{n} k\eta_{X_{n,j}}(t) + \dfrac{f_2(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n} B_{x_j}(0) + \int\limits_0^t f(s)ds} \right) B_{X_n} + k\sum\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq n}}^{n} \eta_{X_{j,1}}(t) B_{X_j} + \dfrac{\sigma_{X_n}(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n} \sigma_{X_j}(t)} f_1(t), \\ B_{X_n}(0) = B_{n0}. \end{cases} \tag{4}$$

Полученная система уравнений представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений. Перепишем эту систему в матричном виде, получим:

$$\frac{d\vec{B}(t)}{dt} = A(t)\vec{B}(t) + \vec{f}(t), \quad \vec{B}(0) = \vec{B}_0, \tag{5}$$

где

$$A(t)=\begin{pmatrix} -\left(k\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{n}\eta_{X_{0,j}}(t)+\dfrac{f_2(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n}B_{x_j}(0)+\int\limits_0^t f(s)ds}\right) & k\eta_{X_{1,0}}(t) & \dots & k\eta_{X_{j,0}}(t) \\ k\eta_{X_{1,0}}(t) & -\left(k\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{n}\eta_{X_{1,j}}(t)+\dfrac{f_2(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n}B_{x_j}(0)+\int\limits_0^t f(s)ds}\right) & \dots & k\eta_{X_{j,0}}(t) \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ k\eta_{X_{n,0}}(t) & k\eta_{X_{n,0}}(t) & \dots & -\left(k\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq n}}^{n}\eta_{X_{n,j}}(t)+\dfrac{f_2(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n}B_{x_j}(0)+\int\limits_0^t f(s)ds}\right) \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

а $\vec{B}(t)=\left(B_{X_0}, B_{X_1},..., B_{X_n}\right)^T$, $\vec{B}_0=\left(B_{X_0\,0}, B_{X_1\,0},..., B_{X_n\,0}\right)^T$ и $\vec{f}(t)=\left(f_{1,0}, f_{1,1},..., f_{1,n}\right)^T$.

2. Уточнение модели: Введем следующее уточнение: Допустим, коэффициент k нормирован и расположен на сегменте $[0,1]$. Разделим этот сегмент на следующие N составляющих частей: $[k_{i-1}, k_i]$ $i=1,2,...,m,$ $k_0=0,$ $k_m=1.$

Теперь проведем еще одно уточнение модели: В частности, все количество избирателей разделим по группам относительно проводимой по отношению к ним избирательной кампании. Т.е. мы получим $\sigma^l_{X_0}(t),\sigma^l_{X_1}(t),...,\sigma^l_{X_1}(t)$ $l=1,2,...,s,$ функции, определяющие «мощность» избирательных кампаний. После этого определим следующие функции:

$$\eta^l{}_{X_{i,j}}(t)=\begin{cases}\sigma^l{}_{X_i}(t)-\sigma^l{}_{X_j}(t), & \sigma^l{}_{X_i}(t)>\sigma^l{}_{X_j}(t),\\ 0 & \sigma^l{}_{X_i}(t)<\sigma^l{}_{X_j}(t),\end{cases} \quad i,j=0,1,..,n; \quad i\neq j; \quad l=1,2,...,s.$$

Предусмотрим оба этих уточнения и введем следующие обозначения:

$B^{i.j}_{X_l}(t)$ $(i=1,2,...,m;$ $j=1,2,...,s;$ $l=1,2,...,n)$ является количеством избирателей с коэффициентом неустойчивости, расположенном на сегменте $[k_{i-1}, k_i]$, которые в момент времени t отдают предпочтение X_i кандидату и по отношению к которым проводится избирательная кампания мощностью в $\sigma^j_{X_l}(t)$.

$B^{i.j}_{X_0}(t)$ $(i=1,2,...,m;$ $j=1,2,...,s)$ является количеством избирателей с коэффициентом неустойчивости, расположенном на сегменте $[k_{i-1}, k_i]$, которые в момент времени t не отдают предпочтение ни одному из кандидатов и по отношению к которым проводится избирательная кампания мощностью в $\sigma^j_{X_l}(t)$.

Тогда для описания электорального поведения мы получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dB_{X_0}^{i,j}(t)}{dt} = -\left(\sum\limits_{\substack{l=0\\ l\neq 0}}^{n} \xi_i \eta_{X_{0,l}}^{j}(t) + \dfrac{f_2(t)}{\sum\limits_{l=0}^{n} B_{X_l}^{i,j}(0) + \int\limits_0^t f(s)ds} \right) B_{X_0} + \xi_i \sum\limits_{\substack{l=0\\ l\neq 0}}^{n} \eta_{X_{l,0}}^{j}(t) B_{X_l}^{i,j}(t) + \dfrac{\sigma_{X_0}^{j}(t)}{\sum\limits_{l=0}^{n} \sigma_{X_l}^{j}(t)} f_1(t), \\ B_{X_0}^{i,j}(0) = B_{00}^{i,j}; \\ \dfrac{dB_{X_1}^{i,j}(t)}{dt} = -\left(\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{n} \xi_i \eta_{X_{1,l}}^{j}(t) + \dfrac{f_2(t)}{\sum\limits_{l=0}^{n} B_{X_l}^{i,j}(0) + \int\limits_0^t f(s)ds} \right) B_{X_1} + \xi_i \sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{n} \eta_{X_{j,1}}(t) B_{X_l}^{i,j} + \dfrac{\sigma_{X_1}^{j}(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n} \sigma_{X_l}^{j}(t)} f_1(t), \\ B_{X_1}^{i,j}(0) = B_{10}^{i,j}; \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \dfrac{dB_{X_n}^{i,j}(t)}{dt} = -\left(\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq n}}^{n} \xi_i \eta_{X_{n,l}}^{j}(t) + \dfrac{f_2(t)}{\sum\limits_{l=0}^{n} B_{X_l}^{i,j}(0) + \int\limits_0^t f(s)ds} \right) B_{X_n} + \xi_i \sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq n}}^{n} \eta_{X_{j,1}}(t) B_{X_l}^{i,j} + \dfrac{\sigma_{X_n}^{j}(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n} \sigma_{X_l}^{j}(t)} f_1(t), \\ B_{X_n}^{i,j}(0) = B_{n0}^{i,j}. \end{cases} \tag{7}$$

где $B_{00}^{i,j}, B_{10}^{i,j}, ..., B_{n0}^{i,j}$ является количеством сторонников соответственно ниодного и $X_1, ..., X_n$ кандидатов с усредненным коэффициентом неустойчивости ξ_i, расположенном на сегменте $[k_{i-1}, k_i]$ в момент времени $t = 0$, по отношению к которым проводятся избирательные кампании мощностью в $\sigma_{X_0}^{j}(t), \sigma_{X_1}^{j}(t), ..., \sigma_{X_n}^{j}(t)$.

Систему уравнений (7) перепишем в матричном виде. Получим следующую систему:

$$\begin{aligned} &\frac{d\overrightarrow{B^{i,j}}(t)}{dt} = A_{i,j}(t)\overrightarrow{B^{i,j}}(t) + \overrightarrow{f_1^{\,j}}(t) \qquad && i = 1,2,...,m, \\ &\overrightarrow{B^{i,j}}(0) = \overrightarrow{B_0^{i,j}}, && j = 1,2,...,s \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$B_0^{i,j} = \left(B_{00}^{i,j}, B_{10}^{i,j}, ..., B_{n0}^{i,j}\right)^T, \quad B^{i,j} = \left(B_{X_0}^{i,j}, B_{X_1}^{i,j}, ..., B_{X_n}^{i,j}\right)^T,$$

$$\overrightarrow{f_1^{\,j}}(t) = \left(\frac{\sigma_{X_0}^{j}(t)}{\sum\limits_{l=0}^{n} \sigma_{X_l}^{j}(t)} f_1(t), \frac{\sigma_{X_1}^{j}(t)}{\sum\limits_{l=0}^{n} \sigma_{X_l}^{j}(t)} f_1(t) ... \frac{\sigma_{X_n}^{j}(t)}{\sum\limits_{l=0}^{n} \sigma_{X_l}^{j}(t)} f_1(t) \right)^T,$$

а матрица функций $A_{i,j}(t)$ определяется следующей формулой:

$$A_{i,j}(t)=\begin{pmatrix} -\left(\sum\limits_{\substack{l=0\\ l\neq 0}}^{n}\xi_i\eta^j_{X_{0,l}}(t)+\dfrac{f_2(t)}{\sum\limits_{l=0}^{n}B^{i,j}_{X_l}(0)+\int\limits_0^t f(s)ds}\right) & \xi_i\eta^j_{X_{1,0}}(t) & \cdots & \xi_i\eta^j_{X_{n,0}}(t) \\ \xi_i\eta^j_{X_{1,0}}(t) & -\left(\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{n}\xi_i\eta^j_{X_{1,l}}(t)+\dfrac{f_2(t)}{\sum\limits_{l=0}^{n}B^{i,j}_{X_l}(0)+\int\limits_0^t f(s)ds}\right) & \cdots & \xi_i\eta^j_{X_{n,1}}(t) \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ \xi_i\eta^j_{X_{1,0}}(t) & \xi_i\eta^j_{X_{n,1}}(t) & \cdots & -\left(\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq n}}^{n}\xi_i\eta^j_{X_{n,l}}(t)+\dfrac{f_2(t)}{\sum\limits_{l=0}^{n}B^{i,j}_{X_l}(0)+\int\limits_0^t f(s)ds}\right) \end{pmatrix} \tag{9}$$

3. Алгоритм Решения Задачи:

Построим сетку:

$$\overline{\omega}_\tau=\left\{t_k=k\tau,\quad k=1,2,...K\quad \tau=\frac{T}{K}\right\}$$

на каждом отрезке $[t_{k-1},t_k]$ рассмотрим следующую последовательность задач:

$$\begin{aligned} &\frac{d\overrightarrow{B^{i,j}_k}(t)}{dt}=A_{i,j}\left(t_{k-1/2}\right)\overrightarrow{B^{i,j}_k}(t)+\vec{f}^{\,j}_1(t), && i=1,2,...,N,\\ & && j=1,2,...,M \\ &\overrightarrow{B^{i,j}_k}(t_{k-1})=\overrightarrow{B^{i,j}_{k-1}}(t_{k-1}), && k=1,2,...,K \end{aligned} \tag{10}$$

где $\overrightarrow{B^{i,j}_0}(t_0)=\overrightarrow{B^{i,j}_0}$.

Допустим, что коэффициенты матрицы $A_{i,j}(t)$ непрерывно дифференцируемы. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\left\|B^{i,j}_k(t)-B^{i,j}(t)\right\|=O(\tau^2),\quad t\in[t_{k-1},t_k],\quad k=1,2,...,K\ , \tag{11}$$

где $\|B(t)\|=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|b_{ij}(t)|$. Решение задачи (10) в каждой $t=t_k$ точке дается следующей формулой:

$$\overrightarrow{B^{i,j}_k}(t_k)=e^{\tau\xi_i A_{i,j}\left(t_{k-1/2}\right)}\overrightarrow{B^{i,j}_k}(t_{k-1})+\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}e^{(t_k-s)A_{i,j}\left(t_{k-1/2}\right)}\overrightarrow{f^{\,j}_1}(s)ds=$$

$$=e^{\tau_i A_{i,j}\left(t_{k-1/2}\right)}e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-3/2}\right)}...e^{\tau A_{i,j}\left(t_{1/2}\right)}\overrightarrow{B^{i,j}_0}+$$

$$\sum_{l=1}^{k}e^{\tau A_{i,jj}\left(t_{k-1/2}\right)}e^{\tau_i A_{i,j}\left(t_{k-3/2}\right)}...e^{\tau A_{i,j}\left(t_{i-1/2}\right)}\int\limits_{t_{l-1}}^{t_l}e^{(t_l-s)A_{i,j}\left(t_{k-1/2}\right)}\overrightarrow{f^{\,j}_1}(s)ds=$$

$$=T^{i,j}_k\overrightarrow{B^{i,j}_0}+\sum_{l=1}^{k}T^{i,j}_{k-l}\overrightarrow{\varphi^{i,j}_{l,k}}, \tag{12}$$

где

$$T^{i,j}_k=e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-1/2}\right)}e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-3/2}\right)}...e^{\tau A_{i,j}\left(t_{1/2}\right)}. \tag{13}$$

$$\overrightarrow{\varphi_{l,k}^{i,j}} = \int_{t_{l-1}}^{t_l} e^{(t_l - s)A_{i,j}\left(t_{k-1/2}\right)} \overrightarrow{f_1^{\,j}}(s)ds. \tag{14}$$

Допустим, что функция $\overrightarrow{f_1^{\,j}}(s)$ дважды непрерывно дифференцируема и в формуле (14) применим квадратурную формулу центральных прямоугольников, тогда мы получим следующую оценку:

$$\left\| \overrightarrow{\varphi_{l,k}^{i,j}} - \overrightarrow{\psi_{l,k}^{i,j}} \right\| = O\left(\tau^3\right), \tag{15}$$

где

$$\overrightarrow{\psi_{l,k}^{i,j}} = \tau e^{\frac{1}{2}\tau_l A_{i,j}\left(t_{k-1/2}\right)} \overrightarrow{f_1^{\,j}}\left(t_{l-1/2}\right).$$

В формуле (12) заменим $\varphi_{l,k}^{i,j}$ на $\psi_{l,k}^{i,j}$ и полученное выражение обозначим как $\overline{B_k^{i,j}}$ тогда ясно, что

$$\overline{B_k^{i,j}} = T_k^{i,j}\overrightarrow{B_0^{i,j}} + \sum_{l=1}^{k} T_{k-l}^{i,j}\overrightarrow{\psi_{l,k}^{i,j}}, \tag{16}$$

С учетом формул (12) и (16) и неравенства (15) легко выводится следующая оценка:

$$\left\| \overrightarrow{B_k^{i,j}} - \overline{B_k^{i,j}} \right\| = O\left(\tau^2\right), \tag{17}$$

Справедливо следующее экспоненциальное разложение:

$$e^A = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A^s}{s!}, \tag{18}$$

Где A является любым линейным ограниченным оператором.

Рассмотрим следующий оператор:

$$L_s^{i,j} = I + \tau A_{i,j}\left(t_{s-1/2}\right) + \frac{1}{2}\tau^2 A_{i,j}^2\left(t_{s-1/2}\right).$$

При помощи этого оператора построим оператор $S_k^{i,j}$, который будет аппроксимировать определенный формулой (13) оператор со вторым порядком точности.

$$S_k^{i,j} = L_k^{i,j} L_{k-1}^{i,j} \ldots L_1^{i,j}. \tag{19}$$

Оценим разницу $S_k^{i,j} - T_k^{i,j}$:

Ясна следующая оценка:

$$\left\| L_k^{i,j} - e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-1/2}\right)} \right\| = O\left(\tau^3\right). \tag{20}$$

На основании равенств (13) и (19) получим следующее разложение:

$$\begin{aligned}
S_k^{i,j} - T_k^{i,j} &= L_k^{i,j} L_{k-1}^{i,j} \ldots L_1^{i,j} - e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-1/2}\right)} e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-3/2}\right)} \ldots e^{\tau A_{i,j}\left(t_{1/2}\right)} = \\
&= L_k^{i,j} L_{k-1}^{i,j} \ldots L_1^{i,j} - e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-1/2}\right)} L_{k-1}^{i,j} \ldots L_1^{i,j} + e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-1/2}\right)} L_{k-1}^{i,j} \ldots L_1^{i,j} - e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-1/2}\right)} e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-3/2}\right)} L_{k-2}^{i,j} \ldots L_1^{i,j} + \\
&+ \ldots + e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-1/2}\right)} e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-3/2}\right)} \ldots e^{\tau A_{i,j}\left(t_{3/2}\right)} L_1^{i,j} - e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-1/2}\right)} e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-3/2}\right)} \ldots e^{\tau A_{i,j}\left(t_{3/2}\right)} e^{\tau A_{i,j}\left(t_{1/2}\right)} = \\
&= \left(L_k^{i,j} - e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-1/2}\right)} \right) L_{k-1}^{i,j} \ldots L_1^{i,j} + e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-1/2}\right)} \left(L_{k-1}^{i,j} - e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-3/2}\right)} \right) L_{k-2}^{i,j} \ldots L_1^{i,j} + \\
&+ \ldots + e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-1/2}\right)} e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-3/2}\right)} \ldots e^{\tau A_{i,j}\left(t_{31/2}\right)} \left(L_1^{i,j} - e^{\tau A_{i,j}\left(t_{1/2}\right)} \right) = \\
&= \sum_{l=0}^{k} S_{l-1}^{i,j} \left(L_l^{i,j} - e^{\tau A_{i,j}\left(t_{l-1/2}\right)} \right) T_{k-l}^{i,j}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Оценим нормы операторов $S_k^{i,j}$ и $T_k^{i,j}$:

$$\left\|S_k^{i,j}\right\| \le \left\|L_k^{i,j}\right\|\left\|L_{k-1}^{i,j}\right\|...\left\|L_1^{i,j}\right\| \le e^{\tau M_k^{i,j}} e^{\tau M_{k-1}^{i,j}}...e^{\tau M_1^{i,j}} \le e^{t_k M_k^{i,j}}, \qquad (22)$$

где $M_l^{i,j} = \left\|A_{i,j}\left(t_{l-1/2}\right)\right\|$, а $M_k^{i,j} = \max\limits_{l=1,2,...,k} M_l^{i,j}$. Аналогично, для $T_k^{i,j}$ получим следующую оценку:

$$\left\|T_k^{i,j}\right\| \le \left\|e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-1/2}\right)}\right\|\left\|e^{\tau A_{i,j}\left(t_{k-3/2}\right)}\right\|...\left\|e^{\tau A_{i,j}\left(t_{1/2}\right)}\right\| \le e^{t_k M_k^{i,j}}. \qquad (23)$$

С учетом неравенств (20), (22) и (23) из равенства (21) получим следующую оценку:

$$\left\|S_k^{i,j} - T_k^{i,j}\right\| \le \sum_{l=2}^{k+1}\left\|S_{l-1}^{i,j}\right\|\left\|L_l^{i,j} - e^{\tau A_{i,j}\left(t_{l-1/2}\right)}\right\|\left\|T_{k-l}^{i,j}\right\| \le$$

$$\le \sum_{l=2}^{k+1} e^{t_{l-1}M_{l-1}^{i,j}}\left\|L_l^{i,j} - e^{\tau A_{i,j}\left(t_{l-1/2}\right)}\right\| e^{t_{k-l}M_{k-l}^{i,j}} = \sum_{l=2}^{k+1} e^{t_{l-1}M_{l-1}^{i,j}} e^{t_{k-l}M_{k-l}^{i,j}} O\left(\tau^3\right) =$$

$$= k e^{t_k M_k^{i,j}} O\left(\tau^3\right) = O\left(\tau^2\right). \qquad (24)$$

Построим следующий вектор:

$$\overrightarrow{V_k^{i,j}} = S_k^{i,j}\overrightarrow{B_0^{i,j}} + \sum_{l=1}^{k} S_{k-l}^{i,j}\overrightarrow{\psi_{l,k}^{i,j}}, \qquad (25)$$

Из формул (16) и (25) получим следующее равенство:

$$\overrightarrow{B_k^{i,j}} - \overrightarrow{V_k^{i,j}} = \left(T_k^{i,j} - S_k^{i,j}\right)\overrightarrow{B_0^{i,j}} + \sum_{l=1}^{k}\left(T_{k-l}^{i,j}\overrightarrow{\psi_{l,k}^{i,j}} - S_{k-l}^{i,j}\overrightarrow{\psi_{l,k}^{i,j}}\right) =$$

$$= \left(T_k^{i,j} - S_k^{i,j}\right)\overrightarrow{B_0^{i,j}} + \sum_{l=1}^{k}\left(T_{k-l}^{i,j} - S_{k-l}^{i,j}\right)\overrightarrow{\psi_{l,k}^{i,j}}. \qquad (26)$$

Оценим $\overrightarrow{\psi_{l,k}^{i,j}}$:

$$\left\|\overrightarrow{\psi_{l,k}^{i,j}}\right\| \le c\tau. \qquad (27)$$

Из равенства (26) с учетом неравенств (24) и (27) получим следующую оценку:

$$\left\|\overrightarrow{B_k^{i,j}} - \overrightarrow{V_k^{i,j}}\right\| = O\left(\tau^2\right).$$

Отсюда с учетом неравенства (11) получим:

$$\left\|\overrightarrow{B^{i,j}}\left(t_k\right) - \overrightarrow{V_k^{i,j}}\right\| = O\left(\tau^2\right)$$

Наконец, была доказана следующая теорема о сходимости приближенного решения:

Теорема: *Если коэффициенты матрицы* $A_{i,j}(t)$ *непрерывно дифференцируемы, а функция* $\overrightarrow{f_1^{\,j}}(t)$ *дважды непрерывно дифференцируема, то тогда справедлово следующее:*

$$\left\|\overrightarrow{B^{i,j}}\left(t_k\right) - \overrightarrow{V_k^{i,j}}\right\| = O\left(\tau^2\right).$$

Из формулы (25) видно, что для решения задачи (10) со вторым порядком точности с помощью рассмотренного алгоритма достатчно вычислить следующие матрицы:

$$S_k^{i,j} = L_0^{i,j}L_1^{i,j}...L_k^{i,j}.$$

Для этого же достаточно вычислить матрицы $L_k^{i,j}$ $\quad l = 1,2,...,k$ и перемножить их друг на друга.

Для вычисления матриц $L_k^{i,j}$ $\quad l = 1,2,...,k$ нужно умножить матрицу на матрицу и затем произвести сложение.

Как видно из вышесказанного, приведенный алгоритм довольно экономичен.

Л И Т Е Р А Т У Р А :

1. V.A. Shvedovsky. Dynamical Model of Electoral Behaviour. Institute of Mathematical Modelling. Russian Academy of Sciences, Vol.12, N.8, 2000.
2. П.С. Краснощеков. Об одной простейшей модели коллективного поведения. Материалы учредительной конференции Росийского научного общества исследования операций. – М.:Вычислительный центр Российской Академии Наук, 1997.
3. А.П. Михайлов, Л.Ф. Юхно. Простейшая модель установления равновесия между двумя ветвями власти. Институт математического моделирования Российской Академии Наук. Том 13, Н.1, 2001.
4. Г. Хакен, Синэнергетика, М.: Мир, 1980.
5. Ф. С. Робертс, Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам, М.: Мир, 1980.