

Метод конечных элементов для решения некоторых задач электродинамики.

Кварацхелия Роман¹, Джобава Роман², Хомасуридзе Ираклий³.
^{1,2,3}Тбилисский Государственный Университет им. И. Джавахишвили

Аннотация

Исследование взаимного влияния между кабелями является одной из важнейших проблем EMC анализа. Ввиду сложности исследуемых проблем исследование представляет из себя довольно трудоёмкую задачу. Для достижения приемлемой точности численного решения требуется представление геометрии исследуемого объекта большим количеством элементов. Применение методов прямого электродинамического анализа к данной проблеме требует больших компьютерных и временных ресурсов.

В работе описан разработанный алгоритм, позволяющий решать задачи с высокой точностью со сравнительно малым числом неизвестных. Это достигается адаптацией сетки к решаемой задаче. Адаптация производится с учетом градиента искомой функции.

Ключевые слова: метод конечных элементов, электродинамика

1. Практические задачи которым посвящена работа

С развитием новых технологий, вокруг нас стало появляться все больше и больше устройств, излучающих электромагнитные волны.

В таких условиях обязательной становится задача минимизации и контроля нежелательных электромагнитных излучений электронных устройств. Для изучения этих вопросов сформировалось относительно новое направление, которое называется – электромагнитная совместимость (EMC).

В EMC изучается два аспекта воздействия электромагнитного излучения: 1) на человека и 2) на чувствительное цифровое электронное устройство.

С увеличением мощности и числа различных коммуникационных устройств, возникла заинтересованность изучения воздействия электромагнитных волн на человека. Основным предметом изучения является воздействие на функциональную систему человека излучения мобильных телефонов, энергетических линий, антенн сотовой связи и т.д., что является достаточно сложной задачей.

Все больше и больше внимания уделяется изучению чувствительности электронных цифровых устройств в отношении нестационарных электромагнитных полей.

В области автомобильного EMC анализа сложность задач настолько велика, что стандартные подходы не позволяют достичь сколько-нибудь точного результата. Это связано в первую очередь с характером данных, с которыми приходится иметь дело. Характерные задачи включают в себя расчет взаимодействия проводов, а также исследование наведения токов на проводах внешними источниками.

Моделирование включает следующие компоненты: моделирование корпуса автомобиля, множества кабелей, различных антенн и т.д. (см. Рис. 1).

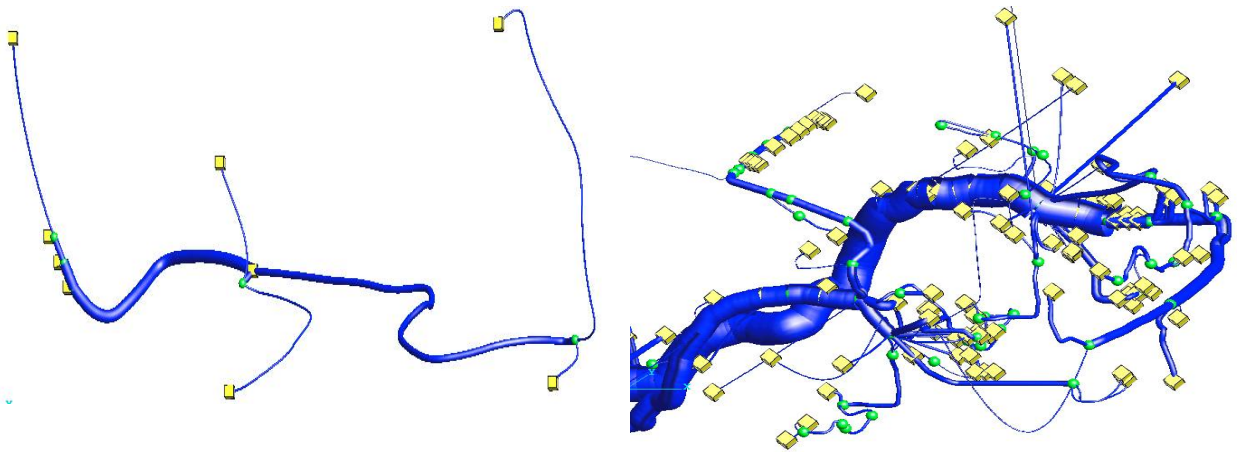


Рис. 1. Множество кабелей

Применение декомпозиционных методов, преобразующих сложные трехмерные задачи в совокупность простых трехмерных и двумерных задач, позволяет свести многие задачи к решению уравнения Лапласа. Одним из методов применяемых при решении уравнения Лапласа является Метод Конечных Элементов.

Анализ задач, поставленных перед работой показывает, что основными критериями для выбора метода или программы решения являются:

- Программа/метод должна/должен иметь возможности генерации неоднородной адаптивной к решению сетки, и не иметь ограничений в возможностях управления генерацией сетки
- Программа/метод должна/должен иметь интерфейс предусматривающий ее использования в качестве компоненты в гибридном подходе, в котором могут участвовать десятки других программ и требуются удобные интерфейсы для взаимной передачи данных
- Программа/метод должна/должен является не-дорогой/дорогим

Поставленным выше критерии не позволяют использовать большинство существующих или доступных программ. На этом пути наиболее перспективным кажется создание собственного кода с использованием адаптивного подхода в рамках Метода Конечных Элементов.

1.1. Непосредственные задачи данной работы

Подытожив вышесказанное, можно сформулировать цели данной работы

1. Разработка эффективного адаптивного подхода к решению уравнения Лапласа в двумерной области в рамках Метода Конечных Элементов (МКЭ)
2. Создание программных средств основанных на разработанных подходах и совместимых с программным обеспечением создаваемым для реализации гибридных подходов к EMC задачам

2. Реализация адаптивной схемы Метода Конечных Элементов (МКЭ или FEM - Finite Element Method)

Исследование взаимного влияния между кабелями является одной из важнейших проблем EMC анализа. Ввиду сложности исследуемых проблем исследование представляет из себя довольно трудоёмкую задачу. Для достижения приемлемой точности численного решения требуется представление геометрии исследуемого объекта большим количеством элементов. Применение методов прямого электродинамического анализа к данной проблеме требует больших компьютерных и временных ресурсов. Кроме того исследования о которых идет речь являются параметрическими и представляют интерес только если рассмотрены

десятки, сотни, а часто и тысячи разных случаев, при этом неимоверно возрастают временные ресурсы. Следовательно, прямые методы решения EMC задач неприменимы и требуются другие, чаще всего приближенные гибридные подходы [1-3]. Необходимо разработать гибкий и эффективный инструментарий для решения проблем взаимного влияния основанный на целом ряде приближенных методов. Таким образом для решения задачи строится многофункциональная система (Cross Talk Toolkit, 'Инструментарий по проблеме взаимного влияния', разрабатываемая в группе EMCoS, в состав которой входят авторы работы), которая включает в себя средства позволяющие удобно ставить различные задачи, проверять имеющуюся геометрию, создавать сечения (переход от трехмерных задач к двумерным), обрабатывать информацию, применять различные решатели (гибридный MAS/МоМ [4] или FEM [5-6]) и т.д. Одним из этапов работы инструментария является нахождение индуктивностей и ёмкостей проводов. Для решения этой задачи требуется разработка эффективного адаптивного подхода к решению уравнения Лапласа в двумерной области в рамках Метода Конечных Элементов (МКЭ) и создание программных средств совместимых с программным обеспечением создаваемым для реализации гибридных подходов к EMC задачам.

2.1. МКЭ решатель как часть системы, описывающей взаимодействие проводов

В данном параграфе представлено краткое описание всей системы инструментария по проблеме взаимного влияния кабелей. Более подробно описана часть системы связанная с FEM решателем.

Cross Talk Toolkit это набор модулей проводящий анализ взаимного влияния проводов. Он состоит из следующих блоков:

- Редактор задач (Task Editor)
- Управляющий блок анализа взаимного влияния (Cross Talk Driving Engine)
- Блок проверки геометрии (Geometry Checking Block)
- Блок по созданию сечений геометрии (Geometry Cross Section Block)
- 2D решатели (Гибридный МоМ/MAS или FEM)
- Блок создания эквивалентных цепей (Pre-Processor for SPICE)
- Обработка результатов (Post-Processor)

Как уже было сказано Cross Talk Toolkit состоит из множества модулей. Каждый модуль может быть использован как независимый. Исходя из этих соображений каждый модуль имеет свои собственные входные и выходные данные и полностью функционален без остальных модулей.

2.2. Требования предъявляемые к МКЭ решателю

Перейдем к детальному рассмотрению 2D МКЭ решателя. Целью решателя является вычисление матрицы ёмкостей и индуктивностей для произвольного количества проводов расположенных вблизи 2D произвольных структур [7-13]. Диэлектрические покрытия также могут быть рассмотрены. Сечения проводов так же как и сечения окаймляющих диэлектриков могут быть произвольными.

Решатель основан на стандартном приближении метода конечных элементов. Тем не менее, для гарантии высокой точности решения и быстродействия, в программу вложен сложный механизм создания адаптивной сетки.

Основные требования выдвигаемые МКЭ решателю можно сформулировать следующим образом:

1. Скорость
2. Возможность эффективно находить контурные интегралы
3. Интегральное усреднение около сингулярных точек

Скорость является важнейшим требованием к решателю, так как для решения одной глобальной проблемы приходится решать сотни локальных задач. Достижение быстродействия программы в целом обеспечивается различными путями (правильным подбором области вычисления, адаптацией сетки, использованием быстрых решателей систем уравнений, разработкой эффективных алгоритмов и т.д.).

Второй пункт скорее положительное свойство метода конечных элементов чем требование. Так как получаемое решение является кусочно-гладким, то не приходится интерполировать искомую функцию по значениям в точках, как это происходит в методе сеток. Соответственно при нахождении контурных интегралов отпадает надобность в совершении лишних действий.

Третий пункт также является положительным свойством метода конечных элементов. Получаемое решение является кусочно-гладким, на всей области вычисления, даже возле сингулярных точек. Это происходит благодаря среднеквадратичному усреднению решения, которое производит FEM.

Обмен информацией между блоками происходит через файлы.

Входной файл для 2D FEM солвера содержит информацию о геометрии и о задании.

Выходной файл содержит ёмкость и индуктивность всех объектов и всех проблем прописанных во входном файле.

2.3. Алгоритм адаптивной схемы FEM

Разработанный алгоритм представленный в этой главе позволяет решать задачи с высокой точностью со сравнительно малым числом неизвестных. Это достигается адаптацией сетки к решаемой задаче. Адаптация производится с учетом градиента искомой функции [14-16].

Рассмотрим разработанный алгоритм на одном примере (ничуть не ограничивающем общность решения в рамках поставленной задачи).

2.3.1. Постановка задачи

Рассмотрим конкретную задачу, представленную ниже и поэтапно пройдем все ступени, требуемые для нахождения решения.

Задача заключается в следующем:

В трехмерном пространстве заданы три металлических проводника круглого сечения расположенных вблизи двух металлических поверхностей. Требуется найти собственные и взаимные ёмкости и индуктивности проводников (формулы вычисления этих величин представлены ниже). На рисунке 2 показано поперечное сечение заданной геометрии. Контур Γ_1 и Γ_2 представляют металлические поверхности, Γ_3 , Γ_4 и Γ_5 – проводники и Γ_6 граница расчетной области.

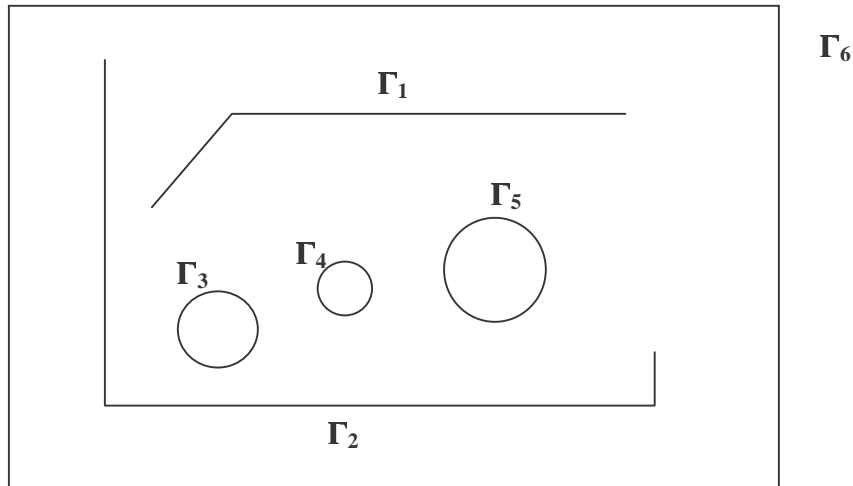


Рис. 2. Геометрия задачи

2.3.2. Основные этапы решения задачи

Решение задачи делится на следующие два основных этапа:

1) Найти решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

в области \$D\$ со следующими граничными условиями

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right|_{\Gamma_6} = 0; T|_{\Gamma_1} = 0; T|_{\Gamma_2} = 0; T|_{\Gamma_i} = T|_{\Gamma_j} = 0; T|_{\Gamma_k} = 1^* \quad (2)$$

здесь \$(i, j, k) = \{(3,4,5), (3,5,4), (5,4,3)\}\$. В общем случае решаемое количество задач \$l\$ меньше или равно количеству мелаллических поверхностей, в приведенном примере \$l=3\$. Далее номер задачи будет обозначаться верхним индексом \$l\$.

2) Определить величины следующих интегралов

$$\oint_{\Gamma_i} \frac{\partial T}{\partial \vec{n}_i} ds; \oint_{\Gamma_j} \frac{\partial T}{\partial \vec{n}_j} ds; \oint_{\Gamma_k} \frac{\partial T}{\partial \vec{n}_k} ds \quad (3)$$

Эти интегралы позволяют рассчитать заряды, накопленные на проводниках, что, в свою очередь обеспечивает возможность расчета емкостей, а затем и индуктивностей [7-13]

Задача реализуется с использованием МКЭ (Метод Конечных Элементов). Используются следующие основные этапы МКЭ:

1. Разбиение области на треугольные элементы
2. Задание неизвестной функции \$T_i^k\$, \$k = 1, 2, 3\$ в вершине каждого \$i\$-го треугольника
3. Замена искомой неизвестной функции \$T\$ суммой базисных функций (базисной функцией для \$i\$-го треугольника будет плоскость, проходящая по вершинам \$T_i^k\$, \$k = 1, 2, 3\$)
4. Минимизация функционала:

* Отметим, что \$\Gamma_i, \Gamma_j, \Gamma_k\$ - являются окружностями

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (4)$$

на множестве функций удовлетворяющих граничным условиям (2).

Разбиение области на треугольные элементы происходит в два этапа. Первый этап – создание грубой сетки. Второй этап – создание адаптивной сетки на которой и будет найдено окончательное(искомое) решение.

2.3.3. Создание грубой сетки

Построенная грубая сетка должна содержать как можно меньшее количество элементов (количество неизвестных) и в тоже время должна уловить характер поведения истинного решения. Блоку по созданию грубой сетки передаются контуры границ Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , Γ_4 , Γ_5 и Γ_6 . При этом Γ_3 , Γ_4 , Γ_5 (контуры окружностей) заменяются ломанными линиями. Максимальная длина отрезка на ломанной определяется целой величиной $N_{coarse}=10$ и вычисляется по формуле

$$Step_{coarse} = \frac{2\pi \cdot r_{min}}{N_{coarse}}$$

При этом ожидается, что число вершин треугольников (неизвестных) для данной задачи получится в диапазоне 400-600 Рис. 3 (для других задач количество неизвестных может достигать 1500-2000).

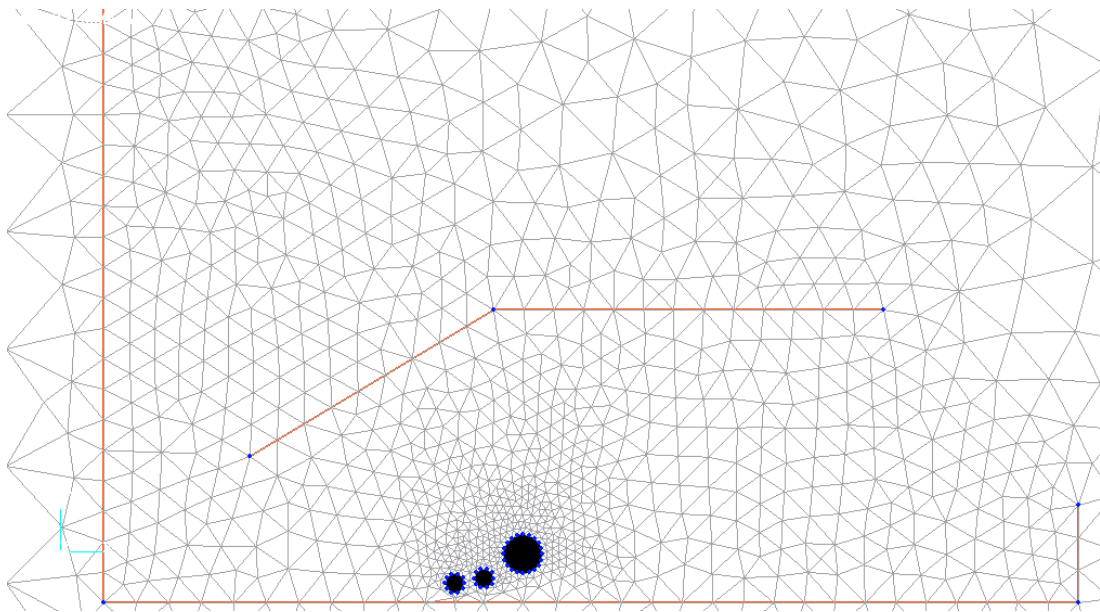


Рис. 3. Грубая сетка (1700 элементов)

После формирования сетки решается задача (1) с граничными условиями (2) методом МКЭ. (Отметим, что задача решается единожды с тремя разными правыми частями).

2.3.4. Вычисление адаптивной функции

Задаются следующие величины:

$Step_{max}$ – величина шага на бесконечности

$N_{adapt}=80$ – минимальное количество отрезков в ломаных представляющих каждую окружность

Адаптивная функция $F_A^l(x, y)$, $(x, y) \in D$ возвращает величину шага адаптивной сетки в заданной точке (x, y) (при этом выявляется треугольник, в который попала точка). Таким образом адаптивная функция зависит от нескольких величин и коротко её можно записать

$$\tilde{F}_A^l(x, y, \varepsilon, Grd)$$

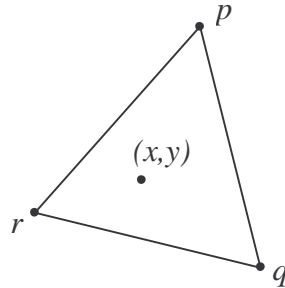


Рис. 4. К вычислению адаптивной функции

где, x, y – координаты точки, в которой нужно определить значение шага, ε – величина определяющая «скорость» роста адаптивного шага от точки к точке, Grd – значение градиента функции

$$F_A^l(x, y) = \begin{cases} Step_max, & \tilde{F}_A^l(x, y) > Step_max \\ \tilde{F}_A^l(x, y), & \frac{2\pi \cdot r_min}{N_adapt} < \tilde{F}_A^l(x, y) < Step_max \\ \frac{2\pi \cdot r_cur}{N_adapt}, & \tilde{F}_A^l(x, y) < \frac{2\pi \cdot r_cur}{N_adapt} \end{cases}$$

где r_cur – радиус текущей окружности.

2.3.5. Создание адаптивной сетки

Естественно, что количество точек в адаптивной сетке должно быть сравнительно маленьким (Рис. 5) (при большом количестве точек происходит накопление ошибок при вычислении интегралов) в тоже время погрешность полученного решения не должна превосходит пяти процентов. Используются различные схемы для построения адаптивной сетки для контуров представляющих провода и контуров представляющих поверхности и границу расчетной области.

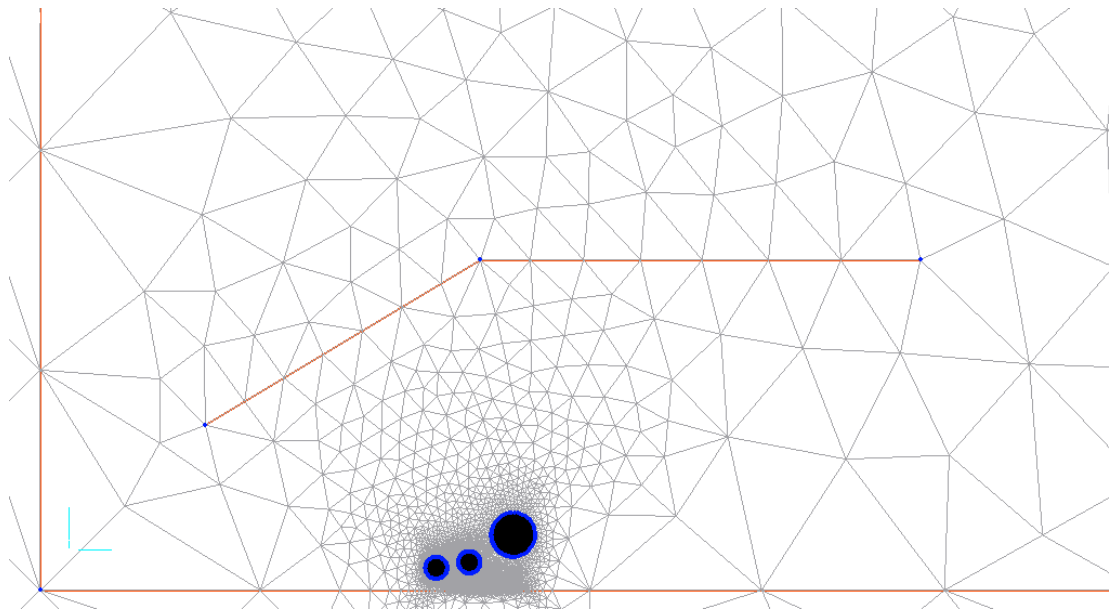


Рис. 5. Адаптивная сетка (7267 элементов)

Построение адаптивной сетки для проводов

Для создания адаптивной сетки каждая окружность провода заменяется на ломаную линию согласно следующему алгоритму:

1. Выбирается произвольная точка (x_0, y_0) на окружности

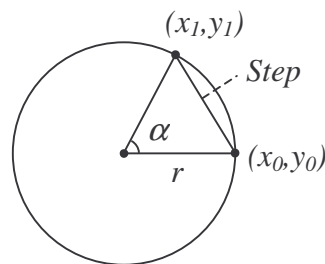


Рис. 6. К построению разбиения проводов

2. Вычисляется значение шага $Step$

$$Step = \begin{cases} \frac{2\pi \cdot r}{N_adapt}, & F_A^l(x, y) > \frac{2\pi \cdot r}{N_adapt} \\ F_A^l(x, y), & F_A^l(x, y) \leq \frac{2\pi \cdot r}{N_adapt} \end{cases}$$

r – радиус самой окружности.

3. От точки (x_0, y_0) откладывается отрезок длины $Step$, против часовой стрелки, вычисляется α и находится новая точка (x_1, y_1) .
4. Пункты 1-3 повторяются, до тех пор пока ломаная (дискретно представленная окружность) не замкнется.

Построение адаптивной сетки других контуров

На ломанных дело обстоит гораздо легче чем на окружностях. В каждой точке составляющей ломаную просто вычисляется значение шага $Step$.

Для задачи, рассматриваемой в этой главе, количество неизвестных при однородной сетке (Рис. 7) может превысить сто тысяч, в то время как при адаптивной сетке не превышает пятнадцать тысяч.

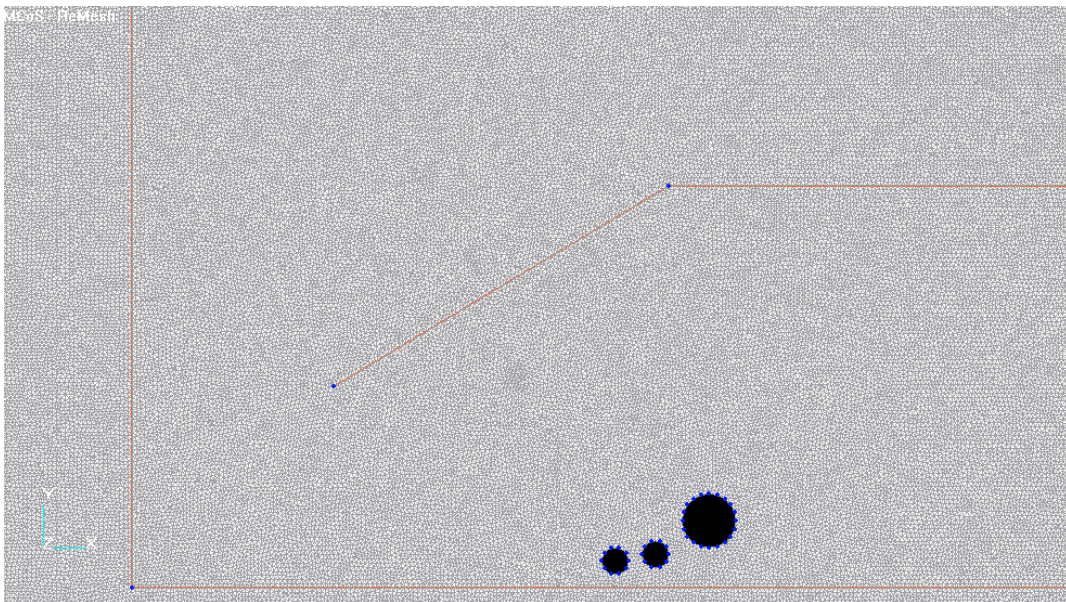


Рис. 7. Однородная сетка (176 000 элементов)

Ниже приведена таблица, которая содержит решение для рассматриваемой задачи полученное при помощи адаптивной схемы FEM-решателя и с помощью другой программы, основанной на гибридном подходе MAS/MoM, которая в свою очередь была протестированна на множестве тестовых проблем для которых известно аналитическое решение. Результаты сравнения были положительными (точность была высокая).

<i>i</i>	<i>j</i>	<i>MAS/MoM</i>	<i>FEM</i>	Error, %
1	1	0.24899E-06	0.24930E-006	0.1243
1	2	0.95763E-07	0.95672E-007	0.0950
1	3	0.44773E-07	0.44184E-007	1.3155
2	2	0.27876E-06	0.27891E-006	0.0537
2	3	0.98997E-07	0.97923E-007	1.0848
3	3	0.28800E-06	0.28509E-006	1.0104

Заключение

В данной работе разработана адаптивная схема МКЭ и программные средства, совместимые с более общими системами исследования ЭМС задач. Благодаря адаптивной сетке, приемлемая точность достигается при сравнительно небольшом количестве элементов. Это является существенным достижением так как матрица с такими размерами во-первых, помещается в физическую память, во-вторых сравнительно быстро решается. Учитывая, что основные затраты времени требуются на обработку данных после получения адаптивной сетки и на решение системы уравнений, то очевиден выигрыш и по времени.

Литература

1. Bruns H., Singer H. Schlagenhauser F. 'Coupling of inhomogeneous Fields into Cables over Discretized Metallic Ground Planes of Finite Extent'. IEEE Int. Symp. On EMC, Santa Clara, 1996, pp. 300-304.
2. Bruns H., Singer H. 'Computation of Interference in Cables Close to Metal Surfaces'. IEEE Int. Symp. On EMC, Santa Clara, 1998, pp. 981-986.
3. Frei S., Jobava R. 'Coupling of inhomogeneous fields into an automotive cable harness with arbitrary terminations'. International EMC Symposium, Zurich 2001, pp. 17D2.
4. Karkashadze D., Jobava R., Frei S., Soziashvili B. 'A Fast Method of Auxiliary Sources Based Calculation of the Capacitance and Inductance Matrices'. Proceedings of VI-th International Seminar/Workshop DPIED-2001, Lviv, 2001, ISBN 966-02-1876-1. pp. 187-190.
5. Д. Норри, Ж. де Фриз 'Введение в метод конечных элементов'. Издательство «Мир» Москва 1981.
6. Peter P. Silvester, Ronald L. Ferrari, 'Finite elements for electrical engineers'. Cambridge University Press 1996.
7. A. Laszloffy, J. Long, A. Patra, "Simple Data Management, Scheduling and Solution Strategies for Managing the Irregularities in Parallel Adaptive *hp* Finite Element Simulations," *Parallel Computing*, Vol. 26, 2000, pp. 1765-1788
8. A. Patra and J.T. Oden, "Computational Techniques for Adaptive *hp* Finite Element Methods," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 25, 1997, pp. 27-39.
9. Н. Н. Миролюбов, М. В. Костенко, М. Л. Левинштейн, Н. Н. Тиходеев, «Методы расчета электростатических полей». Государственное издательство «Высшая школа». Москва 1963.
10. Ahmed, S. and Daly, P. (1969), 'Waveguide solutions by the finite-element method', *Radio and Electronic Engineer*, 38, pp. 217-23.
11. Anderson, O.W. (1973), 'Transformer leakage flux program based on finite element method', *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-92. pp. 682-9.
12. Bickford, W.B. (1990), *A First Course in the Finite Element Method*. Homewood, Illinois: Irwin. xix + 649 pp.
13. Bird, T.S. (1973), 'Evaluation of attenuation from lossless triangular finite element solutions inhomogeneously filled guiding structures', *Electronics Letters*, 9, pp. 590-2.
14. Carpenter, C.J. (1975), 'Finite-element network models and their application to eddy-current problems', *Proceedings IEEE*, 122, pp.455-62.
15. Courant, R.L. (1943), 'Variational method for the solution of problems of equilibrium and vibration', *Bulletin of the American mathematical Society*, 49, pp. 1-23.
16. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (1989), *The Finite Element Method*. 4th edn. Vol. 1 of 2 vols London: McGraw-Hill. xix + 648 pp.