УДК 681.5.033

Аналитическое исследование корневых годографов

О. Г. Котрикадзе
Грузинский технический университет, ул. Костава 77.0175 Тбилиси

Аннотация

В работе рассмотрено аналитическое исследование траекторий корней и основы графо-аналитического построения корневых годографов полиномов с одной переменной. Показана возможность построения корневых годографов при одновременном изменений нескольких коэффициентов полинома с одной переменной в широких пределах. Полученные результаты могут быть использованы в задачах анализа и синтеза линейных систем управления, в робастном управлении и в теории катастроф.

Объектом исследования метода корневых годографов является установление траекторий корней полиномов с действительными коэффициентами при изменении одного или нескольких коэффициентов полинома. Метод корневых годографов впервые был предложен американским учёным Эвансом [1]; При этом он рассматривал только графический способ построения корневых годографов на комплексной плоскости корней при изменении свободного члена полинома. Чуть позже русскими учёными Теодорчиком и Бендриковым была предложена аналитическая теория построения траекторий корней [2,3], в основе, которой лежит формула разложения полинома $P(\mathrm{x})$ в ряд Тейлора α в окрестности точки x,

$$P(x+\alpha) = P(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\frac{d^i P(x)}{dx^i}\alpha^i \quad (1)$$

Если корень полинома $P(\mathrm{x})$ $x = \delta + j\omega$, где δ действительная часть корня, а ω- мнимый коэффициент, тогда подставляя в (1) формулу $x = \delta$ и $\alpha = j\omega$, получим:

$$P(\delta + j\omega) = \operatorname{Re} P + j \operatorname{Im} P \quad (2)$$

где

$$\operatorname{Re} P = P(\delta) - \frac{\omega^2}{2!}P''(\delta) + \frac{\omega^4}{4!}P^{(4)}(\delta) - \ldots \quad (3)$$

действительная часть $P(\delta + j\omega)$, а коэффициент мнимой части того же полинома

$$\operatorname{Im} P = \omega\left[P'(\delta) - \frac{\omega^2}{3!}P'''(\delta) + \frac{\omega^4}{5!}P^{(5)}(\delta) - \ldots\right] (4)$$

Используя выше перечисленные формулы, установим уравнение траекторий корней следующего уравнения:

$$P(x) + \alpha Q(x) = 0 \quad (5)$$

при изменений α, где

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + 1$$

$$Q(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + 1$$

Полиномы $P(x)$ и $Q(x)$ не содержат коэффициент α.

Если для $P(x)$ и $Q(x)$ воспользуемся формулами (2), (3) и (4), получим уравнение траекторий комплексных корней (5) [3], при $\alpha \in R$,

$$\operatorname{Re} P \cdot \operatorname{Im} Q - \operatorname{Re} Q \operatorname{Im} P = 0 \quad (6)$$

Значение α в точке $x = \delta + j\omega$ можно вычислить по формулам:

$$\alpha = -\frac{\operatorname{Re} P}{\operatorname{Re} Q} \ (7) \text{ или } \alpha = -\frac{\operatorname{Im} P}{\operatorname{Im} Q} \ (8).$$

Формулой (7) можно вычислить α, как в действительных, так и в комплексных точках $(\omega \neq 0)$ корневого годографа, формулой (8) вычисляется α только в комплексных точках.

Следует отметить, что такой подход составления уравнения траекторий корней приводит громоздким и сложным вычислениям. Одновременно его трудно использовать для автоматизаций построения корневых годографов с привлечением средств вычислительной техники.

Исходя из вышеизложенного, мы предлагаем корни полинома записать не в алгебраической форме, а в тригонометрической форме, что, в конечном счете, приведёт к уравнению корневых годографов в канонической форме.

Пусть при некотором значении α корень уравнения (5)

$$x = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) \quad (9)$$

где $r\cos\varphi = \delta$, а $r\sin\varphi = \omega$. $r = \sqrt{\delta^2 + \omega^2}$ - модуль корня, а $\varphi = arctg\frac{\omega}{\delta}$ - аргумент.

Подставляя в уравнение (5) выражение (9) получим

$$\sum_{i=0}^{n} a_i r^{n-i} Cos(n-i)\varphi + \alpha \sum_{i=0}^{m} b_i r^{m-i} Cos(m-i)\varphi = 0 \quad (10)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i r^{n-i} Sin(n-i)\varphi + \alpha \sum_{i=0}^{m-1} b_i r^{m-i} Sin(m-i)\varphi = 0 \quad (11)$$

Из (11) уравнения

$$\alpha = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i r^{n-i} Sin(n-i)\varphi \cdot \left[\sum_{i=0}^{m-1} b_i r^{m-i} Sin(m-i)\varphi\right]^{-1} \quad (12)$$

Подставляя полученное значения в (10) получим уравнение корневого годографа при изменении α;

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} a_i r^{n-i} Cos(n-i)\varphi \cdot \sum_{i=0}^{m-1} b_i r^{m-i} Sin(m-i)\varphi - \\ &- \sum_{i=0}^{n-1} a_i r^{n-i} Sin(n-i)\varphi \sum_{i=0}^{m} b_i r^{m-i} Cos(m-i)\varphi = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения (6) и (13) являются идентичными, но записаны в разных формах.

Произведём сравнительный анализ формул (6) и (13) на конкретном примере.

1- Для уравнения

$$x^7 + \alpha x^4 + 1 = 0 \quad (14).$$

Составим уравнения по формулам (6) и (13).

Решение: Для формулы (6) надо вычислить $\operatorname{Re} P$, $\operatorname{Re} Q$, $\operatorname{Im} P$ и $\operatorname{Im} Q$ $\operatorname{Re} P = \delta^7 - \frac{\omega^2}{2!}42\delta^5 + \frac{\omega^4}{4!}840\delta^3 - \frac{\omega^6}{6!}5040\delta = \delta^7 - 21\omega^2\delta^5 + 35\omega^4\delta^3 - 7\omega^6\delta$

$$\operatorname{Im} P = \omega(7\delta^6 - \frac{\omega^2}{3!}210\delta^4 + \frac{\omega^4}{5!}2520\delta^2 - \frac{\omega^6}{7!}5040) = \omega(7\delta^6 - 35\omega^2\delta^4 + 21\omega^4\delta^2 - \omega^6)$$

$$\operatorname{Re} Q = \delta^4 - \frac{\omega^2}{2!}12\delta^2 + \frac{\omega^4}{4!}24 = \delta^4 - 6\omega^2\delta^2 + \omega^4$$

$$\operatorname{Im} Q = \omega(4\delta^3 - \frac{\omega^2}{3!}24\delta) = \omega(4\delta^3 - 4\omega^2\delta)$$

Полученные выражения подставляем в формулу (6)

$$\begin{aligned} &(\delta^7 - 21\omega^2\delta^5 + 35\omega^4\delta^3 - 7\omega^6\delta)(4\delta^3 - 4\omega^2\delta) - \\ &- (\delta^4 - 6\omega^2\delta^2 + \omega^4)(7\delta^6 - 35\omega^2\delta^4 + 21\omega^4\delta^2 - \omega^6) = 0 \end{aligned}$$

раскрываем скобки, складываем подобные члены и группируем соответствующим образом, получим уравнение корневого годографа в канонической форме:

$$r^8(3\delta^2-\omega^2)=4\delta(\delta^2-\omega^2)\ \ (15)$$

Теперь составим (15) уравнение предложенной нами подходом; Уравнение (13) для уравнения (14) имеет вид:

$$r^7 Sin3\varphi = Sin4\varphi\ \ (16)$$

Подставляя значения синусов кратных аргументов [6]

$$Sin3\varphi = 3Sin\varphi - 4Sin^3\varphi = 3\frac{\omega}{r} - 4\frac{\omega^3}{r^3} = \frac{\omega}{r^3}(3r^2-4\omega^2) =$$
$$= \frac{\omega}{r^3}\left(3\delta^2-4\omega^2\right)$$

$$Sin4\varphi = 4\left(\frac{\delta^3}{r^3}\frac{\omega}{r} - \frac{\delta}{r}\frac{\omega^3}{r^3}\right) = 4\frac{\delta\omega}{r^4}(\delta^2-\omega^2)$$

получим (15) формулу. Преимущество представления комплексных корней в тригонометрической форме неоспоримо.

(16) форма записи уравнения корневого годографа упрощает установление областей прохождения траекторий корней. Из полученной формулы, очевидно, что корневые годографы могут располагаться в областях, для которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} Sin3\varphi > 0 \\ Sin4\varphi > 0 \end{cases}\ \ (17)$$

Только при этом условии (16) равенство может быть истинным. Решение (17) системы обозначено на рис.1 штрих линиями. На том же рисунке построены корневые годографы уравнения (14) при $\alpha \in R$. На рис.1 двойными стрелками обозначены направления движение корней при изменении α от $-\infty$ до нуля; а одной стрелкой при изменении α от нуля до $+\infty$. Начальными точками корневых годографов являются точки $x = e^{j\frac{\pi}{7}(2m+1)}$, где $m \in \{0,1,2,...,6\}$.

Четырёхкратной конечной точкой годографа является начало координат, которое на рис.1 обозначено кружком (о); Начальные точки обозначены крестиками (х). Двукратным корнем уравнения (14) является $x = \sqrt[7]{4/3} \approx 1{,}042$; в этой точке $\alpha = -\frac{7}{12}\sqrt[7]{5{,}84} \approx -1{,}98$.

2- Установим корневые годографы уравнения

$$x^6 + \alpha x^3 + 64 = 0\ \ (18),$$

при $\alpha \in R$.

Решение: Начальными точками корневого годографа являются $x = e^{j\frac{\pi}{6}(2n+1)}$, где $n \in \{0,1,2,...,5\}$. Трёхкратная конечная точка находится в начале координат. Уравнение (18) при изменении α может иметь двукратные корни $x = \pm 2$. В этих точках $\alpha(-2) = 16$ и $\alpha(2) = -16$. Уравнение корневого годографа

$$r^6 Sin3\varphi = 64 Sin3\varphi\ \ (19)$$

которое распадается на два уравнения $r = 2$ и $Sin3\varphi = 0$. Таким образом корневым годографом (18) является окружность, центр которой находится в начале координат, с радиусом равным 2-м и прямые $\varphi = \frac{\pi}{3}n$, где $n \in \{0,1,2\}$. Корневой годограф изображён на рис.2

Из этого примера видно, что тригонометрическая форма записи корней полинома, значительно упрощает вывод уравнения корневого годографа и при этом выявляются такие нюансы, что уловить их, используя ряд Тейлора, очень сложно.

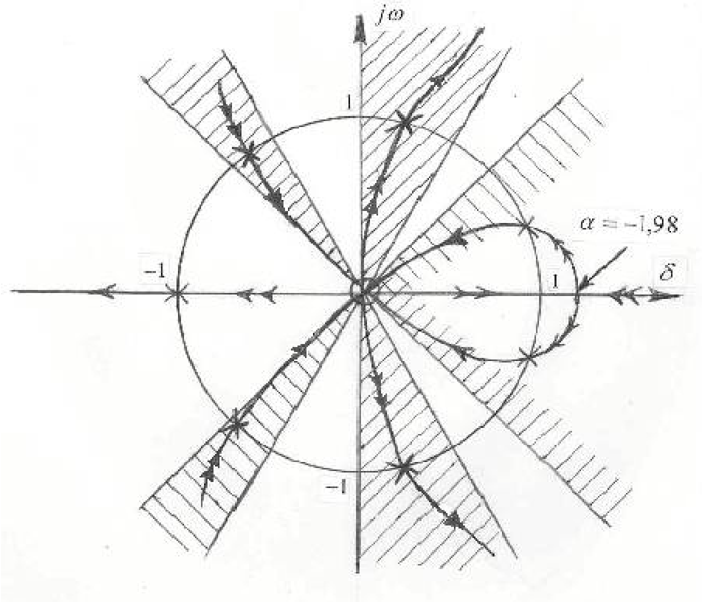

рис. 1

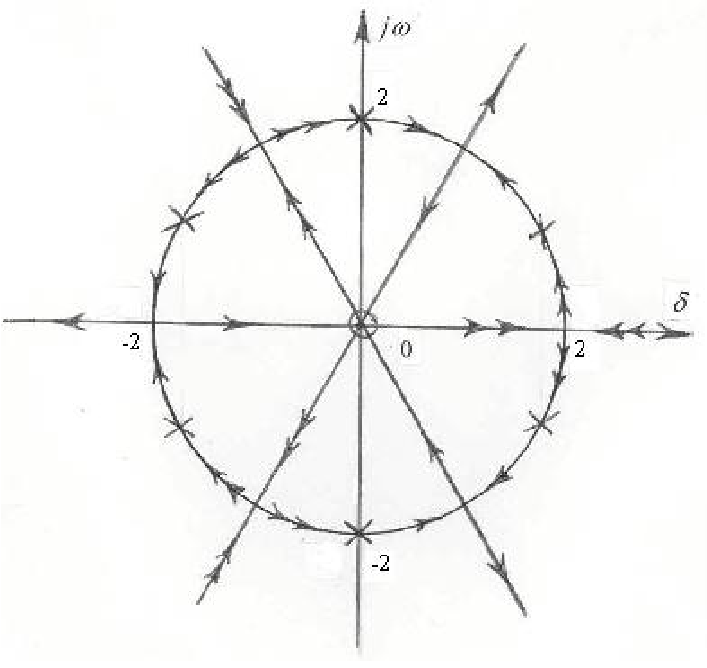

рис. 2

Использованная литература:

1. Evans W. R. "Control systems sintesis by root locys method", Trans AJEE 69, 1950 y.
2. Бендриков Т. А., Теодорчик К. Ф. "Законы миграций корней алгебрачеcких уравнений третей и четвёртой степени при непрерывном изменений свободного члена", автоматика и телемеханика, Москва ,1955 г., №3.
3. Бендриков Т. А., Теодорчик К. Ф. "К аналитической теории построения траекторий корней", автоматика и телемеханика, Москва, 1959 г., №3.
4. Бендриков Т. А., Теодорчик К. Ф. "Траекторий корней линейных автоматических систем", издательство "Наука", Москва, 1964 г.
5. Удерман Э. Т. " Метод корневого годографа в теории автоматических систем", издательство "Наука", Москва, 1972 г.
6. Бронштейн И. Н.,. Семендяев К. А. "Справочник по математике" издательство "Наука", Москва, 1967 г.

Article received: 2005-12-19