УДК 519.6

Обобщенная математическая модель экономической динамики

А.И.Прангишвили, Л.Т.Обгадзе
Грузинский технический университет, ул. М. Костава 77, 0175, Тбилиси, Грузия

Аннотация:

В работе для условий равновесной экономики, строится математическая модель экономической динамики в виде обыкновенного дифференциального уравнения. Построенная математическая модель основывается на концепции акселерации Самуэльсона – Хикса. В предложенной работе фактор акселерации считается функцией времени, а функция потребления задается в виде интеграла с переменным верхним пределом, зависящим от всей предыстории производственного цикла.

Обобщенная модель, в частных случаях, при соответствующем выборе функции акселерации и функции потребления, дает модель Самуэльсона – Хикса, модель Матье, модель Дюффинга и.т.д. Ставится задача выработки оптимальной инвестиционной политики.

Ключевые слова: *функция потребления, функция акселерации, интегро – дифференциальное уравнение экономической динамики*

Экономическая динамика при равновесной экономике описывается уравнением равновесия

$$Y(t) = C(t) + I(t)\,, \tag{1}$$

где

C(t) - функция потребления,

I(t) - инвестиционная политика.

Y(t) - представляет собой совокупный спрос, который при равновесной экономике совпадает с предложением X(t). Поэтому, имеем уравнение для обьема производства

$$X(t) = C(t) + I(t)\,. \tag{2}$$

Функцию потребления записываем в виде

$$C(t) = \int_0^t F\left[X(\tau),\ \tau\right] d\tau, \tag{3}$$

где зависимость $F[X(\tau), \tau]$ определяется на основе регрессионного анализа данных.

Инвестиционная политика основывается на принципе акселерации Самуэльсона – Хикса, которую записываем в виде

$$I(t) = \beta(t)\dot{X}(t), \tag{4}$$

где

$\beta(t)$ - функция акселерации.

Подставляя соотношения (3) и (4) в уравнение (2), получаем интегро – дифференциальное уравнение экономической динамики

$$X(t) = \int_0^t F\left[X(\tau),\ \tau\right] d\tau + \beta(t)\dot{X}(t)\,, \tag{5}$$

Чтобы избавится от интеграла в правой части уравнения (5), дифференцируем ее по параметру времени t , тогда получаем обыкновенную математическую модель экономической динамики в виде

$$\beta(t)\ddot{X}(t) + [\dot{\beta}(t) - 1]\dot{X}(t) + F[X(t), t] = 0\,. \tag{6}$$

Если $\beta(t) = 0$, тогда из (4) получаем $I(t) = 0$, что из (2) дает $X(t) = C(t)$, т.е. соответствует случаю простого воспроизводства.

Если же нас интересует более весомый случай, чем простое воспроизводство, то допускаем что $\beta(t) \neq 0$ и из (6) получаем обобщенную обыкновенную математическую модель экономической динамики в виде

$$\ddot{X}(t) + \frac{\beta' - 1}{\beta}\dot{X}(t) + \frac{F[X(t), t]}{\beta(t)} = 0 \qquad (7)$$

К уравнению (7) присоединяем начальные условия

$$X(0) = X_0, \quad \dot{X}(0) = P_0, \qquad (8)$$

и получаем задачу Коши для обобщенной обыкновенной математической модели экономической динамики (7).

Инвестиционную политику определяет функция акселерации $\beta(t)$, которая является параметром управления. Целью управления является стабильное развитие производства $X(t)$, без разрушающих систему резонансных колебаний.

Для изучения предложенной математической модели, рассмотрим некоторые ее частные случай, при различных функциях потребления и функции акселерации Самуельсона – Хикса:

а) рассматриваем случай, когда

$$\beta(t) = 0, \; t > 0, \qquad (9)$$

$$F[X(t), t] = t(\omega^2 + \varepsilon\cos 2t)X(t) - 0.9t \qquad (10)$$

Тогда из уравнения (7) получаем уравнение Матье

$$\ddot{X}(t) + (\omega^2 + \varepsilon\cos 2t)X(t) = 0.9, \qquad (11)$$

Присоединяем начальные условия

$$X(0) = 1, \; \dot{X}(0) = 1. \qquad (12)$$

При $\omega = 0.5$ и $\varepsilon = 0.2$, на основе MATHCAD 2001 Professional получаем решение для объема производства $S^{\langle 1\rangle} = X(t)$, $S^{\langle 0\rangle} = t$, (Fig. 1.) и соответствующую картину на фазовой плоскости $(X(t), \dot{X}(t))$, где $S^{\langle 1\rangle} = X(t)$ и $S^{\langle 2\rangle} = \dot{X}(t)$, (Fig. 2.);

б) рассматриваем случай, когда

$$\beta(t) = \frac{pe^{pt} - 1}{p}, \qquad p = \text{const}, \qquad (13)$$

$$F[X(t), t] = \beta(t)[X(t)^3 - X(t) - A\cos\omega t - 0.3], \qquad (14)$$

где

$$\omega = \text{const}, \quad A = \text{const}. \qquad (15)$$

Тогда из уравнения (7) получаем уравнение Дюффинга

$$\ddot{X}(t) + p\dot{X}(t) + X(t)^3 - X(t) - A\cos\omega t - 0.3 = 0. \qquad (16)$$

Присоединяем начальные условия

$$X(0) = 1, \; \dot{X}(0) = 1 \qquad (17)$$

При $p = 0.2$, $A = 0.25$ и $\omega = 1$, на основе MATHCAD 2001 Professional, получаем решение для объема производства $S^{\langle 1\rangle} = X(t)$, $S^{\langle 0\rangle} = t$, (Fig. 3.) и соответствующую картину на фазовой плоскости $(X(t), \dot{X}(t))$, где $S^{\langle 1\rangle} = X(t)$ и $S^{\langle 2\rangle} = \dot{X}(t)$, (Fig. 4.);

в) если рассмотреть случай, когда

$$\beta(t) = \text{const}, \qquad (18)$$

$$\dot{X}(t) \approx \frac{X(t-h) - X(t-2h)}{h}, \quad h = 1, \qquad (19)$$

$F[X(t), t] = \alpha \dot{X}(t-h)$, $\alpha X(-h) = A$, (20)

где

A = (прожиточный минимум) x (число жителей) , (21)

тогда из уравнения (5) получаем рекурентную модель Самуэльсона – Хикса.

$X(t) = (\alpha + \beta)X(t-1) - \beta X(t-2) + A$.

Таким образом, мы получили обобщенную обыкновенную математическую модель экономической динамики, которая в частных случаях может задавать - модель Самуэльсона – Хикса, уравнение Матье, уравнение Дюффинга и.т.д. А, что самое главное, дает возможность в случае нахождения соответствующей функции потребления и функции акселерации, выработать оптимальную инвестиционную политику.

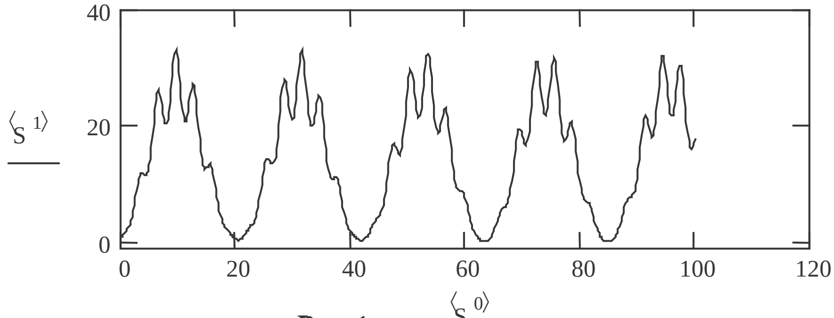

Рис.1

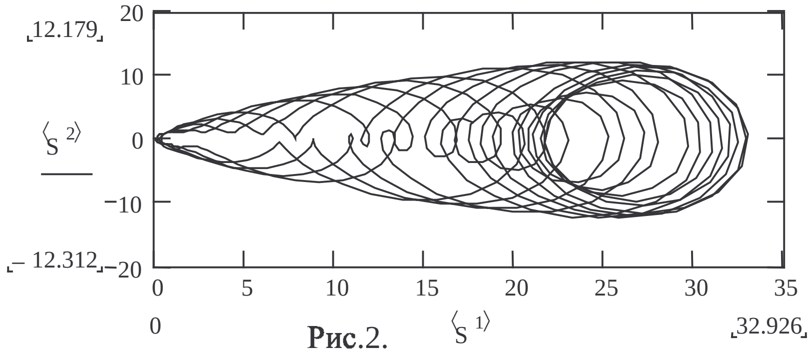

Рис.2.

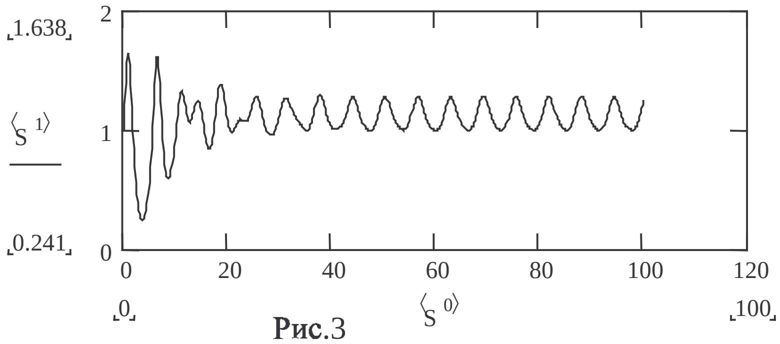

Рис.3

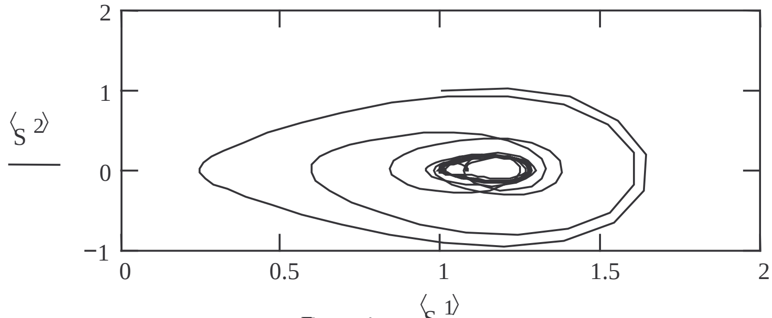

Рис.4

Литература:

1. Замков. Ю.Математическое моделирование в экономике,Москва, - 2000
2. Gudvin R.M.. The non – linear accelerator and the persistence of business cycls, Econ., 19 , - 1951
3. Обгадзе. Т.А.Высшая математика для экономистов,-Москва: ИГУМО, - 2002
4. Интрилигатор М.. Математические методы оптимизации и экономическая теория. Пер. с англ. , Москва. – 1975
5. Шарп, У. Гордон Дж.А., Бейли Д.. Инвестиции. Пер. с англ., Москва – 1992
6. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. Пер. с англ., Москва – 2002
7. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. Пер. с англ., Москва – 1986

Статья получена: 2005-12-19