УДК 519.6

Математическое моделирование экономических циклов и оптимальное управление капитальными вложениями

А.И.Прангишвили, Л.Т.Обгадзе
Грузинский технический университет, ул. М. Костава 77, 0175 Тбилиси, Грузия

***Аннотация*:**
В работе для условий равновесной экономики, строится математическая модель экономической динамики в виде обыкновенного дифференциального уравнения. Построенная математическая модель основывается на концепции акселерации Самуэльсона – Хикса. В предложенной работе фактор акселерации считается функцией времени, а функция потребления задается в виде интеграла с переменным верхним пределом, зависящим от всей предыстории производственного цикла.
Для обобщенной обыкновенной математической модели построенной в рамках методики Гудвина, ставится задача оптимального управления капитальными вложениями.

***Ключевые слова*:** *функция потребления, функция акселерации, интегро – дифференциальное уравнение экономической динамики*

Для современной экономики характерно периоды депрессии и оживления, т.е. периодическое изменение обьема производства.Циклическое развитие экономики сопровождается высоким уровнем экономической активности в течение длительного времени, а затем его спадом.Существует много видов циклов.Волнообразное развитие присуще не только всей экономике в целом,но и ее отдельным составляющим.Например,циклы выпуска продукции, циклы эксплуатации оборудования и т.д.Для моделирования экономических циклов Самуэльсоном и Хиксом была построена соответствующая математическая модель[1], далее, этот подход был развит в работах Гудвина[2], Обгадзе[3] и.т.д.Рассмотрим задачу управления капитальными вложениями, с целью избежать экономических кризисов связанных большими спадами и безработицей в новых постреволюционных демократических государствах Европы и Мира.

Рассмотрим экономическую динамику в случае равновесной экономики,тогда следуя подхода Самуэльсона – Хикса[1] и метода Гудвина[2], пологаем что экономическая динамика описывается уравнением равновесия

$$Y(t) = C(t) + I(t)\ , \qquad (1)$$

где

$C(t)$ - функция потребления,

$I(t)$ - инвестиционная политика.

$Y(t)$ - представляет собой совокупный спрос, который при равновесной экономике совпадает с предложением $X(t)$. Поэтому, имеем уравнение для обьема производства

$$X(t) = C(t) + I(t)\ . \qquad (2)$$

Функцию потребления записываем в виде

$$C(t) = \int_0^t F\left[X(\tau),\ \tau\right] d\tau, \qquad (3)$$

где зависимость $F[X(\tau), \tau]$ определяется на основе регрессионного анализа данных.

Инвестиционная политика основывается на принципе акселерации Самуэльсона – Хикса, которую записываем в виде

$$I(t) = \beta(t)\dot{X}(t), \tag{4}$$

где

$\beta(t)$ - функция акселерации.

Подставляя соотношения (3) и (4) в уравнение (2), получаем интегро – дифференциальное уравнение экономической динамики

$$X(t) = \int_0^t F\left[X(\tau),\ \tau\right]d\tau + \beta(t)\dot{X}(t), \tag{5}$$

Чтобы избавится от интеграла в правой части уравнения (5), дифференцируем ее по параметру времени t , тогда получаем обыкновенную математическую модель экономической динамики в виде

$$\beta(t)\ddot{X}(t) + [\dot{\beta}(t) - 1]\dot{X}(t) + F[X(t), t] = 0\,. \tag{6}$$

Присоединяя, к уравнению(6) начальные условия

$$X(0) = X_0,\quad \dot{X}(0) = P_0, \tag{7}$$

получаем задачу Коши для обобщенной обыкновенной математической модели экономической динамики.

Инвестиционную политику определяет функция акселерации $\beta(t)$, которая является параметром управления. Целью управления является стабильное развитие производства X(t), без разрушающих систему резонансных колебаний.

Мерой стабильности производственной деятельности является – ограниченная цикличность обема производства по времени, т.е. значения обема производства в совокупности, не должны различатся от ее среднего значения, больше допустимого ε. Иначе говоря, имеем условие оптимальности работы производства в виде

$$\sup\sqrt{\int_0^T (X(t) - \frac{1}{T}\int_0^T X(\tau)d\tau)^2\,dt} \le \varepsilon\,. \tag{8}$$

Условие оптимальности (8) показывает, что среднее квадратическое отклонение обема производства от ее среднего значения, вычисленная по норме $L_2[0,T]$, должно быть ограниченной сверху.

Чтобы упростить вычисления, преобразуем подкоренное выражение в левой части неравенства(8), к виду

$$\sqrt{\int_0^T (X(t) - \frac{1}{T}\int_0^T X(\tau)d\tau)^2\,dt} = \sqrt{\int_0^T (X^2(t)dt - \frac{1}{T}(\int_0^T X(\tau)d\tau)^2}\,. \tag{9}$$

Тогда условие оптимальности инвестиции, принимает вид

$$\sup\sqrt{\int_0^T (X^2(t)dt - \frac{1}{T}(\int_0^T X(\tau)d\tau)^2} \le \boldsymbol{\varepsilon}\,. \tag{10}$$

Для решения поставленной задачи оптимального управления, перепишем ее в нормальном виде

$$\frac{dX_0(t)}{dt} = X_1 \;; \tag{11}$$

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = -\frac{\beta' - 1}{\beta} X_1(t) - \frac{F[X_0(t), t]}{\beta(t)} \;; \tag{12}$$

$$\sup \sqrt{\int_0^T (X^2(t)dt - \frac{1}{T}(\int_0^T X(\tau)d\tau)^2} \leq \boldsymbol{\varepsilon} \;. \tag{13}$$

$$X_0(0) = X_0, \quad X_1(0) = P_0 \tag{14}$$

Поставленную задачу нахождения управления β(t), при которой решения системы уравнений (11),(12),(14) удовлетворяют условию (13), назовем задачей оптимального управления капитальными вложениями.

Ясно,что метод решения задачи, ровно, как и результат управления зависят от вида функции потребления которую находят по результатам экономических экспериментов и последующем, статистическом анализе информации.

Литература:

1. Замков. Ю.Математическое моделирование в экономике,Москва, - 2000
2. Gudvin R.M.. The non – linear accelerator and the persistence of business cycls, Econ., 19, - 1951
3. Обгадзе. Т.А.Высшая математика для экономистов,-Москва: ИГУМО, - 2002
4. Интрилигатор М.. Математические методы оптимизации и экономическая теория. Пер. с англ. , Москва. – 1975
5. Шарп, У. Гордон Дж.А., Бейли Д.. Инвестиции. Пер. с англ., Москва – 1992
6. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. Пер. с англ., Москва – 2002
7. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. Пер. с англ., Москва – 1986

Статья получена: 2005-12-19