Вычисление особого оптимального управления в квазилинейных управляемых системах со смешанными ограничениями

З. Цинцадзе
Кафедра теории управления, Тбилисский Государственный Университет им. Ив. Джавахишвили

Абстракт

Рассмотрена квазилинейная задача оптимального управления со скалярным управлением при наличии смешанных ограничений. Приведены необходимые условия оптимальности в форме аналога принципа максимума.

Исследован особый случай, когда функция управления не определяется однозначно из принципа максимума. Построена процедура вычисления одномерного особого управления, и с применением этой процедуры решена конкретная задача.

В некоторых задачах оптимального управления использование принципа максимума Понтрягина (см.[1]) сопряжено с необходимостью исследовать особые управления (см.[2]). Для простоты рассмотрим следующую задачу со скалярным управлением :

$$\int_{t_0}^{t_1} h(x(t))dt \to min \ , \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\frac{dx}{dt} = f_0(x) + uf_1(x) \ , \qquad (2)$$

$$g(x,u) \le 0 \, , \qquad (3)$$

$$x(t_0) = x_0 , x(t_1) = x_1 , \qquad (4)$$

где $x \in \mathrm{E}^n$, $f_0 \in \mathrm{E}^n$, $f_1 \in \mathrm{E}^n$, $g \in \mathrm{E}^m$, $u \in \mathrm{R}$.

В случае, когда $u = u(t)$ -кусочно непрерывная функция, $x = x(t)$ -кусочно гладкая вектор-функция, а вектор-функции f_0, f_1, g и скалярная функция h являются непрерывными и достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми относительно своих аргументов, процедура определения оптимального особого управления предложена в работе [3]. Этой процедурой можно пользоваться и в случае, когда $u(t) \in L_1[t_0,t_1], x(t) \in W^n_{1,1}[t_0,t_1], f_0(x)$ -выпуклая вектор-функция своего аргумента, $f_1(x)$ -постоянный ненулевой вектор, $h(x)$ -скалярная выпуклая функция аргумента x, а вектор-функция g линейна по u и выпукла по x. Действительно, при сделанных предположениях можно воспользоваться теоремой1 из [4], откуда следует справедливость следующих необходимых условий оптимальности:

если $(x(t),u(t))$ оптимальное решение задачи (1)-(4), то существуют такие абсолютно непрерывные на интервале $[t_0,t_1]$ функции $\psi^1(t),...,\psi^n(t)$, постоянная $\psi^0 \le 0$ и функции $\mu^\alpha(t) \in L_\infty[t_0,t_1]$, $\alpha = \overline{1,m}$, которые почти всюду на $[t_0,t_1]$ удовлетворяют условиям:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{dH}{dx} \, , \qquad (5)$$

$$\mu^\alpha(t) \ge 0 \, , \qquad (6)$$

$$\mu^\alpha(t) g^\alpha(x(t),u(t)) = 0 \ , \quad \alpha = \overline{1,m}; \qquad (7)$$

$$\psi(t) f_1 u(t) = \max_{u \in \{u | g(x(t),u) \le 0\}} \psi(t) f_1 u \, , \qquad (8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \, , \qquad (9)$$

$$\left(\psi^0, \psi(t)\right) \ne (0,0) \, , \qquad (10)$$

где

$$\psi(t)=(\psi^1(t)...\psi^n(t)),$$

$$H=\psi^0 h+\psi(t)\left(f_0(x)+uf_1\right)-\mu(t)g=\psi^0 h+\sum_{i=1}^{n}\psi^i(t)\left(f_0^i(x)+uf_1^i\right)-\sum_{\alpha=1}^{m}\mu^\alpha(t)g^\alpha .$$

В случае, когда

$$\mu^\alpha(\mathrm{t})\equiv 0, \psi(t)f_1\equiv 0, t_0\le t\le t, \tag{11}$$

условия (7)-(9) не дают возможность определения $u(t)$, т.е. возникает особое управление. Следуя [3], обозначим $H_0(x,\psi)=\psi_0 h(x)+\psi(t)f_0(x)$, $H_1(\psi)=\psi(t)f_1$. Тогда $H=H_0(x,\psi)+H_1(\psi)u-\mu g$. Так, как (2) можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\psi},$$

то в силу свойств скобок Пуассона с учётом (11) имеем:

$$\frac{d}{dt}H_1(t)=\langle H_1,H\rangle=\langle H_1,H_0\rangle+u\langle H_1,H_1\rangle-\sum_{\alpha=1}^{m}\mu^\alpha\langle H_1,g^\beta\rangle=0,$$

почти всюду на $t_0\le t\le t_1$. Таким же образом получаем:

$$\frac{d^2}{dt^2}H_1=-\frac{d}{dt}\langle H_{0,}H_1\rangle=-\langle\langle H_{0,}H_1\rangle,H\rangle=\langle H_0,\langle H_0,H_1\rangle\rangle+$$
$$+u(t)\langle H_1,\langle H_0,H_1\rangle-\sum_{\alpha=1}^{m}\mu^\alpha(t)\langle g^\alpha,\langle H_0,H_1\rangle=0. \tag{12}$$

почти всюду на $t_0\le t\le t_{1.}$ Здесь коэффициент при u(t) , вообще говоря, не равен нулю.Поэтому для точек t, $t_0\le t\le t_1$, где он отличен от нуля, учитивая (11), можно определить особое управление $u(t)$ по формуле:

$$u(t)=-\frac{\langle H_0,\langle H_0,H_1\rangle\rangle}{\langle H_1,\langle H_0,H_1\rangle\rangle}. \tag{13}$$

Если коэффициент при управлении $u(t)$ в (12) равен нулю на отрезке $\tau\subset[t_0,t_1]$, то для получения особого управления на отрезке τ продолжаем вычислять последовательные полные производные по t от функции H_1. Все они должны равняться нулю на отрезке τ. Ясно, что управление $u(t)$ явно может появиться лишь в выражении производной чётного порядка, в силу чего особое управление необходимо равно:

$$u(t)=-\frac{\langle H_0,\langle H_0,...,\langle H_0,H_1\rangle\rangle...\rangle}{\langle H_1,\langle H_0,...,\langle H_0,H_1\rangle\rangle...\rangle}, \tag{14}$$

для п.в. $t\in[t_o,t_1]$, в которых выражение $H_2=\langle H_1,\langle H_0,...,\langle H_0,H_1\rangle\rangle...\rangle$ подсчитанное вдоль особых траекторий $[x(t),u(t)]$, отлично от нуля.

Для вычисления особого управления на множестве нулей функции H_2, заметим, что формула (14) получена для случая, когда в выражении $\overset{\omega}{H}=H_0+H_1 u$ коэффициент при u на отрезке τ равен нулю, что не позволило сразу вычислить особое управление. Теперь аналогичная ситуация возникла с выражением

$$0\equiv\frac{d^{2m}}{dt^{2m}}H_1=\langle H_0,\langle H_0,...,\langle H_0,H_1\rangle\rangle...\rangle+u(t)\langle H_1,\langle H_0,...,\langle H_0,H_1\rangle\rangle...\rangle,$$

из которого нельзя найти управление на множестве нулей функции H_2.

Изложенную выше для $H_1=0$ процедуру вычисления особого управления можно применить и к изучению этого случая. Следующий пример иллюстрирует эффективность описанной выше процедуры: пусть требуется минимизировать $\frac{1}{2}\int_0^T x^2 dt$ при ограничениях: $\dot{x}=u$, $|u|\le\sqrt{1-x^2}$, $|x|<1$, $x(0)=x_0>0$, $x(T)=x_1>0$, $T-$ фиксировано, $x=x(t)$ абсолютно непрерывная , а $u=u(t)$ интегрируемая на $[0,T]$ функции.

Необходимые условия оптимальности имеют вид:

$$\psi_0 = -1,$$

$$\dot{\psi} = x + \mu_1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \mu_2 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\mu_1\left(u - \sqrt{1-x^2}\right) = 0,$$

$$\mu_2\left(-u - \sqrt{1-x^2}\right) = 0, \quad \mu_i \geq 0, i = 1.2,$$

$$\psi(t)u(t) = \max_{U \in \{U \,|\, |U| \leq \sqrt{1-x^2(t)}\}} \psi(t)u,$$

$$\psi = \mu_1 - \mu_2,$$

где $\psi = \psi(t) -$ абсолютно непрерывная, а $\mu_i = \mu_i(t), i = 1{,}2$, существенно ограниченные на $[0,T]$ функции.

Поскольку $H = -\frac{1}{2}x^2 + \psi u - \mu_1\left(u - \sqrt{1-x^2}\right) - \mu_2\left(-u - \sqrt{1-x^2}\right)$, то на особом участке $\tau \subset [0,T]$ из (13) имеем:

$$u(t) = -\frac{\langle -1/2\, x^2, x\rangle}{\langle \psi, x\rangle} = \frac{0}{1} = 0.$$

Легко видеть, что с помощью найденного особого оптимального управления без принципиальных затруднений находится оптимальное решение в рассматриваемом примере, если только $x_{0,}x_1$ и T подобраны таким образом, что задача имеет допустимое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. *Математическая теория оптимальных процессов*. М.Физматгиз, 1961, 479 с.
2. Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. *Особые оптимальные управления*. М. Наука, 1973, 256 с.
3. З.А. Цинцадзе. *Вычисление особых управлений в оптимальных задачах со смешанными ограничениями.* Сб.: Оптимальные задачи в системах с переменной структурой . Изд-во ТГУ, Тбилиси,1985,с 155-175.
4. Z. Tsintsadze. *The Lagrange principle of taking restrictions off and its applications to linear optimal control problems in the presence if mixed restrictions and delays.* Memoirs on DEMPH,Vol.11, 1997, pp 105-128.