УДК 519.6

Математическая модель снежных лавин

Т.А. Обгадзе, И.Г. Матиашвили
Грузинский технический университет, ул. М. Костава 77, 0175, Тбилиси, Грузия

Аннотация:
Теория движения лавин развивается в двух направлениях. Одно из них рассматривает движение лавин как движение твёрдого тела по наклонной плоскости, для описания которого применяются методы механики материальной точки. Второе направление рассматривает движение лавины как перемещение сплошной среды, для изучения которого применимы методы гидроаэромеханики

Ключевые слова: *материальная точка, тело лавины*

Теория движения лавин развивается в двух направлениях. Одно из них рассматривает движение лавин, как движение твёрдого тела по наклонной плоскости, для описания которого применяются методы механики материальной точки. Второе направление рассматривает движение лавины, как перемещение сплошной среды, для изучения которого применимы методы гидроаэромеханики.

Рассматриваем движение снежных лавин в рамках механики материальной точки. Будем считать, что тело лавины перемещается как единое целое, потеряв устойчивость на склонах гор.

Заменим уравнения динамики материальной точки – лавины в форме:

$$\frac{d(MV)}{dt} = Mg\sin\Psi - F_{сопр} \tag{1}$$

Где M-масса тела лавины, g-ускорение силы тяжести, V-скорость центра тяжести лавины, Ψ - угол наклона склона гор, $F_{сопр}$ - равнодействующая сил сопротивления.

Такой подход был неоднократно применён к моделированию снежных лавин [1-5], однако, не был, достигнут, тот уровень развития, который позволил бы, применять теоретические результаты при практических расчётах. Нанесём на рис.1, действующие силы.

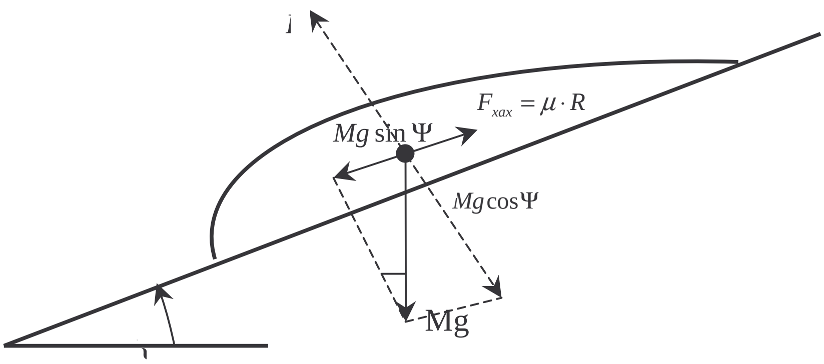

Рис.1. Схема движения снежной лавины

Сила тяжести Mg вызывает скатывающую силу $Mg\sin\Psi$, а также реакцию опоры N=$Mg\cos\Psi$,т.е. сила трения лавины о наклонную плоскость $F_{тр} = f \cdot Mg\cos\Psi$ где f - коэффициент трения.

1) пусть сила сопротивления имеет вид:

$$F_{сопр} = F_{тр} + k_1\dot{x} + k_2\dot{x}^2 \qquad (2)$$

Исходя из π- теорема Букингема, найдем выражение для $k_1 = f(M, g, x) \wedge k_2 = f(M, g, x)$, задавшись зависимостью:

$$F = q_1 M^{\alpha} \cdot g^{\gamma} \cdot x^{\beta} V \qquad (3)$$

и переходя к размерностям, имеем:

$$MLT^{-2} = M^{\alpha} \cdot L^{\gamma} \cdot T^{-2\gamma} \cdot L^{\beta} \cdot L \cdot T^{-1} \qquad (4)$$

т.е.

$$MLT^{-2} = M^{\alpha} L^{\alpha+\beta+1} T^{-2\gamma-1} \qquad (5)$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \gamma + \beta + 1 = 1 \\ -2\gamma - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \gamma = 1/2 \\ \beta = -1/2 \end{cases} \qquad (6)$$

Аналогично, для k_2 - получаем зависимость:

$$k_2 = \frac{q_2 M}{x} \qquad (7)$$

Подставляя (6)-(7) в (3) получаем:

$$F = q_1 M \sqrt{\frac{g}{x}} \cdot \dot{x} + \frac{q_2 M}{x} \cdot \dot{x}^2 \qquad (8)$$

Где $q_1 \wedge q_2$- постоянные величины не имеющие размерность, что со своей стороны из $(2) \wedge (1)$ даёт уравнение движения в форме:

$$\frac{d(MV)}{dt} = Mg\sin\Psi - f \cdot Mg\cos\Psi - q_1 M \sqrt{\frac{g}{x}} \cdot \dot{x} - \frac{q_2 M}{x} \cdot \dot{x}^2 \qquad (9)$$

Из (9) явствует, что сила сопротивления пропорциональное скорости движения особо проявляется в начале движения, когда $\dot{x}$ - мало, что неоднократно отмечалось в работах [5-6].

Считая массу лавины постоянной, т.е. пренебрегая захватом снега, из (9) получаем, что тогда величина массы не оказывает влияния на движение лавины. Уравнение (9) в этом случае приобретает вид:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = g(\sin\Psi - f\cos\Psi) - q_1\sqrt{\frac{g}{x}} \cdot \dot{x} - q_2\frac{\dot{x}^2}{x} \qquad (10)$$

Мы получили нелинейное уравнение (10), которое подлежит исследованию.

2) в случае, когда масса меняется, т.е. происходит захват снега, если кинетическая энергия лавины достигает определённой величины захвата и, наоборот, при меньшей

кинетической энергии, происходит «распыление»- отдача массы лавины имеем уравнение движения в форме:

$$\frac{d(M\dot{x})}{dt} = Mg(\sin\Psi - f\cos\Psi) - q_1 M\sqrt{\frac{g}{x}}\cdot\dot{x} - \frac{q_2 M}{x}\cdot\dot{x}^2 \tag{11}$$

Для изменения массы на основе π - теоремы Букингема имеем уравнение:

$$\frac{dM}{dt} = q_3\frac{M}{x}\cdot\dot{x} - q_4\frac{M}{x}\cdot V_{кр} \tag{12}$$

Где $q_3 \wedge q_4$ - безразмерные коэффициенты, а $V_{кр}$ - критическая скорость захвата снега телом лавины, удобно считать что $q_3 = q_4 = C$

Подставляя (12) в (11) имеем:

$$C = \frac{M}{x}\dot{x}^2 - C\frac{M}{x}V_{кр}\cdot\dot{x} + M\ddot{x} = Mg(\sin\Psi - f\cos\Psi) - q_1 M\sqrt{\frac{g}{x}}\dot{x} - \frac{q_2 M}{x}\dot{x}^2 \tag{13}$$

Сокращая на М и собирая подобные члены получаем:

$$\ddot{x} = g(\sin\Psi - f\cos\Psi) + (\frac{CV_{кр}}{x} - q_1\sqrt{\frac{g}{x}})\dot{x} - \frac{C+q_2}{x}\cdot\dot{x}^2 \tag{14}$$

Вводя обозначения:

$$\left.\begin{aligned} a &\equiv g(\sin\Psi - f\cos\Psi) \\ b &\equiv C + q_2 \\ d &\equiv q_1\sqrt{g} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\ddot{x} = a + (\frac{C\cdot V_{кр}}{x} - \frac{d}{\sqrt{x}})\dot{x} - \frac{b}{x}\cdot\dot{x}^2 \tag{16}$$

Уравнение (14) переписываем в виде:

$$\ddot{x} = a + (\frac{C\cdot V_{кр}}{x} - \frac{d}{\sqrt{x}})\dot{x} - \frac{b}{x}\cdot\dot{x}^2 \tag{17}$$

Уравнение (17)- является общим уравнением динамики лавин, которое подлежит исследованию.

Уравнение (17) не зависит от массы М-лавины, что для используемого подхода – механики материальной точки скорее закон, чем исключение.

Для решения уравнения (17), перепишем её в нормальной форме:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1 \\ \dot{x}_1 = a + \left(\dfrac{C \cdot V_{кр}}{x_0} - \dfrac{d}{\sqrt{x_0}}\right)x_1 - \dfrac{b}{x_0} \cdot x_1^{\ 2} \end{cases} \tag{18}$$

И присоединим начальные условия:

$$\begin{cases} x_0(0) = 0 \\ x_1(0) = 0 \end{cases}, \tag{19}$$

(так, как коэффициенты уравнения (17) разрывны, вводим сдвиг знаменателя на ε = 0.04).
В начальный момент(19), тело лавины неподвижно и находится в точке отсчёта. По построению модели, ясно что

$a = g(\sin\Psi - f\cos\Psi)$; b=2; C=1; q_1=1; q_2=1;

d=$\sqrt{g}$, $V_{кр}$ -для снега зависит от её влажности и надо взять из эксперимента.

Для решения поставленной задачи, запишем соответствующую программу на языке MATHCAD.

k := 0.02   b := 3   c := 1   g := 9.8   Vkr := 30   ψ := 0.1

$ic := \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$ ε := 0.04 $d := \sqrt{g}$ $a := \sqrt{g} \cdot (\sin(\psi) - k \cdot \cos(\psi))$

$$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_1 \\ a + \left(\dfrac{c \cdot Vkr}{X_0 + \varepsilon} - \dfrac{d}{\sqrt{X_0 + \varepsilon}}\right) \cdot X_1 - \dfrac{b}{X_0 + \varepsilon} \cdot (X_1)^2 \end{bmatrix}$$

S := Rkadapt(ic, 0, 1900, 9000, D)

$t := S^{\langle 0 \rangle}$

$X_0 := S^{\langle 1 \rangle}$

$V := S^{\langle 2 \rangle}$

$i := 0..\ last\left(S^{\langle 0 \rangle}\right)$

Решения поставленной задачи представлены на графиках (Рис.2, Рис.3, Рис.4):

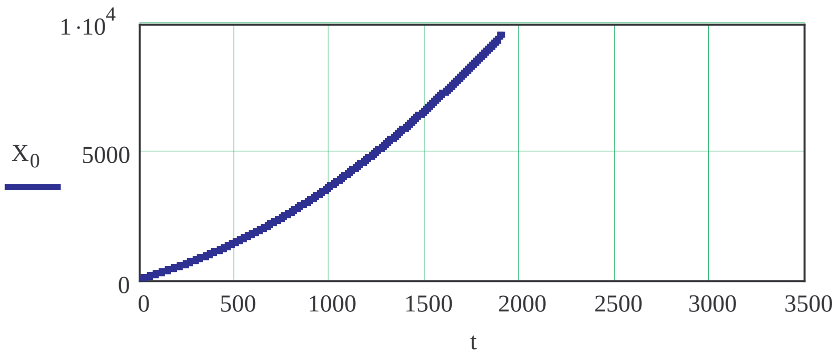

Рис 2. Изменение координаты цт тела лавины

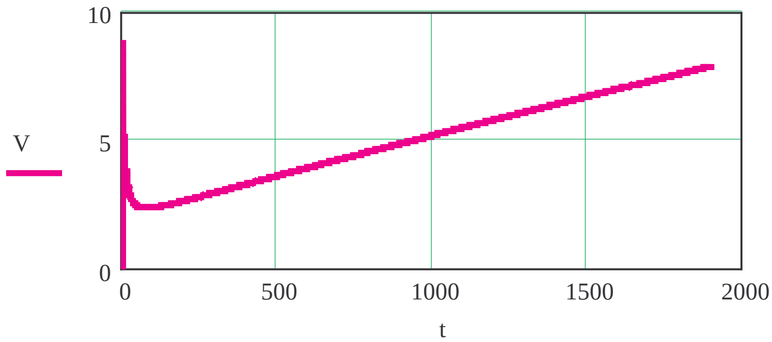

Рис.3. Изменение скорости цт тела лавины

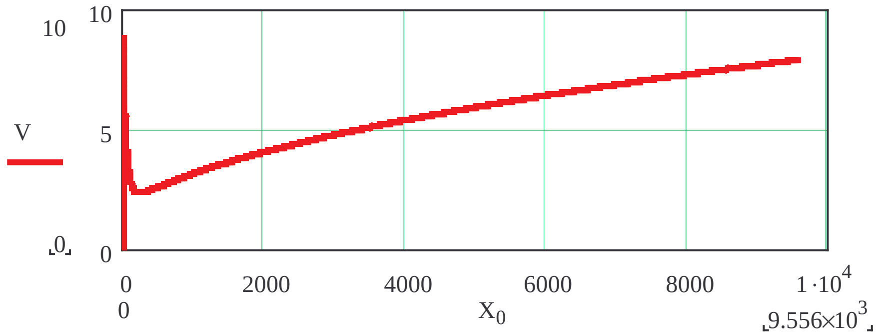

Рис.4. Изменение скорости цт тела лавины по длине склона

ЛИТЕРАТУРА

1. Сатчан Г.Г. Снег и снежные обвалы. – Труды ТНИС, 1936, вып. 27
2. Сулаквелидзе Г. К вопросу об образовании и движении снежных лавин. - Труды ин-та физики и геофизики АН Груз ССР, 1949, Т.11
3. Козик С.М. Расчёт движения снежных лавин. – Л.: Гидрометеоиздат, 1962
4. Эглит М.Э. Теоретические подходы к расчёту движения снежных лавин. – В кн.: Итоги науки, гидрология суши, гляциология, М., ВИНИТИ, 1968
5. Москалёв Ю.Д. Динамика снежных лавин и снеголавинные расчеты. Труды САРНИГМИ, вып 36(117), Л.: Гидрометеоиздат, 1977
6. Божинский А.Н. Лосев К.С. Основы лавиноведения. Л.: Гидрометеоиздат, 1987
7. Обгадзе Т.А. Элементы математического моделирования. Уч. пос., ГПИ, Тбилиси, 1989
8. Обгадзе Т.А. Прокошев В.Г. вычислительная физика. уч. Пос., ВЛГУ, Владимир, 1999

Статья получена: 2006-02-25