УДК 517.9

Применение математической модели Прангишвили-Обгадзе для моделирования совокупного спроса на продукты питания

Н.З.Тушишвили

Грузинский технический университет, ул.М.Костава, 77, 0175, Тбилиси, Грузия

Аннотация:

В работе на основе подхода Прангишвили-Обгадзе, строится математическая модель для изучения совокупного спроса на продукты питания. Функция потребления строится методом множественной полиномиальной регрессии, а инвестиционная политика задается на основе принципа акселерации Самуэльсона-Хикса. На основе вариационной постановки, решается задача об оптимальном управлении капитальными вложениями с целью избежать недопустимых амплитуд колебания спроса.

***Ключевые слова**: модель, динамика, Кейнс, эластичность, оптимальное*

Экономическая динамика при равновесной экономике Кэйнса описывается уравнением[1-7]:

$$Y(t) = C(t) + I(t) \tag{1}$$

Где $C(t)$ - функция потребления,

$I(t)$ - инвестиционная политика.

$Y(t)$ - представляет собой совокупный спрос, который при равновесной экономике совпадает с предложением $X(t)$. По этому, имеем уравнение Кэйнса для объема производства $X(t)$.

$$X(t) = C(t) + I(t) \tag{2}$$

Функцию потребления для совокупного спроса на продукты питания $C(t)$ определяем на основе множественной полиномиальной регресии.

$$C(t) = m + \alpha X(t) + \beta P(t) \tag{3}$$

Где m - число жителей $\times$ прожиточный минимум;

α - эластичность спроса по средним доходам семъи ($\alpha > 0$);

β - эластичность спроса по средним ценам на продукты питания ($\beta > 0$);

$P(t)$ - функция средней цены на продукты питания.

Инвестиционная политика, основанное на принципе акселерации Самуэльсона – Хикса, записывается в виде Прангишвили – Обгадзе [6-7].

$$I(t) = \gamma(t) \cdot \dot{X}(t) \tag{4}$$

где $\gamma(t)$ - функция акселерации.

Подставляя соотношения (3), (4) в уравнение (2) получаем дифференциальное уравнение экономической динамики в виде:

$$X(t) = m + \alpha X(t) + \beta P(t) + \gamma(t) \cdot \dot{X}(t) \tag{5}$$

Средняя цена $P(t)$ - на продукты питания зависит от объема предложения $X(t)$ и от скорости ее изменение $\dot{X}(t)$, при чем, чем больше $X(t)$ или $\dot{X}(t)$, тем меньше цена и наоборот, чем меньше $X(t)$, тем больше цена, т.к. имеем дефицит. Равенство нулю $P(t)$ соответствует перенасыщению рынка, т.е. имеем связь

$$P(t) = \operatorname{Im} p - \int_0^t \left(\zeta \cdot X(\tau) + \eta \cdot \dot{X}(\tau)\right) d\tau \tag{6}$$

где $\mathrm{Im}\, p$ - цена импортироемой продукции продуктопитания, когда внутри государства не производят закупки, $\zeta \in [0,1)$, и $\eta \in [0,1)$.

Подставляя соотношение (6) в уравнение (5) получаем интегро – дифференциальное уравнение:

$$X(t) = m + \alpha X(t) + \beta \cdot \mathrm{Im}\, p - \int_0^t \left(\zeta \cdot X(\tau) + \eta \cdot \dot{X}(\tau)\right) d\tau + \gamma(t) \cdot \dot{X}(t) \qquad (7)$$

продифференцировав соотношение (7) по времени, получаем дифференциальное уравнение экономической динамики Прангишвили – Обгадзе в виде:

$$\dot{X}(t) = \alpha \cdot \dot{X}(t) - \beta \cdot \zeta \cdot X(t) - \beta \cdot \eta \cdot \dot{X}(t) + \dot{\gamma}(t) \cdot \dot{X}(t) + \gamma(t) \cdot \ddot{X}(t) \qquad (8)$$

Преобразуем уравнение (8) к виду:

$$\gamma(t) \cdot \ddot{X}(t) + \left(\dot{\gamma}(t) - \beta \cdot \eta + \alpha - 1\right) \cdot \dot{X}(t) - \beta \cdot \zeta \cdot X(t) = 0 \qquad (9)$$

Иначе говоря, получаем уравнение динамики совокупного продукта питания в виде:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\gamma}(t) - \beta \cdot \eta + \alpha - 1}{\gamma(t)} \cdot \dot{X}(t) - \frac{\beta \cdot \zeta}{\gamma(t)} \cdot X(t) = 0 \qquad (10)$$

где $\gamma(t)$ - является управляющим параматром акселерации ($\gamma(t) \neq 0$).

При $\gamma(t) = 0$, из (9) получаем что $X(t) \to 0$ экспоненциально, т.е. если нет инвестиции, не будет и предложения на продукты питания. Поэтому, мы рассматриваем лишь, такую инвестиционную политику, где $\gamma'(t) \neq 0$, т.е. можно записать ее в виде:

$$\gamma(t) = \gamma_0^{\;2} + \sum_i \delta_i \cdot t^i \qquad (11)$$

где $\gamma_0 = const. \neq 0$.

Значения γ_0, δ_i надо подобрать из условия оптимальности инвестиций предложенной в работе [2]:

$$\sup \sqrt{\int_0^T X^2(t)dt - \frac{1}{T}(\int_0^T X(t)dt)^2} \leq \varepsilon \qquad (12)$$

где $\varepsilon > 0$.

ε- допустимая амплитуда разброса значений совокупного продукта питания $X(t)$, от ее среднего значения.

Для решения задачи (10), (13) при соответствующих условиях Коши, составляемпрограмму на языке Mathcad и адаптируем нашу задачу соответственно, для применения блока Given и оператора minimize.

Неизвестную функцию совокупного продукта питания $X(t)$, представляем в виде ряда:

$$X(t) = \sum_i a_i \cdot t^i \qquad (13)$$

на промежутке $t \in [0, T]$.

Уравнение (10) удовлетворяется на промежутке времени $[0, T]$, что эквивалентно минимизации левой части уравнения по норме $L_2[0, T]$, т.е. вместо уравнения (10) имеем вариационную задачу

$$I\left(X(t), \gamma(t)\right) = \sqrt{\int_0^T \left[\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\gamma}(t) - \beta \cdot \eta + \alpha - 1}{\gamma(t)} \cdot \dot{X}(t) - \frac{\beta \cdot \zeta}{\gamma(t)} \cdot X(t)\right]^2 dt} \to \min \qquad (14)$$

при условии (12), (13) и ограничении

$$\int_0^T X^2(t)dt - \frac{1}{T}(\int_0^T X(t)dt)^2 \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^T X(t)dt \qquad (15)$$

В результате расчетов на основе MATHCAD 2001, получаем зависимости X(t) и γ(t) (Рис.1).

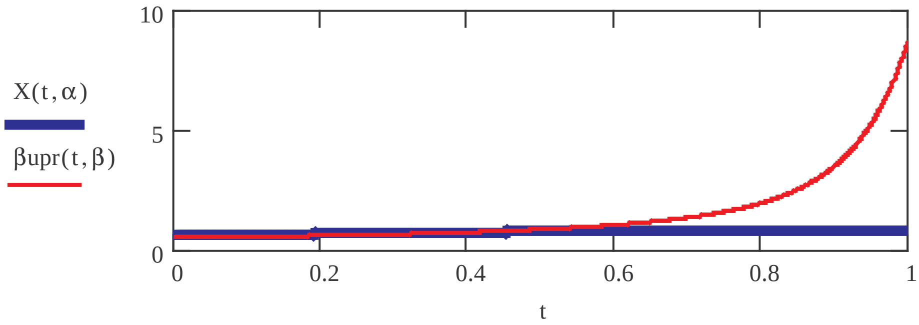

Рис.1.Зависимость совокупного спроса на продукты питания и коэффициента акселерации от времени.

Литература

1. Т.А.Обгадзе. Высшая математика для экономистов,-Москва: ИГУМО, - 2002
2. М. Интрилигатор. Математические методы оптимизации и экономическая теория. Пер. с англ. , Москва. – 1975
3. У.Шарп, Дж.А.Гордон, Д.Бейли. Инвестиции. Пер. с англ., Москва – 1992
4. Э.Петерс. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. Пер. с англ., Москва – 2002
5. Д.Эрроусмит. К. Плейс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. Пер. с англ., Москва – 1986
6. Прангишвили А.И., Обгадзе Л.Т. Обобщенная математическая модель экономической динамики //Грузинский Электронный Научный Журнал: -№3(7),2005,с. 55-58
7. Прангишвили А.И., Обгадзе Л.Т. Математическое моделирование экономических циклов и оптимальное управление капитальными вложениями //Грузинский Электронный Научный Журнал: -№3(7),2005, с. 59-61

Article received: 2006-04-05