УДК 51.371.8

Формирование у студентов научного мировоззрения при обучении математическому анализу

Мамедов Гусейн Али оглы,

Заведующий кафедрой математического анализа Нахчыванского Государственного Университета, Азербайджан

Аннотация:

В работе обосновываются необходимость формирования у студентов научного мировоззрения при обучении их математическому анализу на математических факультетах университетов. Показано, что, опираясь на определенные педагогические принципы, посредством различных форм обучения, также самостоятельных работ по инициативе преподавателей при обучении математическому анализу можно сформировать у студентов научное мировоззрение.

Ключевые слова:

Студент анализ преподавание спрос издержка функция формирование университет мировоззрение

Известно, что “воспитание является неотъемлемой частью всякого образования” [1, с. 24]. А составной частью воспитания является формирование мировоззрения. Взаимодействуюшие в мире закономерности естественны: причины возникновения, развития и изменения тел и явлений заключаются в них самих. Адекватное познание окружающего мира называют научным мировоззрением. “Духовно развивая учащихся, надо формировать у них научное мировоззрение как основу практического отношения к миру” [2, с.11].

Ввиду того, что на математических факультетах университетов на изучение гуманитарных, социальных и экономических дисциплин отводится недостаточное количество учебных часов, не следует возлагать только на соответствующие кафедры такую важную задачу как формирование у студентов научного мировоззрения, ибо курсы преподавания дисциплин общепрофессиональной подготовки указанного направления располагают многочисленными и естественными возможностями. “В процессе преподавания математики педагог может проиллюстрировать все основные законы диалектики на примерах взаимосвязи развития математики и других наук, взаимосвязи развития отдельных областей математики...” [1, с.26]. Ещё полвека назад говоря о математическом анализе, подчёркивали: “не будем колебаться и возможно скорее посвятим учащихся в эти чудесные науки, которые более полезны и вместе с тем имеют большее воспитательное значение, чем любая другая отрасль математики” [3.с.100].

Цель работы – продемонстрировать формирование у студентов научного мировоззрения, опираясь на принципы обучения курсу математического анализа [4,с.6], преподаваемого на математических факультетах университетов.

Для формирования научного мировоззрения у студентов большое значение имеет преподавание курса математического анализа во взаимосвязи с физикой.

Традиционные в курсе математического анализа темы “Определение статического момента и центра тяжести кривой”, “Определение статического момента и центра тяжести плоской фигуры” предлагаются студентам для подготовки рефератов. Вместо с ними решаем нижеследующие задачи.

Задача 1. Растяжение под влиянием собственного веса.

Рассмотрим металлический стержень в форме цилиндра высота H с площадью основания A.

Если его подвесить, то длина стержня увеличится. Вычислим удлинение стержня.

Разобъем цилиндр плоскостями, перпендикулярными образующей, на n цилиндров. Обозначим расстояния плоскостей от точки подвеса через $\ell_1, \ell_2, ..., \ell_{n-1}$. Рассмотрим цилиндр номера к, считая сверху. Этот цилиндр высоты $\ell_k - \ell_{k-1}$ растягивается силой веса цилиндров, лежащих ниже. Этот вес равен:

$$A(H - \ell_k)\delta,$$

где δ - плотность материала.

Величина удлинения по закону Гука равна:

$$\frac{A(H - \ell_k)\delta(\ell_k - \ell_{k-1})}{A \cdot E},$$

где E - модуль растяжения.

Итак

$$\lambda_k = \frac{\delta}{E}(H - \ell_k)(\ell_k - \ell_{k-1}).$$

Таким образом, сумма удлинений всех цилиндров, т.е. всего стержня, приближенно равна сумме

$$\frac{\delta}{E}\sum(H - \ell_k)(\ell_k - \ell_{k-1})$$

Вычисление тем точнее, чем $\ell_k - \ell_{k-1}$ меньше. Растяжение цилиндра есть предел суммы:

$$\lim \frac{\delta}{E}\sum(H - \ell_k)(\ell_k - \ell_{k-1}) = \frac{\delta}{E}\int_0^H (H - \ell)d\ell = \frac{\delta H^2}{2E}.$$

Задача 2. Вычислить работу, необходимую для сжатия идеального газа в цилиндрическом сосуде от объема υ_0 до объема V.

Площадь основания цилиндра обозначим через А. Пусть объем υ_0 заключен в цилиндре высоты h_0, а объем V-b цилиндре высоты H.

Разделим мысленно цилиндр плоскостями, параллельными основанию, на n цилиндров и обозначим расстояния этих плоскостей до плоскости основания через $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$, объем цилиндра с высотой h_k через υ_k. Работа для сжатия объема υ_{k-1} до υ_k равна приближенно произведению силы на путь. Так как сила равна давлению газа на площадь поршня, то из формулы

$$\upsilon_k p_k = c$$

имеем

$$P_k = \frac{c}{\upsilon_k}.$$

Итак, работа силы приближенно равна

$$\frac{A}{\upsilon_k}(h_k - h_{k-1}),$$

или

$$\frac{c}{h_k}(h_k - h_{k-1}),$$

где $\upsilon_к = Ah_к$.

Мы получим не точнее, а приближенное выражение работы, так как сила давления газа не постоянна при сокращении объема. Таким образом, работа по сжатию газа от объема υ_0 до объема V приближенно равна сумме работ, необходимых для сжатия объема υ_0 до υ_{n-1}, υ_{n-1} до $\upsilon_{n-2}, \ldots, \upsilon_1$ до V. Итак, приближенно, работа сила равна:

$$\sum \frac{c}{h_k}(h_k - h_{k-1}) = c\sum \frac{h_k - h_{k-1}}{h_k}$$

В качестве числа, измеряющего работу, принимается:

$$Q = \lim c \sum \frac{h_k - h_{k-1}}{h_k} = c \int_V^{\upsilon_0} \frac{dh}{h} = c \ln \frac{\upsilon_0}{V},$$

но

$$\upsilon_0 p_0 = c,$$

а поэтому

$$Q = \upsilon_0 p_0 \ln \frac{\upsilon_0}{V}$$

или

$$Q = \upsilon_0 p_0 \ln \frac{p}{p_0}$$

где p и p_0 – давления газа при объема V и υ_0 соответственно.

Студенту предлагаем выполнить курсовую работу на тему "Некоторые физические применения двойных интегралов". В курсовой работе широко освещаются следующие вопросы: масса пластинки; координаты центра масс пластинки; момент инерции пластинки; световой поток, падающий на пластинку; поток жидкости через поперечное сечение канала.

Выполнявшему указанную курсовую работу студенту-выпускнику рекомендуем итоговую (дипломную) работу на тему "Некоторые применения интегрального исчисления в физике". Содержание работы включает следующие вопросы: статический момент и центр тяжести материальной кривой; статический момент и центр тяжести плоской фигуры; физические применения двойных интегралов; нахождения массы тела и момент инерции по плотности; вычислить координат центра масс; притяжение материальной точки телом; нахождение массы материальной кривой по ее плотности; вычисление координат центра масс и момент инерции материальной кривой; притяжение точечной масс материальной кривой; работа силового поля.

Поскольку тем же студентом на предыдущих курсах уже выполнены соответствующие работы – реферат по физическим применениям определенного интеграла и курсовая по физическим применениям двойного интеграла, предложенная выпускная работа им исполняется досрочно и качественно.

Связывание преподавания математического анализа с материальными отношениями, экономикой, производством и бытом способствует формированию у студентов научного мировоззрения.

В лекционном занятии выясняем сущность экономическую значимость производной наряду с её физической значимостью.

Издержки производства К однородной продукции есть функция количества продукции x. Поэтому можно записать:

$$К=К(x)$$

Предположим, что количество продукции увеличивается на Δx. Продукции x+Δx соответствуют издержки производства

$$К(x+Δx).$$

Следовательно, приращению количества продукции Δx соответствует приращение издержек производства продукции

$$ΔК=К(x+Δx)-К(x).$$

Среднее приращение издержек производства есть

$$\frac{\Delta K}{\Delta x}.$$

Предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = K'(x)$$

называется предельными издержками производства.

Аналогично, если мы обозначим через U(x) выручку от продажи x единиц товара, то предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = U'(x)$$

будем называть предельной выручкой.

Функциональная зависимость между спроса на данный товар и его ценой (при условии, что цена других товаров, доходы потребителя и структура потребностей – постоянные величины) позволяет цену постовить в соответствие спросу, надлежащим образом определенному. Однако во многих экономических исследованиях необходимо определить не величину спроса, а изменение спроса, вызываемое определенным изменением цены. Иначе говоря, определяется эластичность спроса относительно цена.

Предположим, что спрос q зависит от цена p:

$$q=f(p).$$

Пусть Δp – приращение цены, а Δq – соответствующее приращение спроса. Относительно изменение цены есть $\frac{\Delta p}{p}$, а относительно изменение спроса есть $\frac{\Delta q}{q}$. Частное

$$\frac{\Delta q}{q} : \frac{\Delta p}{p}$$

выражает относительно изменение спроса, если цена товара возрастает на 1%. Эластичность спроса относительно цены называется предел:

$$E_p(q) = E_c = \lim_{\Delta p \to 0} \left(\frac{\Delta q}{q} : \frac{\Delta p}{p} \right) = \frac{p}{q} \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}$$

Эластичность спроса относительно цены приблизительно определяет, как изменится спрос на данный товар, если его цена возрастает на 1%.

В кружковых занятиях при кафедре математического анализа нашего университета обсуждается тема "Применение дифференциального исчисления в решении экономических задач". При этом студенты глубоко осваивают дифференциальное исчисление, заново просматривают школьный курс по экономике. Также решаем задачи нижеследующего порядка.

<u>Задача 3.</u> Предположим, что функция спроса на какой-либо товар есть

$$q=f(p),$$

где p – цена товара, q – соответствующий спрос. Общие расходы населения из данный товар (выручка от его продажи) составляет

$$U=pq,$$

а предельная выручка есть

$$U' = q + p'q = q\left(1 + \frac{p}{q} \cdot q'\right).$$

Поскольку эластичность спроса относительно цены равняется

$$E_c = -\frac{p}{q} q'$$

получаем:

$$U' = q(1 - E_c) \qquad (1)$$

Это уравнение определяет зависимость между выручкой от продажи товара и спросом.

Из уравнение (1) можно сделать следующие выводы:

1. Если $E_c>1$, то $U'<0$, т.е. если спрос эластичен, то с повышением цены выручка от продажи товара снижается.

2. Если E_c=1, то U' =0, U постоянная; это означает, что при нейтральном спросе выручка от продажи данного товара не зависит от изменения цены.
   В этом случае
   $$pq=c,$$
   откуда
   $$q=\frac{c}{p},$$

где c – постоянная. Следовательно, в случае нейтрального спроса его размеры обратно пропорциональны цене.

3. Если $0<E_c<1$, то $U'>0$, т.е. если спрос неэластичен, то с повышением цены выручка возрастает.

Из сказанного видно, что знание эластичности спроса на данный товар позволяет определить сумму выручку под влиянием изменения цены.

Студенты успешно выполняют исследовательскую работу на тему “Применение экстремумов функции в производстве”. Работе прилагается следующие задачи, что вызывает у них живой интерес.

Задача 4. Капиталистическое предприятие производят некоторый продукт и выступает на рынке как монополист. Монополистическое предприятие стремится к максимальной прибыли. Чтобы достигнуть этой цели, предприятие может:

1) увеличить производство, не изменяя цены;
2) не изменять объема производства, а цену приспособить к спросу;
3) не изменять цены, а объем производства приспособить к спросу.

Предположим, что монополистическое предприятие решает произвести x единиц данного продукта. Тогда цена, при которой спрос также составит x единиц, определяется уравнением
$$P=p(x).$$

Обозначим суммарные издержки производства x единиц продукции через K(x). В этом случае прибыл Z=U(x)-K(x) есть также функции x. Таким образом
$$Z = x\cdot P(x) - K(x).$$

Прибыль предприятия максимальна, если выполняются два условия:
$$Z'=0,\ Z''=0.$$

Из первого условия следует, что
$$U'(x)-K'(x)=0$$
или
$$U'(x)=K'(x).$$

Монополистическое предприятие получает максимальную прибыл при таком объеме производства x, для которого предельная выручка равна предельным издержкам.

Из второго условия следует, что
$$U''(x)-K''(x)<0$$
Или
$$U''(x)<K''(x).$$

Это означает, что предприятие получает максимальную прибыль, если темп роста предельной выручки меньше темпа роста предельных издержек.

Задача 5. Кривая польных издержек имеет вид:
$$K=x^3-6x^2+15x,$$
Где x – объем производства.

Рассчитать, при каком объеме производства средние издержки минимальны.

Средние издержки составляют:
$$\pi=\frac{K}{x}=\frac{x^3-6x^2+15x}{x}=x^2-6x+15.$$

Находим:

$$\frac{d\pi}{dx} = 2x - 6$$

Следовательно,

$$\frac{d\pi}{dx} = 0$$

или

2x-6=0

если x=3.

Очевидно, что

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = 2 > 0 .$$

для каждого значение x. Следовательно, для x=3 средние издержки минимальны. Таким образом, минимальные средние издержки составляют:

$\pi(3)=6$.

На практических занятиях по математическому анализу мы решаем нижеследующие.

Задача 6. Переменные издержки производства определяются формулой

$y=3x^2$,

где x – количество продукции. Рассчитать средние издержки производства, если объем производства составляет от 2 до 4 единиц.

Среднее значение функции есть

$$\frac{\int_2^4 3x^2 dx}{4-2} = \frac{3}{2}\int_2^4 x^2 dx = \frac{1}{2}x^3\Big|_2^4 = \frac{1}{2}(64-8) = 28$$

т.е., средние издержки производства составляют 28.

Выполнение курсовых работ, связанных с развитием понятийной аппаратуры по математическому анализу, создает условия для изучения внутренних закономерностей различных процессов у студентов. Например, курсовая работа на тему “Нахождение значений функции” с охотой выполняется студентами. В содержание данной работы входят: нахождение значений функции с применением дифференциала; формула Тейлора; пользование степенными рядами; разработка соответствующей программы.

Опыт показывает, что формированием у студентов научного мировоззрения при обучении математическому анализу можно достичь:

- изучения школьного курса математики с точки зрения моделирования;
- выяснения внутренних закономерностей различных явлений и процессов, приобретения студентами умений и навыков их математического моделирования;
- адекватного понимания научных методов познания окружающего мира;
- приобретения новых знаний;
- создания связей между учебными и исследовательскими методами.

Литература:

1. Кудрявцев Л.Д. Современная математика и ее преподавание. Москва.“Наука”, 1985. с.170.
2. Асланов Р.М. Методическая система обучения дифференциальным уравнениям в педвузе. Автореферат д-ра пед. наук. Москва, 1997. 36 с.
3. Борель Э. Как согласовать преподавание в средней школе с прогрессом науки. – Математическое просвещение, 1958, №3, с.89-100.
4. Мамедов Г.А. Построение системы методики преподавания математического анализа по специальности математики высших школ. Научные труды Нахчыванского государственного университета. №6, 2000. с.4-7. (на азербайджанском языке).