УДК

Статистический анализ и методы оценивания распределений по малой выборке

[1]Гугушвили Джангир, [2]Девнозашвили Марина, [3]Кандашвили Вахтанг, [4]Климов Андрей
[134]Тбилисский Государственный Университет имени Ив. Джавахишвили, кафедра радиофизики и электроники
[2]Тбилисский Государственный Университет имени Ив. Джавахишвили, кафедра микропоцессорных систем

Аннотация:

На практике, очень часто приходится работать в условиях ограниченных объемов выборок. Особенно остро это ощущают службы контроля качества предприятий, имеющих мелкосерийное производство. Аналогичные примеры можно отыскать в медицине, биологии и т. д. При анализе статистического материала ограниченного объема задача оценивания функции распределения принимает, во-первых, проблематичный характер. Единственным методом ее решения в таких условиях, если в этом есть необходимость, является построение статистической функции распределения, имеющей вид ступенчатой кривой, что является не самым лучшим выходом из данной ситуации.

На наш взгляд, эта задача приобретает главенствующее значение для выборок очень малого объема, содержащих менее десяти наблюдений. Показано, что умение строить наиболее достоверную (в вероятностном смысле) оценку функции распределения при малых выборках дает возможность вычислять более точные оценки моментов случайной величины.

Ключевые слова: Случайная величина, статистический анализ, оценивание, выборка.

Основная цель статистического анализа состоит в исследовании свойств случайной величины. Экспериментальной основой такого исследования служат результаты неоднократного измерения значений изучаемой случайной величины, которые обычно рассматриваются как случайная выборка из гипотетической генеральной совокупности.

При статистическом анализе в каждом конкретном практическом случае может решаться ряд задач, каждая из них, если говорить в общем смысле, включает два этапа: обработку выборки и принятие решения.

На практике очень часто приходится работать в условиях ограниченных объемов выборок. Особенно остро это ощущают службы контроля качества предприятий, имеющих мелкосерийное производство. Такое же положение существует в производстве и эксплуатации дорогостоящих и высоконадежных технических изделий. Аналогичные примеры можно отыскать в медицине, биологии и т. д. При анализе статистического материала ограниченного объема задача оценивания функции распределения принимает, во-первых, проблематичный характер. Единственным методом ее решения в таких условиях, если в этом есть необходимость, является построение статистической функции распределения, имеющей вид ступенчатой кривой, что является не самым лучшим выходом из данной ситуации. Во-вторых, на наш взгляд, эта задача приобретает главенствующее значение для выборок очень малого объема, содержащих менее десяти наблюдений. В дальнейшем будет показано, что умение строить наиболее достоверную (в вероятностном смысле) оценку функции распределения при малых выборках дает возможность вычислять более точные оценки моментов случайной величины и более уверенно. т. е. с меньшими ошибками первого и второго рода, принимать решение при проверке статистических гипотез.

Интуитивно, конечно, ясно, что выборка, объемом от трех до десяти элементов является малой, десять — тоже. Но как определить верхнюю границу малой выборки? В современном потоке научной литературы сведения по затронутому вопросу весьма скудны и разрозненны.

В основном преобладает условный и субъективный подход. Некоторые авторы считают ограниченными выборки объемом менее 200 единиц [9], другие называют малыми выборки менее 50 единиц [22]. Элемент объективности несет в себе определение, данное в работе [12]: “... любая однородная выборка может считаться малой, если количество ее членов меньше расчетного числа, определенного при помощи специальной номограммы достаточно больших чисел [13] или другим способом для заданного уровня точности и надежности”. В это определение введен количественный критерий — это шаг вперед. Но, по нашему мнению, это определение недостаточно глубоко вскрывает существо выборочного метода, применяемого для анализа случайных явлений. Слабость определения в том, что оно связано с методами обработки, что совершенно недопустимо, так как при этом сразу же вносится элемент субъективизма, присущий каждому методу. Кроме того, данным определением не всегда можно воспользоваться практически из-за отсутствия функциональной зависимости объема выборки от точности и достоверности.

Наша цель - рассмотреть новые методы, позволяющие решить эту задачу для малой выборки. Но прежде следует обратиться к *традиционным* приемам оценивания, чтобы в дальнейшем яснее показать те идеи, на которых возникла целая серия новых методов. Объем выборки будем оговаривать в том случае, если в этом возникает необходимость.

Широко используемый традиционный (классический) метод построения оценки $F^*(x)$ функции распределения $F(x)$ по выборке

$$x_1, x_2, \ldots, x_N \tag{1}$$

когда N мало, основан на построении статистической функции распределения по выборке (1) в соответствии со следующим выражением [15]:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_i; \\ \dfrac{i}{N}, & x_i < x \le x_{i+1}; \\ 1, & x_N; \end{cases} \tag{2}$$

где i — порядковый номер реализации x_i в вариационном ряду (1).

График статистической функции распределения представляет собой ступенчатую линию со скачками по величине равными N^{-1}, во всех точках $x = x_i$, при $i = 1,2,3,\ldots,N$.

При этом в каждой точке x_i значение оценки функции распределения есть:

$$F^*(x_i - 0) = F(x_{i-1}) = \frac{i-1}{N}; \tag{3}$$

$$F^*(x_i + 0) = F(x_{i-1}) = \frac{i}{N}; \tag{4}$$

где $F^*(x_i - 0)$ и $F^*(x_i + 0)$ — значения оценки в точке x_i слева и справа соответственно. На интервале $\left(x_i, x_{i+1}\right]$ оценка $F^*(x)$ сохраняет постоянное значение i/N. Поскольку $F^*(x)$ является ступенчатой функцией, то выражение может быть упрощено путем применения единичных ступенчатых функций:

$$F^*(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{I}(x, x_i), \tag{5}$$

где $\mathrm{I}(x, x_i)$ — единичная ступенчатая функция со скачком в точке $x = x_i$:

$$\mathrm{I}(x, x_i) = \begin{cases} 0 & x < x_i \\ 1 & x \ge x_i \end{cases} \tag{6}$$

Точность оценки (2) или (5) можно определить с помощью статистики Колмогорова

$$D_N = \max_{-\infty < x < +\infty} \left| F^*(x) - F(x) \right|, \tag{7}$$

строя по заданной доверительной вероятности β доверительную зону с границами

$$F^*_{up} = F^*(x) + D_N(\beta), \qquad (8)$$
$$F^*_{down} = F^*(x) - D_N(\beta),$$

Статистика (6) описывается распределением Колмогорова

$$P\{\sqrt{N} \quad D_N < \lambda\} = \beta \qquad (9)$$

Впервые задача оценивания плотности распределения случайной величины по выборке малого объема была поставлена и частично решена в работе [18] Чавчанидзе В. В. и Кумсиашвили В. А. “Об определении законов распределения на основе малого числа наблюдений”. Далее рассматривались разнообразные аспекты этой задачи, предлагались методы ее решения, приводились результаты теоретического и экспериментального исследования [1, 3, 4, 5, 7, 11, 12, 15].

Оценка плотности распределения для большинства предлагаемых методов обобщенно может быть выражена линейной суммой двух компонент: априорной и эмпирической. При этом эмпирическая компонента, в свою очередь, вычисляется как линейная сумма функций, удовлетворяющих определенным требованиям и построенных на реализациях выборки:

$$f^*(x) = c + \alpha_0 f_0(x) + \frac{1-\alpha_0}{N}\sum_{i=1}^{N} p(x - x_i), \qquad (10)$$

где $f_0(x)$ - априорная компонента; $p(x - x_i)$ - составляющая эмпирической компоненты, связанные с i-й реализацией выборки; α_0 - вес априорной компоненты, c - некоторая постоянная.

Различным методам оценивания соответствуют разные значения коэффициента α_0 из интервала $[0,1]$ и разные виды функции $p(x - x_i)$.

Оценка плотности распределения вида (10) при значении $\alpha_0 = 0$ широко известна [13, 16, 17, 19]. Но до сих пор не ставился акцент на ограниченность объема выборки и не проводились исследования поведения оценки в этих условиях.

Основное внимание здесь уделим методам построения оценок по малой выборке, для которых получены результаты, демонстрирующие эффективность вычисляемых оценок по сравнению с традиционным подходом, определяемым выражением (5).

Метод прямоугольных вкладов (МПВ) [18] направлен на построение оценки плотности распределения $f^*(x)$. Он основан:

- на использовании дополнительной, априорной информации о случайной величине X;
- на индивидуальном подходе к каждой отдельной реализации выборки;
- на равномерном “размазывании” информации, полученной от отдельной реализации выборки, на конечном интервале длиной d.

В качестве дополнительной априорной информации предполагается знание интервала $[a,b]$ изменения случайной величины X. При этом считается, что оцениваемая функция распределения $f(x)$ непрерывна, не имеет очень крутых скачков на заданном интервале и

$$f(x) \geq 0 \text{ при } a \leq x \leq b; \qquad (11)$$
$$f(x) \equiv 0 \text{ при } x < a, x > b.$$

Наличие подобной априорной информации, даже при отсутствии реализации X, позволяет построить оценку плотности $f^*(x)$. На имеющемся уровне знания ни одной из возможных реализаций внутри интервала $[a,b]$ нельзя дать предпочтение. Такой особенностью обладает равномерное распределение на $[a,b]$

$$f_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x < a, x > b. \end{cases} \qquad (12)$$

Экспериментальным путем была определена эффективность *Метода Прямоугольных Вкладов* МПВ [18] по сравнению с традиционным (классическим) методом оценивания по выражению (5).

На наш взгляд алгоритм генерации случайных чисел по заданному закону является существенной частью всего экспкримента. Практически ни в одной работе не говорится об алгоритме, выбранном для генерации последовательности случайных чисел. Качественная реализация алгоритма случайных чисал подразумевает качественный исход всего эксперимента в целом. Наша работа не будет претендовать на полноту содержания без этой важной детали.

Большинство универсальных компьютеров не имеет датчиков случайных чисел, а разработка таких приставок собственными силами не всегда достигает цели, так как довольно трудно обеспечить устойчивую работу датчика в условиях нестабильности параметров схемы. Кроме того, недостатком такого способа является невозможность точного воспроизведения результатов процесса (нельзя провести повторный счет), а это существенно затрудняет контроль экспермента.

Поэтому мы рассмотрим программный способ формирования случайных последовательностей, основанный на использовании некоторого рекуррентного соотношения. При этом в качестве основного механизма случайных величин используем последовательность равномерно распределенных в интервале $(0,1)$ случайных чисел, которые подвергаются дальнейшим преобразованиям для получения заданных законов распределения.

На практике обычно применяются более сложные алгоритмы, дающие распределения лучшего качества и учитывающие специфику конкретных процессоров ЭВМ. Полученные программным способом случайные числа, строго говоря, не являются случайными, так как рекурентный способ образования последовательности позволяет по известному числу этой последовательности (например первому) однозначно определить все остальные. При этом не исключена возможность образования периодически повторяющихся циклов. Кроме того, следует иметь в виду ограниченность разрядной сетки машины, вследствии чего не возможно получить срого равномерное распределение на определеном интервале.

Особенности метода прямоугольных вкладов

При более глубоком исследовании МПВ был замечен ряд оссобенностей, которые не оговорены ни в одной работе. Иследования показали, что результаты МПВ в некоторой степени зависят от вида распределения, а так же от длины рассматриваемого интервала значений случайной величины. Кроме того, МПВ вносит в оценку еще один параметр - ширину прямоугольного вклада, и логично поставить вопрос: как зависит достоверность оценки от ширины прямоугольного вклада? Есть ли оптимальное значение d, при котором достигается максимальная точность построения? Какова зависимость d от объема выборки N.

Как показали исследования *неэффективно* искать оптимальную ширину прямоугольного вклада непосредственно строив функцию $f^*(x)$ плотности распределения случайной величины. На рисунке 1 показаны построения плотности распределения при выборке $N = 3$ для двух значений ширины прямоугольного вклада равных $d_1 = 1{,}2$ и $d_2 = 1{,}7$. При плавном переходе от величины $d_1 = 1{,}2$ к $d_2 = 1{,}7$ на рисунке 1 два соседних прямоугольных вклада сливаются вместе и образуется пик.

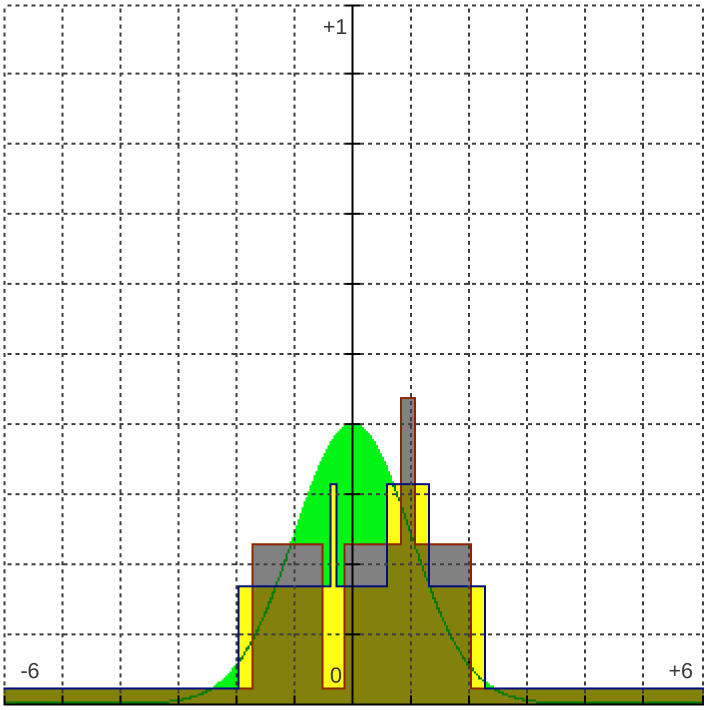

Рис. 1; X = [-6,+6]; Y = [0,+1];

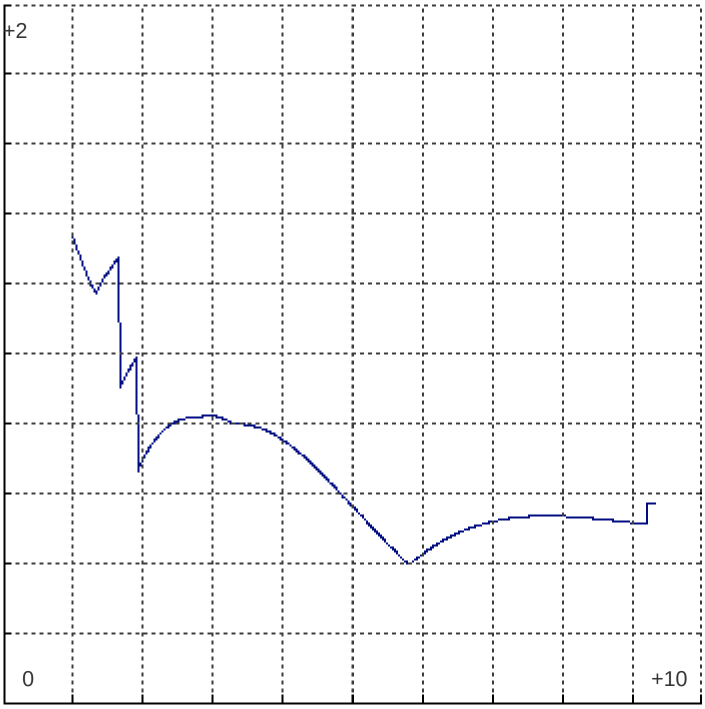

Рис. 2; X = [0,+10]; Y = [0,+2];

В этот момент величина среднего отклонения $f^*(x)$ от $f(x)$ испытывает скачек. Этот эффект продемонстрирован на рисунке 2. Здесь показана зависимость величины среднего отклонения $f^*(x)$ от $f(x)$ при переменной ширине прямоугольного вклада d. Картина заметно меняется, если построенную по МПВ оценку $f^*(x)$ интегрировать (рис 3).

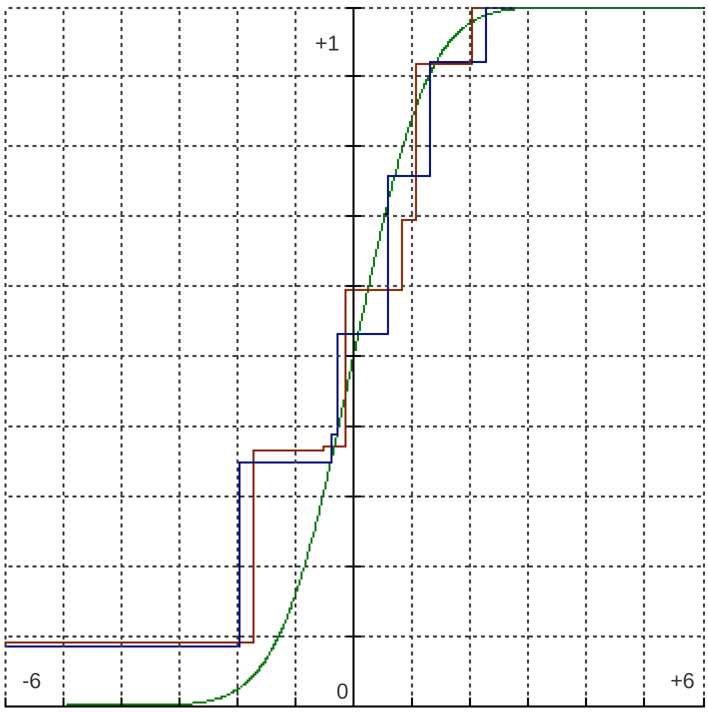

Рис. 3; X = [-6,+6]; Y = [0,+1];

При таком раскладе, получается довольно плавные кривые зависимости среднего отклонения $F^*(x)$ от $F(x)$ при переменном значении величины d. На рисунке 4 приведены такие кривые, построенные для равномерного распределения N(0,1) в интервале $[-5,+5]$ при $N=1$, $N=3$, $N=5$, $N=10$, $N=15$, $N=20$ соответственно сверху вниз. Чем меньше выборка — тем меньше точность. Все эти кривые, как видно, имеют минимум в некоторой точке — d_{opt}.

В таблице 1 приведены оптимальные значения ширины вклада для разных значений N того же нормального распределения.

Таблица 1

Выборка N	Оптимальная ширина вклада d_{opt}	Выборка N	Оптимальная ширина вклада d_{opt}
1	3,13	11	2,45
2	3,05	12	2,40
3	2,98	13	2,35
4	2,90	14	2,31
5	2,82	15	2,27
6	2,75	16	2,23
7	2,68	17	2,20
8	2,62	18	2,17
9	2,56	19	2,15
10	2.50	20	2,13

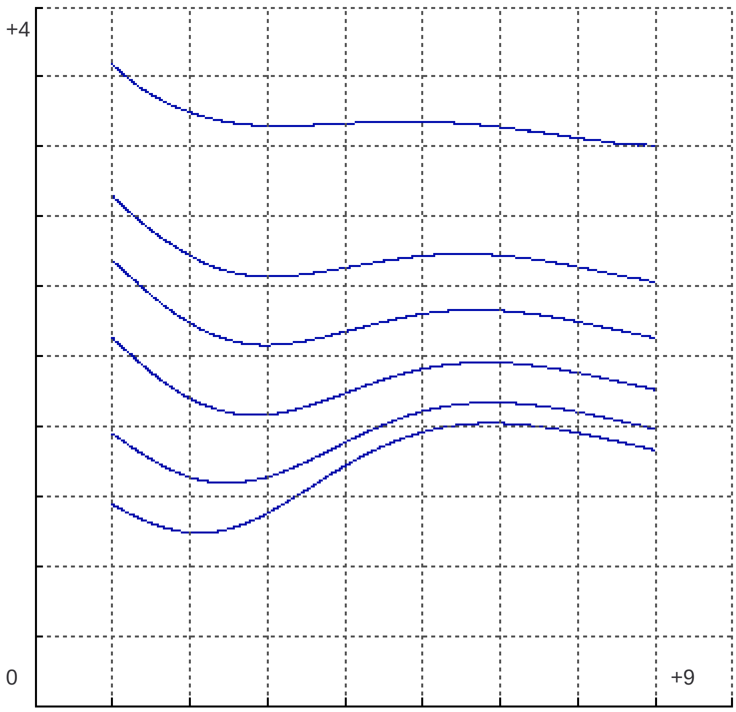

Рис. 4; X = [0,+9]; Y = [0,+4];

На рисунке 5 показан график построенный по таблице 1.

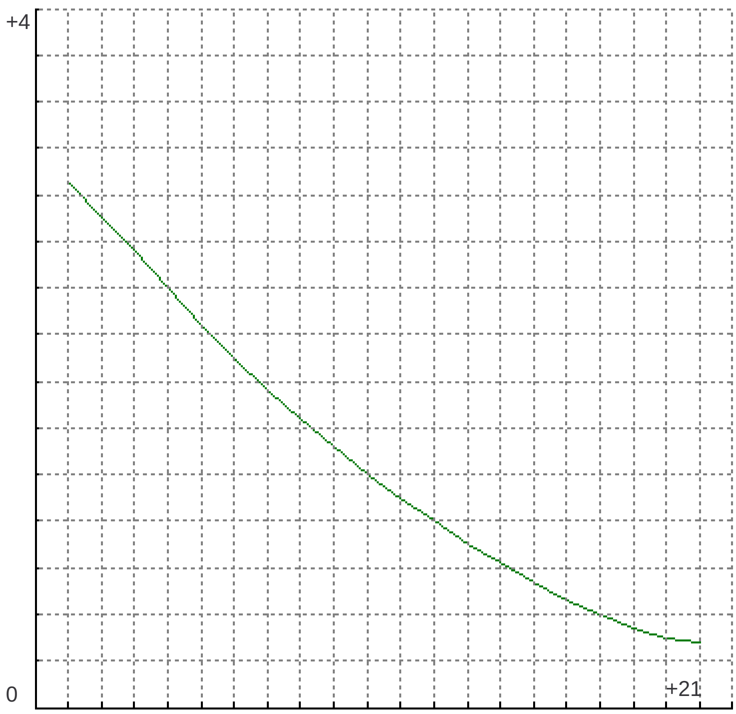

Рис. 5; X = [0,+21]; Y = [0,+4];

При исследовании большого числа опытов было замечено, что в большинстве случаев в рассматриваемом интервале $[a,b]$ случайной величины X уклонение $F^*(x)$ от $F(x)$ может иметь характер пика для одного значения x в выборке, тогда как для остальных это уклонение сравнительно мало. Поэтому более эффективно будет, если в качестве оцениваемого параметра выбрать не значение максимальное уклонения D_m, а значение среднего уклонения D_s по формуле:

$$D_s = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|F(x_i) - F^*(x_i)\right|, \qquad (13)$$

Был проведен следующий эксперимент:

1. организовывался датчик случайных чисел, распределенных по заданному закону $F(x)$ - равномерному R(0,1), нормальному N(0,1) в интервале $[-5,+5]$, экспоненциальному E(0,1) в интервале $[0,+10]$, Релея L(0,1) в интервале $[0,+10]$.
2. генерировались малые выборки (объема $N=3$, $N=6$, $N=10$, $N=20$) случайных чисел $L=4096$ раз;
3. по каждой выборке строились оценки функции распределения $F^*(x)$ двумя способами: МПВ и по выражению (5) (Ширина вклада равнялась $d=0{,}5(b-a)$ для равномерного распределения, $d=2{,}9$ для нормального, $d=1{,}2$ для экспоненциального, $d=1{,}4$ для Релея). Для МПВ полученная оценка интегрировалась.
4. для каждой оценки $F^*(x)$ вычислялась величина D_s среднего абсолютного уклонения от $F(x)$;
5. по L значениям вличины D_s опрделялись оценки $M^*[D_s]$ и $\sigma^*[D_s]$ для обоих случаев обработки, для разных законов распределения.

Результаты были помещены в таблицу 2.

Таблица 2

Закон распредения величины X	Выборка N	$M^*[D_s]$		$\sigma^*[D_s]$	
		ТМ	МПВ	ТМ	МПВ
Равномерный	3	0,181	0,162	0,036	0,036
	6	0,127	0,105	0,032	0,029
	10	0,100	0,078	0,029	0,025
	20	0,070	0,053	0,021	0,018
Нормальный	3	0,186	0,130	0,032	0,027
	6	0,131	0,089	0,031	0,021
	10	0,102	0,071	0,026	0,017
	20	0,071	0,056	0,021	0,011
Экспоненциальный	3	0,187	0,166	0,034	0,049
	6	0,130	0,137	0,031	0,045
	10	0,101	0,126	0,028	0,042
	20	0,070	0,119	0,021	0,033
Релея	3	0,187	0,136	0,037	0,034
	6	0,130	0,098	0,033	0,031
	10	0,101	0,079	0,029	0,027
	20	0,070	0,061	0,022	0,021

Как видно МПВ эффективно работает во всех случаях кроме экспоненциального распределения.

Далее был рассмотрен еще один вариант оценивания. Предыдущий эксперимент был повторен с некоторыми изменениями, а именно при построении ступеней по формуле (2) и прямоугольников по МПВ в качестве конечных значений брались значения лежащие на центрах тяжести ступеньки для формулы (2) и на центрах тяжести боковых сторон прямоугольного вклада для МПВ. Эти значения соединялись затем отрезками и в результате получалась кривая функции распределения $F^*(x)$.

Результаты оценки были помещены в таблицу 3.

Как видно по сравнению с предыдущим экспериментом для малых N получаются более хорошие результаты. Однако для экспоненциального распределения результаты все равно неудовлетворительны. Очевидно, форма прямоугольного вклада слишком “груба”, чтобы применять ее для построения кривой экспоненциального распределения. Действительно, при дальнейшей проверке различных видов распределений, метод МПВ дает неудовлетворительный результат в тех случаях, когда кривая плотности распределения имеет крутые подъемы или острые пики. Однако в остальных случаях МПВ показывает отличные результаты. Поэтому к ограничениям (12) обязательно следует добавлять ограничение на форму кривой плотности распределения — плотность распределения не должна иметь слишком крутых подьемов.

Таблица 3

Закон распредения величины X	Выборка N	$M*[D_s]$		$\sigma*[D_s]$	
		TM(s)	МПВ(s)	TM(s)	МПВ(s)
Равномерный	3	0,138	0,122	0,043	0,042
	6	0,102	0,095	0,034	0,031
	10	0,087	0,072	0,029	0,025
	20	0,065	0,051	0,022	0,018
Нормальный	3	0,124	0,116	0,037	0,028
	6	0,105	0,082	0,032	0,021
	10	0,089	0,067	0,027	0,017
	20	0,065	0,054	0,021	0,011
Экспоненциальный	3	0,124	0,141	0,039	0,048
	6	0,104	0,124	0,033	0,046
	10	0,088	0,117	0,028	0,042
	20	0,051	0,114	0,018	0,033
Релея	3	0,124	0,114	0,045	0,040
	6	0,104	0,088	0,036	0,033
	10	0,088	0,074	0,030	0,028
	20	0,066	0,059	0,022	0,022

Практические рекомендации

В предыдущем параграфе мы столкнулись со следующим заключением: “форма прямоугольного вклада слишком “груба”, чтобы ее применять для построения кривой экспоненциального распределения”. А какова должна быть форма вклада? Разумнее всего предложить вклад по форме напоминающий форму самой плотности экспоненциального распределения. В действительности — логичнее всего ожидать выпадение того значения случайной величины, которое наиболее вероятно. Для экспоненциального распределения наиболее вероятным значением является нуль. В самом благоприятном случае, если нам заранее хотя бы примерно известны параметры распределения и выпадает нуль, то в нулевой точке мы построим вклад в виде экспоненциального распределения и тем самым получим практически идеальную оценку. На практике конечно далеко не всегда можно расчитывать на такой благоприятный исход. Однако чего в итоге мы должны ожидать?

При отсутствии выборки на имеющемся уровне знания ни одной из возможных реализаций внутри интервала $[a,b]$ нельзя дать предпочтение, и мы используем в качестве вклада равномерное распределение на $[a,b]$ (априорная плотность).

При появлении выборки, в каждую случайно выпавшую точку мы вставляем вклад имеющий форму плотности экспоненциального распределения (а в общем случае, того распределения, которое ожидается получить). Линейное суммирование с равными весами априорной плотности и вкладов для всех N элементов выборки и дальнейшее нормирование аналогично МПВ, приводит в итоге к искомой оценке плотности $f^*(x)$. При построении оценки для вкладов, выходящих за одну из границ интервала $[a,b]$, рекомендуется отбрасывать части, выходящие за эти границы. Над оставшейся частью вклада, лежащей внутри интервала $[a,b]$, как над основанием, следует равномерно надстраивать прямоугольник, площадь которого равна отброшенной. Эта рекомендация также позволит сохранить нормированность конечного результата. Интуитивно следует ожидать получения хорошей оценки для $\sigma^*[D_s]$. А вот $M^*[D_s]$ — наверняка окажется сильно сдвинутым от своего идеального значения. Однако оценка $\sigma^*[D_s]$ является более эффективной. А $M^*[D_s]$ всегда можно подогнать с помощью определенного коэффициента. Ожидается, что этот коэффициент будет зависить от объема выборки и длины интервала $[a,b]$. Он будет носить такую же смысловую нагрузку как и ширина прямоугольного вклада d для МПВ.

Предварительные эксперименты использующие такой радикальный подход показали просто потрясающие результаты как для экспоненциального распределения, так и для нормального распределения, где использовался колоколообразный вклад. Следует однако отметить, что эффективная реализация этого нового метода возможна в том случае, когда хотя бы примерно известна форма ожидаемой плотности распределения. Хотя в подавляющем большинстве задач дело обстоит именно так.

Приложение

В приложении 1 приведены программные реализации некоторых классов и их методов, написанных на языке программирования C++.

Класс LRandom написан специально для генерирования случайных чисел по заданному закону распределения, по заданным параметрам. Он использует только одну стандартную математическую библиотеку math.h языка C++.

```
// Class LRandom.
// Copyright (c) 2001 by Lorelea Abstract Vision
// All Rights Reserved.
// Autor: Andrey Klimof


#include <math.h>


class LRandom
 {
 private:
 protected:
 unsigned long int Base;
 public:
 LRandom(void);
 LRandom(LRandom &);
 void Randomize(void);
 void SetBaseValue(unsigned long int);
 double GetUniformValue(void);
 double GetNormalValue(double , double);
 double GetExponentialValue(double ,double);
 double GetLogNormalValue(double, double);
 double GetLnNormalValue(double, double);
 };


LRandom::LRandom(void)
 {
 Randomize();
 }


LRandom::LRandom(LRandom & Hrandom): Base(HRandom.Base)
 {
 }


void LRandom::Randomize(void)
 {
 // Код этой функции должен инициализировать
 // переменную-член Base случайным,
 // не равным нулю значением единственный раз.
 // Это значение берется из текущего состояния таймера.
 // Программная реализация кода этой функции в сильной
 // степени зависит от ссобенностей ЭВМ.
 }


void LRandom::SetBaseValue(unsigned long int B)
 {
 Base = B;
 }
```

```
// Равномерное распределение
double LRandom::GetUniformValue(void)
 {
 Base *= 1220703125L;
 return (double) Base * 0.23283064E-9;
 }


// Нормальное распределение
double LRandom::GetNormalValue(double M, double Sigma)
 {
 const unsigned int dim = 3;
 const unsigned int cicle = 12 * dim * dim;
 double r=0;
 for (int t=0; t < cicle; t++)
 {
 r += GetUniformValue();
 }
 r -= cicle / 2;
 r /= dim;
 return r = M + Sigma * r;
 }


// Экспоненциальное распределение
double LRandom::GetExponentialValue(double Beta,double Lambda)
 {
 if (!Lambda) return Lambda; // Lambda must be NON ZERO
 return Beta - 1.0 / Lambda * log(GetUniformValue());
 }


// Логарифмически нормальное распределение типа log
double LRandom::GetLogNormalValue(double M, double Sigma)
 {
 return exp (( M + Sigma * GetNormalValue(0,1)) / 0.434294 );
 }


// Логарифмически нормальное распределение типа ln
double LRandom::GetLnNormalValue(double M, double Sigma)
 {
 return exp ( M + Sigma * GetNormalValue(0,1) );
 }


// Распределение Релея
double LRandom::GetRelayValue(double M, double Sigma)
{
return M + Sigma * sqrt ( -2 * log( GetUniformValue()) );
}
```

Список литературы

1. Березин О. П. Определение законов распределения малых выборок методом прямоугольных вкладов. — Доклады к НТК по надежности судового электрооборудования, вып. 65. Л., 1965, с. 190—198.
2. Даймменд С. Мир вероятностей. Статистика в науке. М., Статистика, 1970. 155
3. Демаков И. П., Потепун В. Е. Статистические методы определения законов рапределения при анализе точности и надежности промышленных изделий по результатам экмперемента. Л., 1970. 39 с.
4. Демаков И. П. и др. Статистический анализ малого числа наблюдений. Л., 1973. 27 с.
5. Еременко И. В., Свердлик А. Н. Об одном методе построения законов распределения величин при малом числе испытаний. — В кн.: Некоторые вопросы специального применения вычислительной техники. Л., ЛВИКА им. А. Ф. Можайского, 1963, с. 18—29.
6. Закс Ш. Теория статистических выводов. М., Мир, 1975. 776 с.Калинин О. М. и др. Математические методы обработки результатов эксперементального исследования личности. — В кн.: Клинико-психологическиеисследования личности. Л., Медицина, 1971, с. 39—42.
7. Калинин О. М. и др. Математические методы обработки результатов эксперементального исследования личности. — В кн.: Клинико-психологическиеисследования личности. Л., Медицина, 1971, с. 39—42.
8. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М., Наука, 1973. 900 с.
9. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. М., Наука, 1966. 587 с.
10. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М., Наука, 1974. 120 с.
11. Кудрицкий В. Д. Прогнозирование надежности радиоэлектронных устройств. Киев, Техника, 1973. 156 с.
12. Методы статистического анализа и обработка малого числа наблюдений при контроле качества и надежности приборов и машин. Л., 1974. 92 с.
13. Надарая Э. А. Некоторые новые оценки функции распределения. — Теория вероятностей и ее применения, 1964 т. 9, № 3, с. 14—17.
14. Рузинов Л. П. Статистические методы оптимизации химических процессов. М., Химия, 1972. 198 с.
15. Рябинин И. А. Основы теории и расчета надежности судовых электроэнергетических систем. Л., Судостроение, 1967. 362 с.
16. Хашимов Ш. А. Оценка плотности вероятности полиномами Лагерра. — В кн.: Случайные процессы и статистические выводы. Ташкент, Фан, 1973, вып. 3, с. 29—33.
17. Хашимов Ш. А. Равномерная среднеквадратичная сходимость оценки плотности вероятности. — В кн.: Случайные процессы и статистические выводы. Ташкент, Фан, 1974, вып. 4, с. 43—48.
18. Чавчанидзе В. В., Кумсишвили В. А. Об определении законов распределения на основе малого числа наблюдений. — В кн.: Применение вычислительной техники для автоматизации производства (Труды совещания 1959 г.). М., Машгиз, 1961, с.71—75.
19. Ченцов Н. Н. Статистические решающие правила и оптимальные выводы. М., Наука, 1972. 520 с.
20. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. 1—2. М., Наука, 1969, 528 с.
21. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. 3. М., Наука, 1969, 352 с.
22. Шор Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. М., Советское радио, 1962. 352 с.
23. Anderson T. W. On the distribution of the two-sample Cramervon Mise`s criterion. — Annals of Math. Statist., 1962, v. 33.

Получена: 23.01.2003
Получена после переработки: 19.12.2003