Об одной математической модели акустики

Чилачава Темур

Сухумский государственный университет
Грузия, Тбилиси, 380043, ул. Джикиа 9.

Анотация

В данной работе нами ранее предложенным асимптотическим методом малого параметра, характеризующего отклонение показателя преломления среды от единицы, найдено звуковое поле, создаваемое гармоническими точечными источниками в трёхмерно-неоднородном волноводе со взволнованной поверхностью и неровным твёрдым дном.

Доказано, что возмущение звукового поля имеет вид континуальной суммы расходящихся вторичных волн, "источниками" которых являются неоднородность среды и неровность границ. При этом амплитуды волн пропорциональны малому параметру и зависят от параметров всех мод (нормальная волна).

Ключевые слова*: пространственно-неоднородный волновод, неровность границ, асимптотический метод*

Вопросы, связанные с существованием и единственностью решения краевых задач для уравнения Гельмгольца с переменными коэффициентами представляют значительный интерес в теории дифференциальных уравнений с частными производными [1 - 4].

В настоящей работе автором ранее предложенным асимптотическим методом малого параметра, характеризующего отклонение показателя преломления среды от единицы, найдено звуковое поле, создаваемое гармоническими точечными источниками в пространственно-неоднородном волноводе со взволнованной поверхностью и неровным дном.

1. В качестве математической модели рассмотрим задачу об определении звукового поля, созданного конечным числом точечных гармонических источников в пространственно-неоднородном волноводе со взволнованной поверхностью и неровным твёрдым дном.

Звуковое давление, создаваемое гармоническими точечными источниками в точке $x=(x_1,x_2,z)$ водного слоя описывается выражением

$$p(x,t)=\mathrm{Re}\left[\mathrm{U}_\varepsilon(x)e^{-i\omega t}\right],$$

где комплексная амплитуда $U_\varepsilon(x)$

(искомая функция в области $\Omega_1=\overline{\Omega}_0\times(-1+\varepsilon f(x'),\varepsilon g(x'))$

является решением следующей задачи

$$\left(\Delta+k^2n^2(x)\right)U_\varepsilon(x)=-\sum_{j=1}^{m}\delta\left(x-x_j^0\right),\qquad -1+\varepsilon f(x')<z<\varepsilon g(x') \tag{1.1}$$

$$U_\varepsilon(x)\Big|_{z=\varepsilon g(x')}=0,\qquad \frac{\partial U_\varepsilon(x)}{\partial \upsilon_\varepsilon}\Bigg|_{z=-1+\varepsilon f(x')}=0$$

$$U_\varepsilon(x)\to 0,\qquad \left|x-x_j^0\right|\to\infty,\qquad j\in\overline{1,m},\qquad \mathrm{Im}\,\omega>0, \tag{1.2}$$

где $n^2(x)$ - квадрат показателя преломления водного слоя, $z=\varepsilon g(x')$, $x'=(x_1,x_2)$ - уравнение водной поверхности (верхняя граница), $g(x')\geq 0$ - некоторая гладкая функция, заданная на $\overline{\Omega}_0$, $z=-1+\varepsilon f(x')$ - уравнение дна (нижняя граница), k - безразмерное волновое число, причём в качестве размерного физического параметра взята глубина волновода H, $x_j^0=(0,0,z_j)$, $j\in\overline{1,m}$, $m\in N$ - точки, расположения источников, $f(x')\geq 0$ - гладкая функция, отличная от нуля только на некотором ограниченном множестве Ω

$$\Omega=\bigcup_{j=1}^{s}\Lambda_j$$

$$s>1 \qquad \bigcap_{j=1}^{s}\Lambda_j=\varnothing,\ s\in N,$$

где s - число неровностей дна,

υ_ε - единичняя нормаль к нижней границе, которая вычисляется по формуле:

$$\upsilon_\varepsilon(x',\ -1+\varepsilon f(x'))=\left(1+\varepsilon^2|\nabla' f(x')|^2\right)^{-1/2}\left(-\varepsilon\frac{\partial f}{\partial x_1},\ -\varepsilon\frac{\partial f}{\partial x_2},\ 1\right)=$$
$$=(0,0,1)-\varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\ 0\right)+\underline{\underline{O}}(\varepsilon^2) \tag{1.3}$$

Ясно, что краевая задача (1.1), (1.2) аналитически точно не решается.

2. Из многочисленных экспериментальных данных следует, что в реальных ситуациях квадрат показателя преломления водного слоя очень близок к единице [5]. Отклонение является порядка 10^{-2},

Учитывая это, нами был введён малый параметр [6]

$$n^2(x)=1+\varepsilon\eta(x),$$
$$\eta(x)\in C(\Omega_1),\qquad \max_{x\in\Omega_1}\operatorname{mod}\eta(x)\leq\underline{\underline{O}}(1),\quad \varepsilon=\underline{\underline{O}}(10^{-2})\cdot$$

Для решения краевой задачи (1.1), (1.2) используем асимптотический метод малого параметра [6].

При этом малый параметр ε входит в уравнение (1.1) и в граничные условия (1.2) регулярным образом, поэтому решение задачи (1.1), (1.2) можно искать в виде регулярного асимптотического разложения по малому параметру

$$U_\varepsilon(x)=\sum_{j\geq 0}U_j(x)\varepsilon^j \tag{2.1}$$

где коэффициенты ряда $U_j(x), j\geq 0$ ищутся как решения некоторых краевых задач для неоднородного уравнения Гельмгольца в невозмущённом волноводе.

Коэффициенты разложения (2.1) вычисляются рекурентным образом. Практически достаточно вычислить нулевое $U_0(x)$ и первое $U_1(x)$ приближения.

Для нулевого приближения получим краевую задачу

$$(\Delta+k^2)U_0(x)=-\sum_{j=1}^{m}\delta(x-x_j^0),\qquad -1<z<0$$
$$U_0(x)\big|_{z=0}=0, \tag{2.2}$$
$$\left.\frac{\partial U_0(x)}{\partial z}\right|_{z=-1}=0,$$

решение которой имеет вид:

$$U_0(x)=U_0(\mathrm{r},\mathrm{z})=\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}\sin(\beta_n z_j)\cdot\sin(\beta_n z)H_0^{(1)}(k\lambda_n r) \tag{2.3}$$

$$\mathrm{r}=|\mathrm{x}'|,\qquad \beta_{\mathrm{n}}=(0{,}5+\mathrm{n})\pi,\qquad \mathrm{n}\in \mathrm{Z}_0^{+}=\mathrm{N}\bigcup\{0\},$$

$$\lambda_n=\left(1-\beta_n^2/k^2\right)^{1/2}.$$

Для первого приближения $U_1(x)$ получим краевую задачу

$$(\Delta+k^2)U_1(x)=-k^2\eta(x)U_0(x),\quad -1<z<0$$

$$U_1(x)\big|_{z=0}\equiv\varphi(x'),\qquad \left.\frac{\partial U_1(x)}{\partial z}\right|_{z=-1}=\psi(x'), \tag{2.4}$$

$$\varphi(x')\equiv-\left.\frac{\partial U_0(x)}{\partial z}\right|_{z=0} g(x'),$$

$$\psi(x')\equiv\left.\left(\nabla' U_0(x)\cdot\nabla' f(x')-\frac{\partial^2 U_0(x)}{\partial z^2}f(x')\right)\right|_{z=-1}$$

$$\nabla'\equiv\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1},\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_2}\right).$$

Введём преобразование аннулирующее граничные условия

$$W(x)=U_1(x)-z\psi(x')-\varphi(x') \tag{2.5}$$

Тогда для функции $W(x)$ получим краевую задачу

$$(\Delta+k^2)W(x)=-(\Delta_2+k^2)(z\Psi(x')+\varphi(x'))-k^2\eta(x)U_0(x) \tag{2.6}$$

$$W(x)\big|_{z=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial W(x)}{\partial z}\right|_{z=-1}=0,$$

Интегральная форма решения задачи (2.6) имеет вид

$$W(x)=\sum_{j\ge 0}W_j(x')\sin(\beta_j\, z), \tag{2.7}$$

$$W_j(x')=-\frac{i}{4}\int_{\overline{\Omega_0}}H_0^{(1)}(k\lambda_j\,|x'-y'|)h_j(y')dy'$$

$$h_j(x')=2\int_{-1}^{0}h(x)\sin(\beta_j z)dz$$

$$h(x)\equiv-(\Delta_2+k^2)(z\Psi(x')+\varphi(x'))-k^2\eta(x)U_0(x),$$

где $H_0^{(1)}$ - функции Ханкеля первого рода нулевого порядка.

3. Требование равномерности регулярного асимптотического разложения (2.1)

$$U_{j-1}(x)>>\varepsilon U_j(x),\qquad j\in N$$

приводит к условию

$$\varepsilon k<<1,$$

что соответствует малым частотам (низкочастотное или длинноволновое приближение).

Если ограничимся только двумя членами в разложении (2.1), тогда область применения решения характеризуется радиусом

$$r \tilde{<} \underline{\underline{O}}\left(\varepsilon^{-1}\right)$$

Таким образом доказано, что возмущение звукового поля $U_1(x)$ имеет вид континуальной суммы расходящихся вторичных волн, ”источниками” которых являются неоднородность среды $(\eta(x\ ) \not\equiv 0)$ и неровность границ $(f(x') \not\equiv 0, g(x') \neq 0)$.

При этом амплитуды волн пропорциональны ε и зависят от параметров всех мод (нормальная волна).

Литература

1. Вайнберг. Б.Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. Москва, МГУ, 1982, 296 стр.
2. Рабинович В.С., Шамайло О.Н. Разрешимость уравнения Гельмгольца в неоднородном слое. ВИНИТИ, 1986, № 6544 –В, 20 стр.
3. ჩილაჩავა თ. სივრცით არაერთგვაროვან გარემოში ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის შეუღლების ამოცანის ამოხსნის შესახებ. Докл. расшир. засед. Семинара ИПМ им. И.Н. Векуа, т. 4, № 1, Тбилиси, 1989, стр. 136 – 139.
4. ჩილაჩავა თ. ჰელმჰოლცის განტოლების ამოხსნადობა სივრცით არაერთგვაროვან ფენაში თხევადი ფსკერით. თსუ სფ მოამბე, თსუ გამ-ბა, 1998, №1, გვ. 15 - 18.
5. Келлер Дж.Б., Пападакис Дж. С. Распространение волн и подводная акустика. Москва, Мир, 1980.
6. Чилачава Т.И. Рассеяние звука в трёхмерно-неоднородном волноводе с неровным жидким дном. Академия Наук СССР, Акустический жур. 1986, т.32, в. 5, стр. 708 – 711.

Статья получена: 2007-01-20