УДК 517.9

Математическая модель лоренца в экономике производства

Т.Обгадзе

Грузинский технический университет, ул.М.Костава, 77, 0175, Тбилиси, Грузия

Аннотация:
В работе на основе концепции обыкновенных математических моделей, строится модель производственного процесса. Построенная математическая модель при определенном выборе коэффициентов приводится к модели Лоренца. На основе программы Mathcad изучается динамика производственного процесса и приводится экономическая интерпретация странного аттрактора Лоренца.

***Ключевые слова**: странного аттрактор, Лоренц, производство.*

Построение математической модели. Скорость изменения объема производства равна разности, между доходом от реализации продукции производства и расходами производственного процесса.

Если принять обозначения:

x – объем производства;

y – объем реализованной продукции;

α– рыночная цена единичного объема реализованной продукции;

β–себестоимость единичного объема произведенной продукции;

тогда получаем уравнение:

$$\dot{x} = \alpha \cdot y - \beta \cdot x. \tag{1}$$

Скорость изменения объема реализованной продукции, равен разности между объемом рыночного обеспечения произведенной продукции, объемом насыщения рынка и объемом обеспеченного спроса на ресурсы.

Если принять обозначения:

r - коэффициент рыночного спроса на заданный объем произведенной продукции;

γ - коэффициент насыщения рынка;

δ - коэффициент обеспеченности производства ресурсами;

z - необходимый объем ресурсов для производственного процесса;

тогда получаем уравнение:

$$\dot{y} = r \cdot x - \gamma \cdot y - \delta \cdot x \cdot z. \tag{2}$$

Скорость изменения объема ресурсов производства, равен разности между объемом притока ресурсов и объемом потраченных в производстве ресурсами.

Если принять обозначения:

b – коэффициент скорости расхода ресурсов производства;

l – коэффициент ресурсообеспеченности производства;

тогда получаем уравнение:

$$\dot{z} = -b \cdot z + l \cdot x \cdot y. \tag{3}$$

Таким образом, мы получили математическую модель функционирования производства:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \alpha \cdot y - \beta \cdot x; \\ &\dot{y} = r \cdot x - \gamma \cdot y - \delta \cdot x \cdot z; \\ &\dot{z} = -b \cdot z + l \cdot x \cdot y. \end{aligned} \tag{4}$$

Исследование модели. Легко заметить, что уравнения (4) совпадают с моделью Лоренца, если

$$\alpha=\beta=10;\ r=28;\ \gamma=\delta=l=1;\ b=\frac{8}{3}.$$

В этом случае, на фазовой плоскости получаем странный аттрактор Лоренца, который как известно, представляет фрактальное множество. Аттрактор Лоренца соответствует возникновению хаоса в детерминированной системе. В этом случае, объемы производства и дохода становятся неуправляемыми и система движется к разрушению. Поэтому, стараются обойти хаотические режимы работы экономической системы, с соответствующим набором определяющих динамику системы параметров.

Систему уравнений Лоренца,

$$\frac{d}{dt}x(t) = 10\cdot y(t) - 10\cdot x(t)$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t) - x(t)\cdot z(t) + 28\cdot x(t)$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = x(t)\cdot y(t) - \frac{8}{3}\cdot z(t)$$

с соответствующими единичными начальными условиями, легко решаем на основе пакета Mathcad.

Системе уравнений Лоренца в Mathcad-е соответствует матричный оператор:

$$D(t,Q) := \begin{pmatrix} 10\cdot Q_1 - 10\cdot Q_0 \\ -Q_1 - Q_0\cdot Q_2 + 28\cdot Q_0 \\ Q_0\cdot Q_1 - \frac{8}{3}\cdot Q_2 \end{pmatrix}.$$

Для решения системы уравнений Лоренца с единичными начальными условиями, составляем программу:

$$Npts := 300($$

$$L := Rkadapt\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 50, Npts, D\right]$$

$$t := L^{\langle 0\rangle}$$

$$X := L^{\langle 1\rangle}$$

$$Y := L^{\langle 2\rangle}$$

$$Z := L^{\langle 3\rangle}$$

Решения: решения даются в виде графиков (Рис.1; Рис.2; Рис.3):

$$i := 0..\ Npts$$

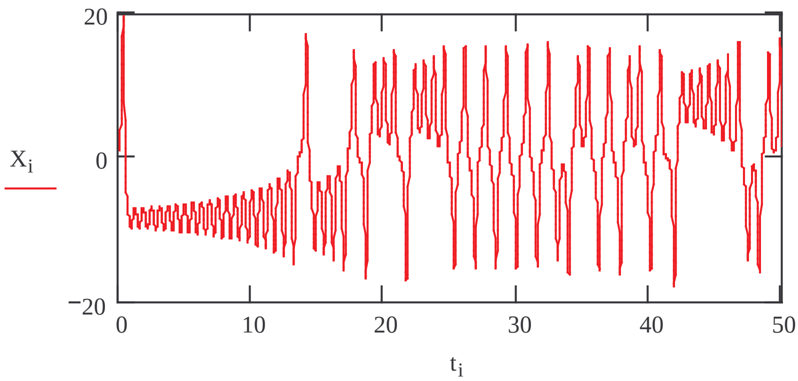

Рис.1. Зависимость объема производства от времени

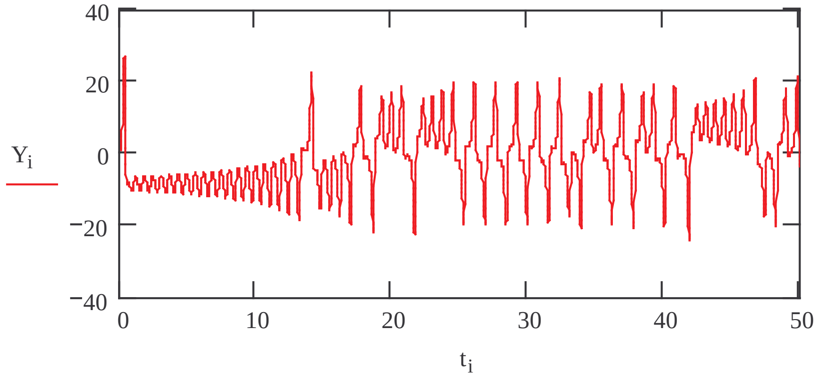

Рис.2. Зависимость объема реализованной продукции от времени

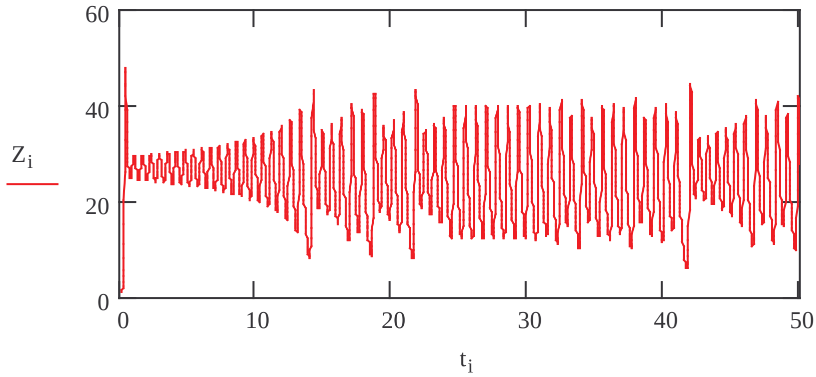

Рис.3. Зависимость объема ресурсов от времени

Отрицательные значения объема производства соответствуют накоплению продук-ции на складах, что ведет к дополнительным затратам, а отрицательные значения объема реализованной продукции соответствуют случаю, когда спрос на продукцию падает и наши расходы превалируют над доходами.

Построим картину динамики на фазовой плоскости:

$\varepsilon := 0.001$

$R^{\langle 0 \rangle} := X$

$R^{\langle 1 \rangle} := X + \varepsilon$

$S^{\langle 0 \rangle} := Y$

$S^{\langle 1 \rangle} := Y + \varepsilon$

$T^{\langle 0 \rangle} := Z$

$T^{\langle 1 \rangle} := Z + \varepsilon$

Получаем картину странного аттрактора Лоренца, которая соответствует процессу перехода детерминированной системы в хаотический режим работы. В зависимости от параметра r система меняет форму “крыльев бабочки”; что соответствует изменению рыночного спроса на продукты производства (Рис.4).

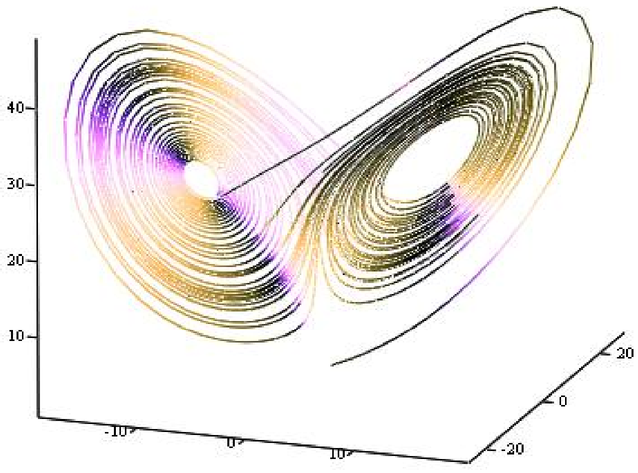

Рис.4. Странный атрактор Лоренца

Литература

1. Т.А.Обгадзе. Высшая математика для экономистов, -Москва: ИГУМО, - 2002
2. Т.А.Обгадзе, З.Н.Цвераидзе. Лабораторные работы по математическим моделям в экономике, учеб.пос., ГТУ, Тбилиси-2006
3. Э.Петерс. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. Пер. с англ., Москва – 2002
4. Д.Эрроусмит. К. Плейс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. Пер. с англ., Москва – 1986
5. А.Н.Колмогоров, С.П.Новиков. Странные аттракторы,Математика, новое в зарубежной науке, Москва-1981

Article received: 2006-10-30