УДК 519.65

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МАТРИЧНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Янович Леонид Александрович

Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072, Минск, Беларусь
E-mail: yanovich@im.bas-net.by

Аннотация

Получены интегральные представления интерполяционных алгебраических и тригонометрических матричных многочленов и их остаточных членов в классе аналитических функций для специальных видов матричных узлов; даны достаточные условия сходимости рассмотренных интерполяционных процессов.

Ключевые слова**:** *функции от матриц, интерполирование, интерполяционные матричные многочлены, погрешность интерполирования, сходимость интерполяционных процессов.*

Введение. Пусть X – множество квадратных матриц заданной размерности, оператор $F : X \to X$ и A_k – узлы интерполирования $\left(A_k \in X;\, k = 0,1,\dots,n\right)$.

Задача лагранжева алгебраического интерполирования состоит в построении для данного оператора F матричного многочлена $P_n\left(A\right)$ степени n от $A\in X$, для которого выполнялись бы равенства $P_n\left(A_k\right) = F\left(A_k\right)$ $\left(k = 0,1,\dots,n\right)$. Одним из видов интерполяционных формул лагранжева типа являются следующие матричные многочлены:

$$L_n\left(A\right) = \sum_{k=0}^{n} l_k\left(A\right) l_k^{-1}\left(A_k\right) F\left(A_k\right), \tag{1}$$

где $l_k\left(A\right) = B_{k0}\left(A - A_0\right) B_{k1} \dots B_{kk-1}\left(A - A_{k-1}\right) B_{kk}\left(A - A_{k+1}\right) B_{kk+1} \dots B_{kn-1}\left(A - A_n\right) B_{kn}$, $B_{k\nu}$ – некоторые фиксированные матрицы $\left(k, \nu = 0,1,\dots,n\right)$.

Как и в скалярном случае имеется необходимость в построении интерполяционных матричных многочленов тригонометрического типа. Аналогом таких многочленов $T_n\left(A\right)$ может быть матричный многочлен следующей структуры

$$T_n\left(A\right) = \sum_{k=0}^{2n} \Omega_{nk}\left(A\right) \Omega_{nk}^{-1}\left(A_k\right) F\left(A_k\right), \tag{2}$$

где

$$\Omega_{nk}\left(A\right) = B_{k0} \sin\frac{A - A_0}{2} B_{k1} \dots B_{kk-1} \sin\frac{A - A_{k-1}}{2} B_{kk} \times$$
$$\times \sin\frac{A - A_{k+1}}{2} B_{kk+1} \dots B_{k2n} \sin\frac{A - A_{2n}}{2} B_{k2n+1};$$

как и раньше, $B_{k\nu}$ – заданные матрицы, а A_k – узлы интерполирования $\left(k, \nu = 0,1,\dots,2n\right)$.

Наряду с интерполяционными многочленами (1) и (2) рассматриваются и другие варианты многочленов этого класса, полученных, например, перестановкой сомножителей в этих формулах. Основными ограничениями здесь являются условия обратимости матриц $l_k(A_k)$ $(k=0,1,...,n)$ и $\Omega_{nk}(A_k)$ $(k=0,1,...,2n)$.

В статье будут рассматриваться алгебраические и тригонометрические многочлены Лагранжа частных видов:

$$L_n(A)=\sum_{k=0}^{n} l_k(A)l_k^{-1}(A_k)F(A_k), \tag{3}$$

где $l_k(A)=(A-A_0)(A-A_1)...(A-A_{k-1})(A-A_{k+1})...(A-A_n)$ $(k=0,1,...,n)$, а также тригонометрические матричные многочлены

$$T_n(A)=\sum_{k=0}^{2n}\psi_k(A)\psi_k^{-1}(A_k)F(A_k). \tag{4}$$

Здесь $\psi_k(A)=\sin\frac{A-A_0}{2}...\sin\frac{A-A_{k-1}}{2}\sin\frac{A-A_{k+1}}{2}...\sin\frac{A-A_{2n}}{2}$. Интерполяционные условия и в формулах (3) и (4) выполняются, так как $l_k(A_\nu)l_k^{-1}(A_k)=\delta_{k\nu}E$, $\psi_k(A_\nu)\psi_k^{-1}(A_k)=\delta_{k\nu}E$, где E – единичная матрица, а $\delta_{k\nu}$ – символ Кронекера. Для задачи Эрмитова интерполирования, которая также здесь рассмотрена для одного частного случая, соответствующие интерполяционные формулы имеют другую более сложную структуру.

В работе [1] для случая, когда узлы интерполирования являются скалярными матрицами, получены интегральные представления интерполяционных многочленов вида (3) и (4) и погрешностей их приближений. Там же даны условия сходимости интерполяционных процессов в классе аналитических функций.

В настоящей статье продолжено исследование этих вопросов также в классе аналитических функций, но для других видов матричных узлов интерполирования.

Интегральные представления интерполяционных многочленов и их погрешностей. Начнем со случая алгебраического лагранжева интерполирования. Пусть за узлы берутся матрицы $\tilde{A}_k=A_k+H$, где A_k – скалярная матрица $A_k=\eta_k E$, а H – некоторая фиксированная матрица с нулевыми диагональными элементами $(\eta_k\neq\eta_\nu$ для $k\neq\nu; k,\nu=0,1,...,n)$.

Интерполяционная формула (3) в этом случае примет вид

$$L_n(A)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(A-H-\eta_0E)...(A-H-\eta_{k-1}E)(A-H-\eta_{k+1}E)...(A-H-\eta_nE)}{(\eta_k-\eta_0)...(\eta_k-\eta_{k-1})(\eta_k-\eta_{k+1})...(\eta_k-\eta_n)}F(\eta_kE+H). \tag{5}$$

Пусть функция $F(x)$ аналитическая в области D с границей Γ, а спектр матрицы $\tilde{A}_k$ принадлежит D. Тогда для $F(\eta_kE+H)$ имеет место разложение $F(\eta_kE+H)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(\eta_k)H^\nu$. Если далее в (5) функцию $F(\eta_kE+H)$ заменить на $F_\nu(\eta_k)=a_\nu(\eta_k)H^\nu$ и воспользоваться формулой представления интерполяционного многочлена для случая скалярных матричных узлов ([1], лемма 1), то, когда спектр матрицы $A-H$ также принадлежит D, придем к равенству

$$L_n(F_\nu;A)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\omega_n(\xi)E-\omega_n(A-H)}{\omega_n(\xi)}(\xi E-A+H)^{-1}F_\nu(\xi)H^\nu d\xi,$$

где $\omega_n(\xi)=(\xi-\eta_0)(\xi-\eta_1)...(\xi-\eta_n)$. Отсюда для $L_n(F;A)=L_n(A)$ получим, что

$$L_n(A)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\omega_n(\xi)E-\omega_n(A-H)}{\omega_n(\xi)}(\xi E-A+H)^{-1}F(\xi E+H)d\xi, \tag{6}$$

а для погрешности интерполирования $r_n(A)=F(A)-L_n(A)$ будет иметь место представление вида

$$r_n(A)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\omega_n(A-H)}{\omega_n(\xi)}(\xi E-A+H)^{-1}F(\xi E+H)\,d\xi\,. \qquad (7)$$

Для этого надо было воспользоваться аналогом формулы Коши

$$F(A)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\xi E-A+H)^{-1}F(\xi E+H)\,d\xi\,.$$

Итак доказана

Теорема 1. *Если спектр матриц* $A-H$ *и* $\tilde{A}_k=\eta_k E+H$ $(k=0,1,...,n)$ *принадлежит област* D *с границей* Γ, *то для функции* $F(z)$ *аналитической в* D *интерполяционная формула Лагранжа (3) представима в виде (6), а ее остаточный член задается равенством (7).*

Пусть $x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$ $(k=1,2,...,n)$ корни многочлена Чебышева $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ $(-1\le x\le 1)$, тогда интерполяционный многочлен степени $n-1$ для узлов $A_k=x_kE$ записывается [1] в виде

$$L_{n-1}(A)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}\,l_{nk}(A)F(x_k),$$

где $l_{nk}(A)=(A-x_1E)...(A-x_{k-1}E)(A-x_{k+1}E)...(A-x_nE)$, а функция $F(z)$ аналитическая на этом отрезке. Если же собственные значения матрицы x_kE+H принадлежат отрезку $[-1,1]$, то для $F(x_kE+H)$ будет иметь место ранее рассмотренное разложение и соответственно формула

$$L_{n-1}(A)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}\,l_{nk}(A-H)F(x_kE+H), \qquad (8)$$

для которой выполняются интерполяционные условия $L_{n-1}(\tilde{A}_k)=F(\tilde{A}_k)$ $(\tilde{A}_k=x_kE+H;$ $k=1,2,...,n)$ и для которой погрешность $r_{n-1}(A)=F(A)-L_{n-1}(A)$ задается формулой аналогичной (7):

$$r_{n-1}(A)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\omega_{n-1}(A-H)}{\omega_{n-1}(\xi)}(\xi E-A+H)^{-1}F(\xi E+H)\,d\xi,$$

где $\omega_{n-1}(\xi)=\prod_{k=1}^{n}(\xi-x_k)$.

Перейдем далее к задаче тригонометрического интерполирования и получим такого же вида представления для интерполяционных матричных многочленов и их остатков.Пусть $A_k=\eta_kE$ $(0\le\eta_k<2\pi;\ k=0,1,...,2n)$. Тогда для отличающихся друг от друга точек η_k интерполяционная формула Лагранжа (4) примет вид

$$T_n(A)=\sum_{k=0}^{2n}\frac{\sin\frac{1}{2}(A-A_0)...\sin\frac{1}{2}(A-A_{k-1})\sin\frac{1}{2}(A-A_{k+1})...\sin\frac{1}{2}(A-A_{2n})}{\sin\frac{1}{2}(\eta_k-\eta_0)...\sin\frac{1}{2}(\eta_k-\eta_{k-1})\sin\frac{1}{2}(\eta_k-\eta_{k+1})...\sin\frac{1}{2}(\eta_k-\eta_{2n})}F(A_k). \qquad (9)$$

Пусть далее функция $F(\xi)$ – 2π-периодическая и аналитическая в области $\tilde{D}$, являющейся частью полосы $0\le\operatorname{Re}\xi\le 2\pi$, ограниченной прямыми $\operatorname{Im}\xi=0$ и $\operatorname{Im}\xi=2\pi$ и непересекающимися кривыми $\Gamma_1=\Gamma_1(\xi)$ и $\Gamma_2=\Gamma_2(\xi)$ $(0\le\operatorname{Re}\xi\le 2\pi)$.

Для тригонометрического матричного многочлена (9) имеет место [1] представление

$$T_n(A)=\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Omega_n(\xi)\cos\frac{1}{2}(\xi E-A)-\Omega_n(A)}{\Omega_n(\xi)}\sin^{-1}\frac{1}{2}(\xi E-A)F(\xi)d\xi, \qquad (10)$$

где $\Omega_n(A)=\sin\frac{1}{2}(A-A_0)\sin\frac{1}{2}(A-A_1)...\sin\frac{1}{2}(A-A_{2n})$; скалярная функция $\Omega_n(\xi)$ получается из $\Omega_n(A)$ заменой $A-A_k$ на $\xi-\eta_k$; $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$ – контур интегрирования, причем интегрирование ведется по кривым Γ_1 и Γ_2, лежащим в полосе $0\le \operatorname{Re}\xi\le 2\pi$, как всегда, в направлении, оставляющем область $\tilde{D}$ слева; $\eta_k\in\tilde{D}$ $(k=0,1,...,2n)$ и спектр матрицы A принадлежит $\tilde{D}$.

Используя формулу (10), получим аналогичное интегральное представление для интерполяционного многочлена (4), когда в качестве узлов берутся матрицы $\tilde{A}_k=\eta_k E+H$ $(k=0,1,...,2n)$. Равенство (4) для таких узлов примет вид

$$T_n(A)=$$
$$\sum_{k=0}^{2n}\frac{\sin\frac{1}{2}(\tilde{A}-\eta_0E)...\sin\frac{1}{2}(\tilde{A}-\eta_{k-1}E)\sin\frac{1}{2}(\tilde{A}-\eta_{k+1}E)...\sin\frac{1}{2}(\tilde{A}-\eta_{2n}E)}{\sin\frac{1}{2}(\eta_k-\eta_0)...\sin\frac{1}{2}(\eta_k-\eta_{k-1})\sin\frac{1}{2}(\eta_k-\eta_{k+1})...\sin\frac{1}{2}(\eta_k-\eta_{2n})}F(\eta_kE+H). \qquad (11)$$

Здесь $\tilde{A}=A-H$. Далее интерполируемую функцию $F(\eta_kE+H)$ разложим в ряд $F(\eta_kE+H)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[a_\nu(\eta_k)\cos\nu H+b_\nu(\eta_k)\sin\nu H\right]$, где $a_\nu(\eta_k)$ и $b_\nu(\eta_k)$ – некоторые известные функции. Если взять одно из слагаемых этого ряда, например, $F_\nu(z)=a_\nu(z)\cos\nu H$, то многочлен $T_n(F_\nu;A)$ в силу формулы (10) может быть записан в виде

$$T_n(F_\nu;A)=\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Omega_n(\xi)\cos\frac{1}{2}(\xi E-A+H)-\Omega_n(A-H)}{\Omega_n(\xi)}\sin^{-1}\frac{1}{2}(\xi E-A+H)a_\nu(\xi)d\xi\cos\nu H,$$

если спектр матрицы $A-H$ также принадлежит $\tilde{D}$. Отсюда окончательно получим, что для $T_n(A)$, задаваемого равенством (11), будет справедливо представление

$$T_n(A)=\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Omega_n(\xi)\cos\frac{1}{2}(\xi E-A+H)-\Omega_n(A-H)}{\Omega_n(\xi)}\sin^{-1}\frac{1}{2}(\xi E-A+H)F(\xi E+H)d\xi, \qquad (12)$$

где $\Omega_n(A-H)=\sin\frac{1}{2}(A-H-\eta_0E)\sin\frac{1}{2}(A-H-\eta_1E)...\sin\frac{1}{2}(A-H-\eta_{2n}E)$.

В периодическом случае один из вариантов интегральной формулы Коши для такого класса аналитических функций матричной переменной задается следующим образом

$$F(A)=\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma}\cos\frac{1}{2}(\xi E-A+H)\sin^{-1}\frac{1}{2}(\xi E-A+H)F(\xi E+H)d\xi.$$

Если воспользоваться данной формулой, то из (12) для погрешности $r_n(A)=F(A)-T_n(A)$ получим равенство

$$r_n(A)=\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Omega_n(A-H)}{\Omega_n(\xi)}\sin^{-1}\frac{1}{2}(\xi E-A+H)F(\xi E+H)d\xi. \qquad (13)$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Для тригонометрических интерполяционных матричных многочленов вида (4), функций* $F(z)$ *аналитических в области* $\tilde{D}$ *с границей* Γ *и для* A *и узлов* $\tilde{A}_k = \eta_k E + H$ *таких, что спектры матриц* $A - H$ *и* $\tilde{A}_k$ $(k = 0,1,...,2n)$ *принадлежат* $\tilde{D}$, *справедливо интегральное представление (12), а для погрешности* $r_n(A) = F(A) - T_n(A)$ *имеет место равенство (13).*

Рассмотрим частный случай. Пусть скалярные матрицы A_k имеют вид $A_k = \frac{2k\pi}{2n+1}E$ $(k = 0,1,...,2n)$. Тогда интерполяционная формула (9) относительно этих узлов значительно упрощается:

$$T_n(A) = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} \sin\frac{2n+1}{2}(A - A_k)\sin^{-1}\frac{1}{2}(A - A_k)F(A_k). \tag{14}$$

Известно также, что многочлен (14) в случае таких матричных узлов может быть записан в следующей интегральной форме:

$$T_n(A) = \frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\xi\cos\frac{1}{2}(\xi E - A) - \sin\frac{2n+1}{2}A}{\sin\frac{2n+1}{2}\xi}\sin^{-1}\frac{1}{2}(\xi E - A)F(\xi)\,d\xi, \tag{15}$$

если все собственные значения матрицы A и числа $\frac{2k\pi}{2n+1}$ $(k = 0,1,...,2n)$ принадлежат области $\tilde{D}$.

Равенство, аналогичное (15), имеет место и для узлов интерполирования более общего вида: $\tilde{A}_k = \frac{2k\pi}{2n+1}E + H$ $(k = 0,1,...,2n)$. Этот факт устанавливается так же, как и рассмотренный выше случай произвольных скалярных матриц $A_k = \eta_k E$.

Аналогом равенства (15) здесь будет при таких же предположениях относительно спектров матриц $A - H$ и $\tilde{A}_k$ интегральное представление

$$T_n(A) =$$

$$\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\xi\cos\frac{1}{2}(\xi E - A + H) - \sin\frac{2n+1}{2}(A - H)}{\sin\frac{2n+1}{2}\xi}\sin^{-1}\frac{1}{2}(\xi E - A + H)F(\xi E + H)\,d\xi, \tag{16}$$

а погрешность интерполирования $r_n(A)$ в этом случае записывается также в достаточно компактной форме

$$r_n(A) = \frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(A - H)}{\sin\frac{2n+1}{2}\xi}\sin^{-1}\frac{1}{2}(\xi E - A + H)F(\xi E + H)\,d\xi. \tag{17}$$

Оценки погрешностей. Сходимость интерполяционных процессов. Интегральные представления остаточных членов интерполяционных формул будут использованы далее для оценки погрешностей и получения условий сходимости интерполирования в рассматриваемых классах аналитических функций. Предполагается, что числовые параметры η_k действительные и $|\eta_k| \le d_0$. Обозначим через M множество матриц A, для которых при фиксированном H выполняется неравенство $\|A - H\| \le d_1$.

Из представления погрешности (7) алгебраического матричного интерполяционного многочлена (6) следует неравенство $\left\|r_n(A)\right\| \le M \max_{\xi\in\Gamma}\left\|\frac{\omega_n(A-H)}{\omega_n(\xi)}\right\|$, где M – положительная константа, независящая от n. Здесь и далее в качестве нормы $\|\cdot\|$ берется одна из матричных норм.

Используем оценку

$$\left\|\frac{\omega_n(A-H)}{\omega_n(\xi)}\right\| \le \prod_{k=0}^{n}\left\|\frac{A-H-\eta_k E}{\xi-\eta_k}\right\| \le \prod_{k=0}^{n}\frac{\|A-H\|+|\eta_k|}{|\xi-\eta_k|}$$

для выбора такого контура интегрирования Γ, для точек ξ которого выполнялось бы неравенство $\frac{\|A-H\|+|\eta_k|}{|\xi-\eta_k|} \le q < 1$ при $A\in \mathrm{M}$ и $|\eta_k| \le d_0$.

Это будет иметь место, в частности, если $|\xi-\eta_k| > d_1+|\eta_k|$, тем более, когда $\left||\xi|-|\eta_k|\right| > d_1+|\eta_k|$ или $|\xi| > d_1+2d_0$. Из вышеизложенного следует

Теорема 3. *Для любой функции* $F(z)$ *аналитической в круге* $|z| \le d_1+2d_0$, *любых матричных узлов* $\{\tilde{A}_k\}$ $(k=0,1,...,n;\ n=1,2,...)$ *и матрицы* A $(A\in \mathrm{M})$, *спектры которых принадлежат этому кругу, последовательность интерполяционных многочленов (5) сходится к* $F(A)$ *при* $n\to\infty$.

Условия сходимости интерполяционных матричных процессов могут быть сформулированы и в терминах спектральных радиусов матриц. Напомним, что спектральный радиус $\rho(A)$ квадратной матрицы A есть число, равное максимальному из модулей ее собственных значений. Но он не может быть взят, вообще говоря, в качестве матричной нормы. Однако имеет место следующее утверждение ([2], стр. 359): для любой матрицы A и заданного числа $\varepsilon > 0$ существует по крайней мере одна матричная норма $\|\cdot\|$, для которой имеет место оценка $\rho(A) \le \|A\| \le \rho(A)+\varepsilon$.

Одним из важных подклассов неотрицательных матриц являются стохастические матрицы, т. е. матрицы, сумма элементов каждой строки которых равна единице. Эти матрицы находят широкое применение в теории однородных марковских цепей и при решении других прикладных задач. Если норма $\|A\|$ матрицы $A=\{a_{ij}\}$ берется как $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$, тогда, например, для стохастической A и единичной матрицы E имеют место равенства $\rho(A)=\|A\|_\infty=\rho(E)=\|E\|_\infty=1$.

Теорема 4. *Пусть* $A-H$ *стохастическая матрица, спектры матриц* x_kE+H , *где* x_k $(k=1,2,...,n)$ – *корни многочлена Чебышева первого рода, принадлежат кругу* $D=\{z: |z|\le 3\}$ *и функция* $F(z)$ *аналитическая в этом круге. Тогда последовательность интерполяционных многочленов (8) сходится к* $F(A)$ *при* $n\to\infty$.

Доказательство. И в этом случае также воспользуемся оценкой вида

$$\left\|\frac{A-H-x_kE}{\xi-x_k}\right\| \le \frac{1+|x_k|}{|\xi-x_k|} \le \frac{2}{|\xi-x_k|}.$$

Определим далее множество тех точек ξ, для которых $|\xi-x_k| > 2$ при $|x_k|\le 1$. Из этих неравенств имеем, в частности, что $|\xi|>1$ и за такое множество можно взять внешность круга радиуса 3 с центром в нулевой точке. Отсюда следует справедливость теоремы 4.

Теорема 5 . *Для любой 2π-периодической аналитической на действительной оси функции $F(z)$ последовательность интерполяционных многочленов (16) при $n\to\infty$ сходится к функции $F(A)$, если собственные значения матриц $A-H$ и $\tilde{A}_k=\frac{2k\pi}{2n+1}E+H$ $(k=0,1,...,2n)$ принадлежат интервалу $[0,2\pi)$.*

Доказательство. За контур интегрирования возьмем $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$, где $\Gamma_{1,2}$ – отрезки $\Gamma_{1,2}\{\xi:\operatorname{Im}\xi=\pm\varepsilon,\ 0\le\operatorname{Re}\xi\le 2\pi\}$, при этом величина положительного параметра ε определяется каждой конкретной функцией $F(z)$. Так как для спектра $\sigma(A-H)$ матрицы $A-H$ по предположению выполняется условие $\sigma(A-H)\subseteq[0,2\pi)$, то найдется матричная норма $\|\cdot\|$ такая, что $\|A-H\|\le\rho(A-H)+\varepsilon_0$, где $\rho(A-H)$ – спектральный радиус матрицы $A-H$, а ε_0 – некоторое неотрицательное число и поэтому $\left\|\sin\frac{2n+1}{2}(A-H)\right\|\le 1$.

С другой стороны имеет место соотношение

$$\left|\sin\frac{2n+1}{2}(\operatorname{Re}\xi\pm i\varepsilon)\right|^{-1}\le sh^{-1}\frac{2n+1}{2}\varepsilon\le M_1\exp\left\{-\frac{2n+1}{2}\varepsilon\right\}. \tag{18}$$

Отсюда следует, что из представления погрешности (17) будет справедлива оценка $\|r_n(A)\|\le M_2\exp\left\{-\frac{2n+1}{2}\varepsilon\right\}$ $(\varepsilon>0)$, M_1 и M_2 – независящие от n постоянные. Теорема доказана.

Приведем одну формулу эрмитова типа. За узлы интерполирования здесь также берутся матрицы $\tilde{A}_k=\frac{2k\pi}{2n+1}E+H$ $(k=0,1,...,2n)$, а $F(x)$ – 2π-периодическая аналитическая на действительной оси функция. Для тригонометрического многочлена

$$T_{2n}(A)=\frac{1}{(2n+1)^2}\sum_{k=0}^{2n}\sin^2\frac{2n+1}{2}\left(A-\tilde{A}_k\right)\sin^{-2}\frac{1}{2}\left(A-\tilde{A}_k\right)F\left(\tilde{A}_k\right)+$$

$$+\frac{2}{(2n+1)^2}\sum_{k=1}^{2n}\sin^2\frac{2n+1}{2}\left(A-\tilde{A}_k\right)\sin^{-1}\frac{1}{2}\left(A-\tilde{A}_k\right)\sin^{-1}\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}\tilde{A}_k\ F'\left(\tilde{A}_k\right) \tag{19}$$

выполняются равенства $T_{2n}\left(\tilde{A}_0\right)=F\left(\tilde{A}_0\right);\ T_{2n}\left(\tilde{A}_k\right)=F\left(\tilde{A}_k\right), T'_{2n}\left(\tilde{A}_k\right)=F'\left(\tilde{A}_k\right)$ $(k=1,2,...,2n)$. Формула (19), когда H – нулевая матрица, рассматривалась в [3] и для этого случая в [1] получены интегральные представления для $T_{2n}(A)$ и $r_{2n}(A)=F(A)-T_{2n}(A)$.

Теорема 6. *Последовательность интерполяционных многочленов $\{T_{2n}(A)\}_{n=0}^{\infty}$ сходится при $n\to\infty$ к $F(A)$ для всякой 2π-периодической аналитической на вещественной оси функции $F(z)$, если спектры матрицы $A-H$ и узлов интерполирования принадлежат отрезку $[0,2\pi)$.*

Доказательство. В данном случае будет справедливо следующее интегральное представление:

$$T_{2n}(A)=\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma\sin^{-2}\frac{2n+1}{2}\xi\left[\sin^2\frac{2n+1}{2}\xi\cos\frac{1}{2}(\xi E-A+H)\sin\frac{1}{2}(A-H)-\right.$$

$$\left.-\sin^2\frac{2n+1}{2}(A-H)\sin\frac{1}{2}\xi\right]\sin^{-1}\frac{1}{2}(A-H)\sin^{-1}\frac{1}{2}(\xi E-A+H)F(\xi E+H)\,d\xi,$$

где контур интегрирования берется такой же, как и при доказательстве предыдущей теоремы.

Из этого представления получаем, что

$$r_{2n}(A)=\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\sin^{2}\frac{2n+1}{2}(A-H)\sin^{-1}\frac{1}{2}(A-H)}{\sin^{2}\frac{2n+1}{2}\xi}\sin^{-1}\frac{1}{2}(\xi E-A+H)\sin\frac{1}{2}\xi\, F(\xi E+H)\,d\xi. \quad (20)$$

Как и раньше, необходимо оценить в этом случае интеграл (20). Для этого понадобится воспользоваться тождеством

$$\sin\frac{2n+1}{2}(A-H)\equiv\left(E+2\sum_{k=1}^{n}\cos k(A-H)\right)\sin\frac{1}{2}(A-H),$$

которое справедливо для любых квадратных матриц A и H. Из этого тождества несложно получить неравенство

$$\left\|\sin^{2}\frac{2n+1}{2}(A-H)\sin^{-1}(A-H)\right\|<2n+1,$$

справедливое для матриц A и H с вещественно значным спектром. И соответственно с учетом соотношения (18) приходим к оценке $\left\|r_{2n}(A)\right\|\le M(2n+1)\exp\{-(2n+1)\varepsilon\}$ погрешности интерполяционной формулы (19), где M – константа, независящая от n, $\varepsilon>0$,.

Как следует из полученных оценок погрешностей, интерполяционные процессы, рассмотренные в теоремах 5 и 6, сходятся по экспоненциальному закону. В случае двукратных узлов (теорема 6) при таком же числе узлов сходимость имеет более высокий порядок малости.

Заключение. В теории функций от матриц часто используется интерполяционная формула Лагранжа – Сильвестра, позволяющая свести вычисления аналитической функции матричной переменной к вычислению матричного многочлена. Практическое применение этой формулы усложняется тем, что для каждого конкретного аргумента A интерполируемой функции $F(A)$ необходимо вычислять собственные значения матрицы A, что , как правило, является достаточно сложной вычислительной задачей.

Локализация собственных значений квадратных матриц, как известно, не вызывает каких-либо трудностей вычислительного характера. И поэтому могут быть использованы приближенные собственные значения, взятые в качестве скалярных матричных узлов и использованные в дальнейшем в интерполяционных формулах тех или иных видов, в том числе и тех, которые рассмотрены в данной статье.

Задача интерполирования функций от матриц изучалась и раньше. В работе [4] для класса дифференцируемых функций построены интерполяционные формулы типа Эрмита – Биркгофа и получены оценки погрешностей.

Имеется практическая необходимость в построении интерполяционных формул для функций на множествах матриц с операциями умножения, отличных от обычного умножения. Такие формулы построены в [5] для матриц с йордановым и кронекеровским умножением. В виду отличия свойств [6-8] указанных видов умножения матриц от обычного умножения, построение интерполяционных матричных многочленов в этих случаях потребовало отдельного рассмотрения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект ФО6Р-2006).

Литература

1. *Янович Л. А., Тарасевич А. В.* Сходимость интерполирования по скалярным матричным узлам в классе аналитических функций. // Труды Института математики. 2006. Т.14. № 2. С. 102–111.
2. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. Москва: Мир, 1989.
3. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А.* Интерполирование операторов. Киев: Наукова думка, 2000.
4. *Янович Л. А.* Об одной формуле Эрмита – Биркгофа для функций матричной переменной // Доклады НАН Беларуси. 2005. Т. 49, № 3. С. 30 – 33.
5. *Янович Л. А., Тарасевич А. В.* Интерполирование функций, заданных на множествах матриц с йордановым и кронекеровским умножением // Доклады НАН Беларуси. 2004. Т. 48, № 3. С. 9 – 13.
6. *Магнус Я. Р., Нейдеккер Х.* Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. Москва: Физматлит, 2002.
7. *Steeb W.-H.* Kronecker Produkt of Matrices and Applikations. Mannheim; Wein; Zurich; BI-Wiss.-Ver., 1991.
8. *Браттели У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. Москва: Мир, 1982.

Статья получена: 2007-04-27