

УДК 519.63

Функционально-дискретный метод для матричной задачи Штурма-Лиувилля с неразделяющимися условиями

¹Бандырский Богдан Иосипович, ²Гаврилюк Иван Петрович, ³Лазурчак Игорь Иванович,
⁴Макаров Владимир Леонидович

¹Национальный университет "Львовская политехника", Украина

²Berufsakademie Thuringen, Staatliche Studienakademie, Germany

³Дрогобычский государственный педагогический университет, Украина

⁴Институт математики НАН Украины, Киев

Аннотация

Рассматривается задача Штурма-Лиувилля для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с общими двухточечными краевыми условиями. Для ее решения предложен функционально-дискретный (FD-) метод с алгоритмической реализацией и использованием систем символьной математики. В случае условий Дирихле доказано, что скорость сходимости FD-метода не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем прямо пропорциональным параметру дискретизации и обратно пропорциональным порядковому номеру соответствующего собственного значения. Приведены результаты численных экспериментов, показывающие преимущества FD-метода по сравнению с известными методами, разработанными Dwyer H. и Zettl A.

Ключевые слова:

матричная задача Штурма-Лиувилля, кусочно-постоянные матрицы, система обыкновенных дифференциальных уравнений, неразделяющиеся краевые условия, условия Дирихле, функционально-дискретный метод, системы символьной математики.

1. Введение

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с матричными коэффициентами

$$[P(x)u'(x)]' + [\lambda R(x) - Q(x)]u(x) = 0, \quad x \in (a, b), \quad (1.1)$$

$$C \begin{pmatrix} u(a) \\ P(a)u'(a) \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} u(b) \\ P(b)u'(b) \end{pmatrix} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь матрица $P(x)$ – обратима для почти всех $x \in (a, b)$;

каждая компонента матриц $P^{-1}(x), Q(x), R(x)$ принадлежит пространству $L^1(a, b)$;

матрицы $P(x), Q(x), R(x)$ эрмитовы для почти всех $x \in (a, b)$;

матрицы $P(x), R(x)$ -положительно определенные для почти всех $x \in (a, b)$;

$u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_k(x))^T$ - искомая вектор-функция, отличная от тождественного нулевого вектора, λ - искомый числовой параметр (собственное значение);

матрица $(C | D)$ размерности $2k \times 4k$ имеет полный ранг;

$$CJC^* = DJD^*, \quad (1.3)$$

где

$$J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_k \\ \hline -E_k & 0 \end{array} \right),$$

E_k – единичная $k \times k$ матрица. Тогда, согласно [1], краевая задача (1.1)-(1.3) самосопряженная, её все собственные значения действительны, их счетное число $\{\lambda_n : n \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, \dots\}\}$ и они могут быть упорядочены так, что

$$-\infty < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots, \quad \lambda_n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Работ, посвященных численным методам решения задачи (1.1)-(1.3), опубликовано значительно меньше по сравнению со скалярным случаем. Как указывается в [1], пакеты программ SLEIGN [2],[3], SLEDGE [4] и библиотека программ NAG [5] являются высокоэффективными, но только для вычисления собственных значений регулярной скалярной задачи Штурма-Лиувилля с разделенными двухточечными краевыми условиями. За исключением специальной программы (см. [1],[6]), предназначенной для вычисления собственных значений регулярной скалярной задачи Штурма-Лиувилля с периодическими краевыми условиями, до работы [1], по мнению её автора, не существовало общего алгоритма для общих связанных самосопряженных граничных условий даже для скалярного случая.

В [1] предложен алгоритм для решения задачи Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.3) с общими неразделяющимися самосопряженными краевыми условиями (1.2). Алгоритм основан на преобразовании задачи (1.1),(1.2) в задачу большей размерности, но уже с разделёнными краевыми условиями, которая в точности имеет те же самые собственные значения. Для решения преобразованной задачи использовался алгоритм из [2], пригодный для решения задачи Штурма-Лиувилля произвольной размерности с разделенными краевыми условиями.

В данной работе для решения задачи (1.1)-(1.3) для случая, когда матрицы $P(x)$, $R(x)$ – кусочно-постоянные, а $Q(x)$ – кусочно-непрерывная, предлагается функционально-дискретный (FD-) метод, основанный на подходе, разработанном в [9]-[12] для скалярного случая и развитым для матричной краевой задачи в [13]. FD-метод имеет ряд преимуществ по сравнению с известными методами (см. [1]-[8], [14]-[16]). Во-первых, FD-метод позволяет получить явные априорные оценки точности, основываясь на которых можно выбрать оптимальную стратегию его реализации, варьируя параметры дискретизации и ранг метода. Во-вторых, метод сходится со скоростью геометрической прогрессии, причем, чем больше порядковый номер соответствующего собственного значения, тем выше скорость сходимости. В-третьих, метод допускает распараллеливание. И наконец, в ряде случаев метод дает возможность делать заключение о качественном поведении собственных значений (действительность, комплексность, кратность собственных значений, поведение расстояния между соседними собственными значениями, когда порядковый номер стремится к бесконечности и т.п.).

Отметим, что в работе [11] предложен эффективный алгоритм решения задачи Штурма-Лиувилля с нелокальными несамосопряженными условиями, которая относится к такому классу задач, для которого на сегодняшний день не существует программного обеспечения.

Статья построена следующим образом. В п.2 описывается схема приведения дифференциального уравнения (1.1) с кусочно-постоянными матрицами $P(x)$, $R(x)$ к уравнению, дифференциальный оператор которого содержит матрицу диагонального вида. Предлагается алгоритм FD-метода для случая общих (неразделяющихся) двухточечных краевых условий. В п.3 даётся теоретическое обоснование FD- метода для случая краевых условий Дирихле. Теоретическое обоснование для общего случая краевых условий (1.2) будет предметом готовящейся к печати публикации. В п.4. приводятся результаты экспериментальных вычислений с помощью FD- метода на двух тестах, из которых первый пример представляет краевую задачу с условиями Дирихле. По результатам второго примера, взятом из [1], производится сравнительный анализ FD-метода с методом из [1]. Численная

реализация предложенного метода осуществлялась с помощью систем символьной математики Maple 10.0 и Mathematica 5.1.

2. Алгоритм FD- метода для случая общих двухточечных краевых условий

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.3), где $P(x), R(x)$ – кусочно- постоянные матрицы, $Q(x)$ – матрица с кусочно-непрерывными коэффициентами, $P(x) = P^T(x) > 0, R(x) = R^T(x) > 0, Q(x) = Q^T(x) > 0, x \in [0,1]$.

Введем сетку

$$\mathcal{E} = \{x_i : 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1, h_i = x_i - x_{i-1}\} \quad (2.1)$$

таким образом, что множество её узлов включает в себя все точки разрывов 1-го рода матриц $P(x), R(x), Q(x)$. На каждом из интервалов дифференциальное уравнение (1.1) примет вид

$$P_i u''(x) + [\lambda R_i - Q_i] u(x) = 0, \quad x \in (x_{i-1}, x_i), \quad i = \overline{1, N},$$

а в узлах x_i сетки (2.1) должны выполняться условия согласования

$$u(x_i - 0) = u(x_i + 0),$$

$$P_i u'(x_i - 0) = P_{i+1} u'(x_i + 0), \quad i = 1, \dots, N - 1.$$

Запишем схему FD-метода (см. [9])

$$\lambda(\overline{Q}(\cdot)) = \sum_{j=0}^m \lambda^{(j)}(\overline{Q}(\cdot)), \quad u(x) = \sum_{j=0}^m u^{(j)}(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

где слагаемые в суммах определяются как решения рекуррентной последовательности задач

$$P_i [u^{(j+1)}(x)]'' + [\lambda^{(0)}(\overline{Q}(\cdot)) R_i - \overline{Q}_i] u^{(j+1)}(x) = -F_i^{(j+1)}(x), \quad x \in (x_{i-1}, x_i), \quad (2.3)$$

$$F_i^{(j+1)}(x) = \sum_{p=0}^j \lambda^{(j+1-p)}(\overline{Q}(\cdot)) u^{(p)}(x) + [Q_i(x) - \overline{Q}_i(x)] u^{(j)}(x), \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.4)$$

$$u^{(j+1)}(x_i - 0) = u^{(j+1)}(x_i + 0), \quad (2.5)$$

$$P_i \frac{du^{(j+1)}(x_i - 0)}{dx} = P_{i+1} \frac{du^{(j+1)}(x_i + 0)}{dx}, \quad i = 1, \dots, N - 1 \quad (2.6)$$

с общими двухточечными краевыми условиями

$$C \begin{pmatrix} u^{(j+1)}(0) \\ P_1 u^{(j+1)'}(0) \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} u^{(j+1)}(1) \\ P_N u^{(j+1)'}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 0, \dots, m - 1,$$

где $u^{(0)}(x), \lambda^{(0)}(\overline{Q}(\cdot))$ – решение базовой задачи

$$P_i [u^{(0)}(x)]'' + [\lambda^{(0)}(\overline{Q}(\cdot)) R_i - \overline{Q}_i] u^{(0)}(x) = 0, \quad x \in (x_{i-1}, x_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.7)$$

$$u^{(0)}(x_i - 0) = u^{(0)}(x_i + 0), \quad (2.8)$$

$$P_i \frac{du^{(0)}(x_i - 0)}{dx} = P_{i+1} \frac{du^{(0)}(x_i + 0)}{dx}, \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad (2.9)$$

$$C \begin{pmatrix} u^{(0)}(0) \\ P_1 u^{(0)'}(0) \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} u^{(0)}(1) \\ P_N u^{(0)'}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Предлагается следующий алгоритм.

1) Зададим $j := 0$, сетку \mathcal{E} и желаемую точность ε . Для решения базовой задачи (2.7)–(2.10) воспользуемся тем, что уравнение (2.7) является обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными матричными коэффициентами. Введем обозначения

$$W_i = \lambda^{(0)}(\overline{Q}(\cdot))R_i - \overline{Q}_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

Поскольку P_i, W_i – симметричны, а матрица P_i – положительно определенная, приведем их одновременно к диагональному виду (см. [17], стр.84):

$$T_i' P_i T_i = E, \quad T_i' W_i T_i = \text{diag}[\mu_j(W_i)]_{j=\overline{1, k}},$$

$$T_i = S_i^{(1)} S_i^{(2)} S_i^{(3)}, \quad i = \overline{1, N},$$

где $S_i^{(1)}$ - фундаментальная матрица для матрицы P_i ,

$$S_i^{(2)} = \text{diag}[\mu_j(P_i)^{-1/2}]_{j=\overline{1, k}},$$

$S_i^{(3)}$ - фундаментальная матрица для матрицы

$$L_i = S_i^{(2)'} S_i^{(1)'} W_i S_i^{(1)} S_i^{(2)},$$

$\mu_j(W)$ – собственные значения матрицы W .

Заметим, что процесс построения матриц T_i ($i = \overline{1, N}$) распараллеливается и может быть реализован на многопроцессорных вычислительных комплексах.

Введем обозначения

$$T_i^{-1} u^{(0)}(x) = \mathfrak{E}^{(0)}(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad (2.11)$$

тогда уравнения (2.7) примет вид

$$\frac{d^2 \mathfrak{E}^{(0)}(x)}{dx^2} + \text{diag}[\mu_j(L_i)]_{j=\overline{1, k}} \mathfrak{E}^{(0)}(x) = 0, \quad x \in (x_{i-1}, x_i). \quad (2.12)$$

Общее решение уравнения (2.12) (распадающаяся система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка) имеет вид:

$$\mathfrak{E}^{(0)}(x) = S_i(x - x_{i-1})A_i + C_i(x - x_{i-1})B_i, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad (2.13)$$

где

$$S_i(x - x_{i-1}) = \text{diag} \left[\frac{\sin \sqrt{\mu_j(L_i)}(x - x_{i-1})}{\sqrt{\mu_j(L_i)}} \right]_{j=\overline{1, k}},$$

$$C_i(x - x_{i-1}) = \text{diag} [\cos \sqrt{\mu_j(L_i)}(x - x_{i-1})]_{j=\overline{1, k}},$$

а A_i, B_i – произвольные постоянные векторы, подлежащие определению.

Из (2.11), (2.13) следует, что

$$u^{(0)}(x) = T_i S_i(x - x_{i-1})A_i + T_i C_i(x - x_{i-1})B_i, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (2.14)$$

Подставляя (2.14) в условия согласования (2.8), (2.9) и краевые условия (2.10), приходим к однородной системе $2kN$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных векторов A_i, B_i размерности k ($i = \overline{1, N}$):

$$T_i S_i(h_i)A_i + T_i C_i(h_i)B_i = T_{i+1} B_{i+1},$$

$$P_i \{ T_i C_i(h_i)A_i - T_i \text{diag}[\mu_j(L_i)]_{j=\overline{1, k}} S_i(h_i)B_i \} = P_{i+1} T_{i+1} A_{i+1},$$

$$i = 1, \dots, N-1, \quad (2.15)$$

$$C \begin{pmatrix} T_1 B_1 \\ P_1 T_1 A_1 \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} T_N S_N(h_N)A_N + T_N C_N(h_N)B_N \\ P_N (T_N C_N(h_N)A_N - T_N \text{diag}[\mu_j(L_N)]_{j=\overline{1, k}} S_N(h_N)B_N) \end{pmatrix} = 0.$$

Запишем систему (2.15) в виде

$$\Omega(\lambda^{(0)}(\overline{Q}(\cdot))) \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \end{pmatrix} = 0 . \quad (2.16)$$

Для того, чтобы она имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda^{(0)}(\overline{Q}(\cdot))$ являлось корнем уравнения

$$\det \Omega(\lambda^{(0)}(\overline{Q}(\cdot))) = 0 . \quad (2.17)$$

2) Пусть $\lambda^{(0)}(\overline{Q}(\cdot))$ простой корень уравнения (2.17) или, что одно и то же, простое собственное значение базовой задачи (2.7)-(2.10). Тогда для нахождения соответствующего ему вектора $(A_1, B_1, \dots, A_N, B_N)^T$ поступаем следующим образом. Подставляем $\lambda^{(0)}$ в (2.16), отбрасываем последнее уравнение, а в оставшихся уравнениях переносим в правую часть слагаемые, содержащие последнюю компоненту $B_{N,k}$ вектора B_N . После решения полученной системы уравнений и нахождения собственной вектор-функции $u^{(0)}(x)$ в виде (2.14) постоянную $B_{N,k}$ определяем из условия нормировки

$$\int_0^1 \|u^{(0)}(x)\|^2 dx = 1 .$$

3) Переходим к решению задач (2.3)-(2.6) Для этого применим к ним подход, использующий точные трехточечные разностные схемы (т.т.р.с.), коэффициенты которых выражаются через шаблонные матричные функции $v_p(x)$, $p = 1, 2$. А именно, обозначив на каждой паре промежутков $[x_{i-1}, x_i], [x_i, x_{i+1}]$, ($i = 1, \dots, N - 1$) шаблонные матричные функции через $v_{p,i}(x)$, находим их как решения следующих задач Коши

$$\frac{d^2 v_{p,i}(x)}{dx^2} + \text{diag}[\mu_j(L_i)]_{i=1,k} v_{p,i}(x) = 0, \quad x \in (x_{i-1}, x_{i+1}), \quad p=1, 2, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$v_{1,i}(x_{i-1}) = 0, \quad v'_{1,i}(x_{i-1}) = E, \quad (2.18)$$

$$v_{2,i}(x_{i+1}) = 0, \quad v'_{2,i}(x_{i+1}) = -E. \quad (2.19)$$

Тогда шаблонные матричные функции $v_{1,i}(x)$, исходя из (2.8), (2.9) и начальных условий (2.18), будут иметь вид

$$v_{1,i}(x) = T_i S_i (x - x_{i-1}) T_i^{-1}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

$$v_{1,i}(x) = T_{i+1} S_{i+1} (x - x_i) T_{i+1}^{-1} T_i C_i (h_i) T_i^{-1} +$$

$$+ T_{i+1} C_{i+1} (x - x_i) T_{i+1}^{-1} T_i S_i (h_i) T_i^{-1}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2.20)$$

а функции $v_{2,i}(x)$, следуя тем же условиям (2.8), (2.9) и начальным условиям (2.19), будут определяться формулами

$$v_{2,i}(x) = T_{i+1} S_{i+1} (x_{i+1} - x) T_{i+1}^{-1}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$v_{2,i}(x) = T_i S_i (x_i - x) T_i^{-1} T_{i+1} C_{i+1} (h_{i+1}) T_{i+1}^{-1} +$$

$$+ T_i C_i (x_i - x) T_i^{-1} T_{i+1} S_{i+1} (h_{i+1}) T_{i+1}^{-1}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (2.21)$$

Затем с помощью шаблонных матричных функций (2.20), (2.21) записываем т.т.р.с.

$$u^{(j+1)}(x_i) = v_{2,i}(x_i) [v_{2,i}(x_{i-1})]^{-1} u^{(j+1)}(x_{i-1}) + v_{1,i}(x_i) [v_{1,i}(x_{i+1})]^{-1} u^{(j+1)}(x_{i+1}) +$$

$$+ \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G_i(x_i, \xi) F_i^{(j+1)}(\xi) d\xi, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2.22)$$

$$C \begin{pmatrix} u^{(j+1)}(0) \\ P_1 u^{(0)}(0) \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} u^{(j+1)}(1) \\ P_N u^{(0)}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

где матричная функция Грина $G_i(x, \xi)$ имеет вид

$$G_i(x, \xi) = \begin{cases} v_{1,i}(x)[v_{1,i}(\xi)]^{-1}[w_i(\xi)]^{-1}, & x_{i-1} \leq x \leq \xi, \\ v_{2,i}(x)[v_{2,i}(\xi)]^{-1}[w_i(\xi)]^{-1}, & \xi \leq x \leq x_{i+1}, \end{cases}$$

$$w_i(\xi) = v'_{1,i}(\xi)[v_{1,i}(\xi)]^{-1} - v'_{2,i}(\xi)[v_{2,i}(\xi)]^{-1}.$$

Условие разрешимости системы (2.22) будет выполнено, поскольку выполнено условие разрешимости задачи (2.3)-(2.6), а (2.22) для последней является точной трехточечной разностной схемой.

Для единственности решения системы (2.22) используем условие ортогональности

$$\int_0^1 (u^{(j+1)}(x), u^{(0)}(x)) dx = 0. \quad (2.23)$$

4) В вектор-функцию $F_i^{(j+1)}(x)$ (2.4) входит неизвестный параметр $\lambda^{(j+1)}(\overline{Q}(\cdot))$, который находится, с учётом (2.23), из условия разрешимости задачи (2.3),(2.6)

$$\sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (F_i^{(j+1)}(x), u^{(0)}(x)) dx = 0$$

и определяется формулой

$$\lambda^{(j+1)}(\overline{Q}(\cdot)) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} ([Q_i(x) - \overline{Q}_i] u^{(j)}(x), u^{(0)}(x)) dx.$$

5) Далее используем операцию восполнения на отрезок $[0, 1]$ проекции точного решения задачи (2.3)-(2.6) на сетку \mathcal{E} :

$$u^{(j+1)}(x) = T_i S_i(x - x_{i-1}) S_i^{-1}(h_i) T_i^{-1} u^{(j+1)}(x_i) + T_i S_i(x_i - x) S_i^{-1}(h_i) T_i^{-1} u^{(j+1)}(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} T_i g_i(x, \xi) T_i^{-1} F_i^{(j+1)}(\xi) d\xi, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.24)$$

где матричная функция Грина $g_i(x, \xi)$ определяется формулой

$$g_i(x, \xi) = \begin{cases} S_i(x - x_{i-1}) S_i(x_i - \xi) S_i^{-1}(h_i), & x \leq \xi, \\ S_i(\xi - x_{i-1}) S_i(x_i - x) S_i^{-1}(h_i), & \xi \leq x. \end{cases}$$

При этом исключаем последнее уравнение в системе (2.24), а постоянную $[u^{(j+1)}(x_N)]_k$ (последнюю компоненту вектора $u^{(j+1)}(x_N)$) находим из условия (2.23).

6) Вычисляем

$$\lambda^{j+1}(\overline{Q}(\cdot)) := \lambda^j(\overline{Q}(\cdot)) + \lambda^{(j+1)}(\overline{Q}(\cdot)), \quad u^{j+1}(x) := u^j(x) + u^{(j+1)}(x).$$

7) Проверяем условие

$$|\lambda^{(j+1)}(\overline{Q}(\cdot))| \leq \varepsilon.$$

Если последнее выполняется, то заканчиваем алгоритм.

В противном случае полагаем $j := j + 1$ и осуществляем переход к пункту **3)**.

3. Обоснование FD-метода для случая условий Дирихле

Рассмотрим краевую задачу с условиями 1-го рода

$$\begin{aligned} u''(x) + [\lambda E - Q(x)] u(x) &= 0, \quad x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Приведём схему FD-метода (см. [8]).

Покрываем промежуток $[0, 1]$ сеткой \mathcal{G} (2.1), которая включает в себя все точки разрыва функций $Q_{ij}(x)$. Введём кусочно-постоянное приближение $\bar{Q}(x)$ для матрицы $Q(x)$ и рассмотрим вспомогательную задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, W(\cdot, t)) + [\lambda(W(\cdot, t))E - W(x, t)] u(x, W(\cdot, t)) &= 0, \quad x \in (0, 1), \\ u(0, W(\cdot, t)) = u(1, W(\cdot, t)) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

с

$$W(x, t) = \bar{Q}(x) + t [Q(x) - \bar{Q}(x)], \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (3.3)$$

Одними из возможных вариантов выбора $\bar{Q}(x)$ могут быть следующие:

$$\bar{Q}(x) \equiv 0$$

или

$$\bar{Q}(x) = \frac{1}{2} [Q(x_i) + Q(x_{i-1})], \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.4)$$

Очевидно,

$$u(x, W(\cdot, 1)) \equiv u(x), \quad \lambda(W(\cdot, 1)) \equiv \lambda. \quad (3.5)$$

Будем искать решение задачи (3.2) в виде

$$\begin{aligned} \lambda(W(\cdot, t)) &= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{(j)}(\bar{Q}(\cdot)) t^j, \quad \lambda^{(j)}(\bar{Q}(\cdot)) = \left. \frac{1}{j!} \frac{d^j \lambda(W(\cdot, t))}{dt^j} \right|_{t=0}, \\ u(x, W(\cdot, t)) &= \sum_{j=0}^{\infty} u^{(j)}(x, \bar{Q}(\cdot)) t^j, \quad u^{(j)}(x, \bar{Q}(\cdot)) = \left. \frac{1}{j!} \frac{\partial^j u(x, W(\cdot, t))}{\partial t^j} \right|_{t=0}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если эти ряды сходятся для $\forall t \in [0, 1]$, то, согласно (3.5), будем иметь

$$\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{(j)}(\bar{Q}(\cdot)), \quad u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} u^{(j)}(x, \bar{Q}(\cdot)). \quad (3.7)$$

Для определения коэффициентов $\lambda^{(j)}(\bar{Q}(\cdot))$, $u^{(j)}(x, \bar{Q}(\cdot))$, $j = 0, 1, \dots$, подставляем (3.6) в (3.2), (3.3) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях t . В результате приходим к рекуррентной последовательности задач

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} u^{(j+1)}(x, \bar{Q}(\cdot)) + [\lambda^{(0)}(\bar{Q}(\cdot))E - \bar{Q}(\cdot)] u^{(j+1)}(x, \bar{Q}(\cdot)) &= -F_n^{(j+1)}(x, \bar{Q}(\cdot)), \quad x \in (0, 1), \\ u^{(j+1)}(0, \bar{Q}(\cdot)) = 0, \quad u^{(j+1)}(1, \bar{Q}(\cdot)) &= 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$F_n^{(j+1)}(x, \bar{Q}(\cdot)) = \sum_{p=0}^j \lambda^{(j+1-p)}(\bar{Q}(\cdot)) u^{(p)}(x, \bar{Q}(\cdot)) - [Q(x) - \bar{Q}(\cdot)] u^{(j)}(x, \bar{Q}(\cdot)). \quad (3.9)$$

Начальным условием для рекуррентного процесса (3.8) является решение базовой задачи

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} u^{(0)}(x, \bar{Q}(\cdot)) + [\lambda^{(0)}(\bar{Q}(\cdot))E - \bar{Q}(\cdot)] u^{(0)}(x, \bar{Q}(\cdot)) &= 0, \quad x \in (0, 1), \\ u^{(0)}(0, \bar{Q}(\cdot)) = 0, \quad u^{(0)}(1, \bar{Q}(\cdot)) &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

FD-метод m -го ранга дает приближение к решению задачи (3.1) в виде

$$\lambda(\bar{Q}(\cdot)) = \sum_{j=0}^m \lambda^{(j)}(\bar{Q}(\cdot)), \quad u(x, \bar{Q}(\cdot)) = \sum_{j=0}^m u^{(j)}(x, \bar{Q}(\cdot)). \quad (3.11)$$

Основным предметом исследований в работе [13] было установление условий сходимости FD-метода и оценки точности приближений (3.11) для случая $k=2$ и $\bar{Q}(x) \equiv 0$. Сложность этого случая заключается в том, что соответствующая базовая задача имела ту особенность, что каждое её собственное значение было двукратным

$$\lambda_{n,p}^{(0)}(0) = (n\pi)^2, \quad u_{n,p}^{(0)}(x,0) = \sqrt{2} \sin(n\pi x) (\delta_{p,1}, \delta_{p,2})^T, \quad p = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.12)$$

где $\delta_{p,j}$ - символ Кронекера. Проблема, связанная с вышеуказанной особенностью, была в [13] преодолена и был получен следующий результат.

Теорема 3.1. *FD-метод (3.8)-(3.11) с $\bar{Q}(x) \equiv 0$ сходится не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем $r_n(0)$ при условии*

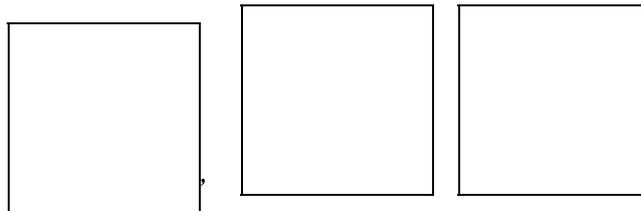
$$r_n(0) = \frac{\|Q\|_\infty}{(2n-1)\pi^2} \left[2 + 3\alpha \|Q\|_\infty + \sqrt{(1 + \alpha \|Q\|_\infty)(1 + 2\alpha \|Q\|_\infty)} \right] < 1 \quad (3.13)$$

и имеют место следующие оценки точности

$$\begin{aligned} \left\| u_{n,p} - u_{n,p}^{(m)} \right\| &\equiv \left\| u_{n,p} - \sum_{j=0}^m u_{n,p}^{(j)} \right\| \leq (3 + 2\sqrt{2}) \frac{(2m+3)!!}{(2m+4)!!} \cdot \frac{(r_n(0))^{m+1}}{1 - r_n(0)}, \\ \left| \lambda_{n,p} - \lambda_{n,p}^{(m)} \right| &\equiv \left| \lambda_{n,p} - \sum_{j=0}^m \lambda_{n,p}^{(j)} \right| \leq \|Q\|_\infty (3 + 2\sqrt{2}) \frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!} \cdot \frac{(r_n(0))^m}{1 - r_n(0)}, \quad p = 1, 2, \end{aligned}$$

где

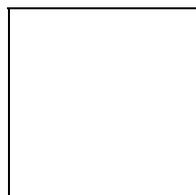
$$\begin{aligned} \|Q\|_\infty &= \max_{x \in [0,1]} \sqrt{\lambda_{\max}(Q^T(x)Q(x))}, \quad \|u\| = \left(\int_0^1 (u(x), u(x)) dx \right)^{1/2}, \quad (u, v) = \sum_{i=1}^2 u_i v_i, \\ \alpha &= \max(\alpha_1, \alpha_2), \quad \alpha_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[q_{12} + (\lambda_{n,p}^{(1)} - q_{11})^2 \right]^{-1/2}, \quad q_{ij} = 2 \int_0^1 \sin^2(n\pi x) Q_{i,j}(x) dx, \end{aligned}$$



Заметим что (3.13) демонстрирует следующее важное свойство FD-метода:

(P1) — *точность FD-метода становится тем выше, чем больше порядковый номер собственного значения.*

Как следствие из теоремы 1 были в частности, получены следующие важные соотношения



$$\square$$

(3.14)

При этом принято такое упорядочение собственных значений задачи (3.1)

$$\square$$

Следует заметить, что, если условие (3.13) до некоторого \square не

$$\square$$

выполняется, тогда для нахождения приближений к \square ,

$$\square$$

$$\square$$

$$\square$$

решений задачи (3.1) применяем алгоритм (3.8)-(3.11) с \square

$$\square$$

Традиционный подход к нахождению условий сходимости FD-метода, а также получение априорно-апостериорных оценок точности привел к следующему результату [13].

$$\square$$

Теорема 3.2. Пусть \square является простым собственным значением базовой задачи (3.10). тогда при условии

$$\square$$

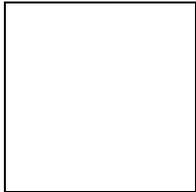
(3.15)

где

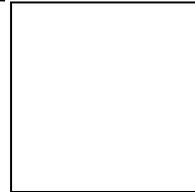
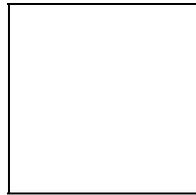
$$\square$$

$$\square$$

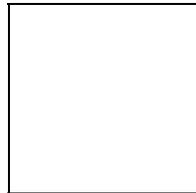
метод (3.8)-(3.11) сходится не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем



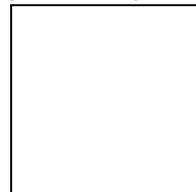
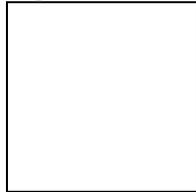
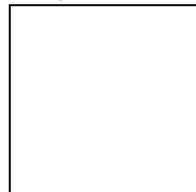
и имеют место априорно-апостериорные оценки точности



(3.16)

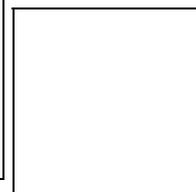
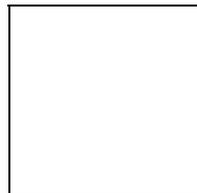


Оценки (3.15), (3.16) были названы априорно-апостериорными из-за того, что для того, чтобы они стали явными, нужно сначала решить базовую задачу (3.10) для нахождения трех

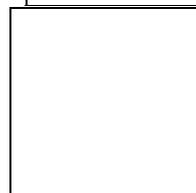


собственных значений, и только после этого оценки (3.15), (3.16) станут явными.

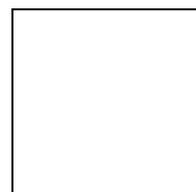
Если правая часть в предельном соотношении (3.14) отличная от нуля, то



и на первый взгляд кажется, что для случая (P1).



FD-метод теряет свое свойство



Но это не так. Далее показывается, что FD-метод при сохраняет свойство (P1). Техника, которая при этом используется, является обобщением техники из работ [9], [10] на случай матричной задачи Штурма-Лиувилля.

Исходя из (3.6), (3.7), для приближений собственных значений и собственных функций можно использовать разложения в ряд Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$\square$$

(3.17)

Из этих соотношений следует, что для оценки точности FD-метода не нужно требовать сходимости рядов (3.6), (3.7), а достаточно оценить выражения

$$\square$$

Дифференцируя по t $(j+1)$ - раз дифференциальное уравнение и краевые условия в (3.2), приходим к задаче

$$\square$$

(3.18)

где использованы обозначения

$$\square$$

(3.19)

$$\square$$

$$\square$$

Пусть \square для всех \square является простым собственным значением задачи (3.2). Тогда условие разрешимости задачи (3.18) будет иметь вид

$$\square$$

(3.20)

Дополнительно будем требовать, чтобы выполнялись два условия: нормировки

$$\square$$

(3.21)

и ортогональности

$$\square$$

(3.22)

Тогда из (3.19), (3.20) будем иметь

$$\square$$

(3.23)

Перепишем задачу (3.18) в виде

$$\square$$

(3.24)

$$\square = \square, \square$$

$$\square, \square, \square$$

Решение задачи (3.24) представим в виде

$$\square$$

$$\square$$

(3.25)

Поскольку при условии (3.20) задача (3.18), (3.22) разрешима, при этом же условии будет разрешима и задача (3.24). С другой стороны задача (3.24) будет разрешима, если правая часть дифференциального уравнения (3.24) будет ортогональна вектор-функциям

$$\square \quad \square \quad \square$$

где

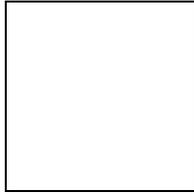
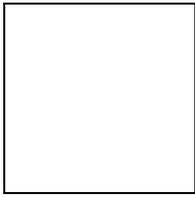
Отсюда следует, что функция (3.25)

удовлетворяет второму краевому условию из (3.24).

Обозначим

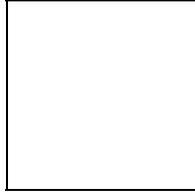
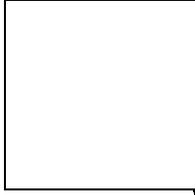
$$\square$$

Тогда нетрудно показать, что

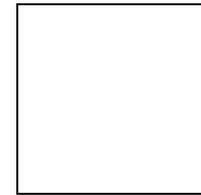
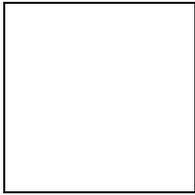


(3.26)

Из (3.25) получаем неравенство

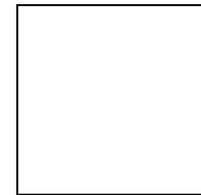
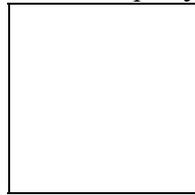


Следствием последнего будет



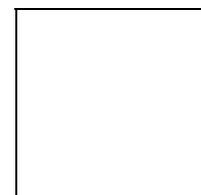
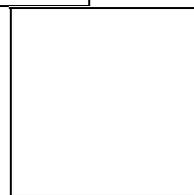
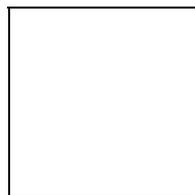
(3.27)

Решая неравенство (3.27) с помощью леммы Гронуолла, получаем



(3.28)

Согласно (3.19) будем иметь



(3.29)

Из (3.23), (3.28), (3.29) получим

$$\square$$

(3.30)

$$\square$$

где

$$\square$$

(3.31)

Решение системы неравенств (3.30) будем искать по аналогии с [12], но более простым способом. Сделаем замену

$$\begin{matrix} \square & \square & \square \\ & \square & \square \end{matrix}$$

Тогда, исходя из (3.30), получим систему неравенств

$$\begin{matrix} \square & \square \end{matrix}$$

которой соответствует мажорирующая система уравнений

$$\begin{matrix} \square & \square & \square \\ & \square & \square \end{matrix}$$

(3.32)

В ТОМ СМЫСЛЕ, ЧТО

$$\begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix}$$

Из системы (3.32) можно исключить уравнения (3.32) получаем

$$\square$$

Действительно, из второго

$$\square$$

или

$$\square$$

(3.33)

Тогда, с учетом (3.33) первое уравнение (3.32) будет иметь вид

$$\square$$

$$\square$$

$$\square$$

(3.34)

Решение рекуррентной последовательности уравнений (3.34) ищется методом производящих функций и для него имеет место оценка (см. [9]):

$$\square$$

Отсюда, с учетом (3.33) и введенных ранее обозначений, будем иметь

$$\square$$

$$\square$$

Тогда из (3.17) приходим к оценкам FD-метода

$$\square$$

$$\square$$

(3.35)

где

$$\square$$

$$\square$$

(3.36)

На основании вышеизложенного убеждаемся в справедливости утверждения

$$\square$$

Теорема 3.3. Пусть λ простое собственное значение базовой задачи (3.10)

Тогда для погрешности приближения m -го ранга (3.11), полученного с помощью FD-метода, имеют место оценки (3.35).

$$\square$$

$$\square$$

Замечание 2.2. Если λ , то FD-метод при λ сходится к решению исходной задачи со скоростью не медленнее геометрической прогрессии со

$$\square$$

знаменателем

$$\square$$

Перейдем к алгоритму реализации метода. Пусть ϵ заданная точность, с

$$\square$$

которой требуется найти приближение к

Предположим, что для достижения

указанной точности нужно аппроксимировать матрицу A некоторой кусочно-
 постоянной матрицей A_h так, чтобы

$$\|A - A_h\| \leq \epsilon \tag{3.37}$$

где норма матрицы определяется как средне квадратичная $\|A\|_F$. Для выбранного

номера n необходимо найти такое n при фиксированном ранге

r

FD-метода, которое обеспечивает желаемую точность.

Согласно (3.26), (3.31), (3.35), (3.36) будем иметь следующее уравнение для

определения n :

$$\epsilon = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$$

Например, пусть . Тогда, найдем для первых трех собственных значений

и заданной точности соответствующее .

Результаты приведены в табл. 3.1.

<input type="text"/>	1	2	3	4
1	0.00715	0.02661	0.04841	0.06764
2	0.01152	0.05046	0.09950	0.04613
3	0.01448	0.06840	0.14040	0.21113

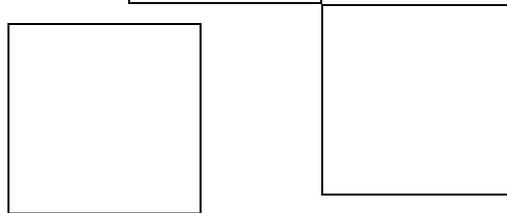
Таблица 3.1: Зависимость от параметров n и m .

Согласно вычисленному построим сетку с минимальным

количеством узлов, которая включает в себя все точки разрыва функций

, и для которой кусочно-постоянная матрица удовлетворяет равенству (3.37).

На каждом промежутке \square построим разложение



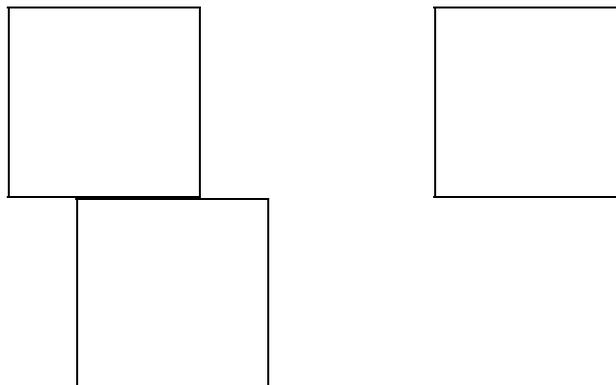
Далее реализуем алгоритм, изложенный в п. 2 .

Вычисления на тестовых примерах проводились в системах символьной математики (с.с.м.) Maple 10.0 [18] и Mathematica 5.1 [19] с локальной точностью, соответствующей 32-м значущим цифрам мантиссы.

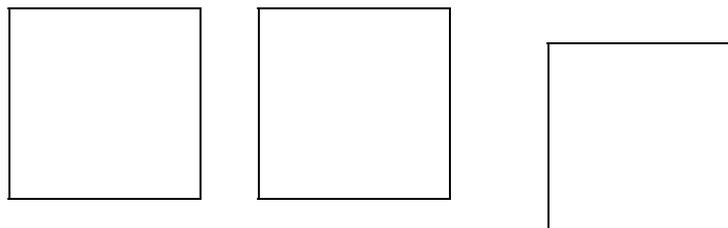
4. Численные эксперименты.

Пример 1. Краевые условия Дрихле.

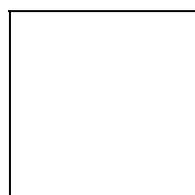
Рассмотрим краевую задачу



где



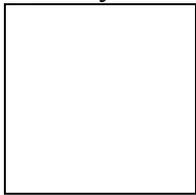
Выберем \square и матрицу \square с постоянными коэффициентами по формуле (3.4)



Используя разложение

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и, следуя алгоритму, изложенному в п.2, из уравнения (2.17) получаем собственные значения



базовой задачи (2.7) с условиями Дирихле (см. табл. 4.1).

1	4.2965895815	4.297017629	-0.0004280
2	16.01915111 	16.019035056	0.0001161
3	35.55500313 	35.554930436	0.0000727
4	62.90512658 	62.905081789	0.0000448

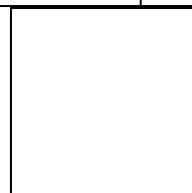
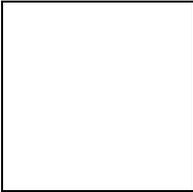


Таблица 4.1: Точные собственные значения , приближения нулевого

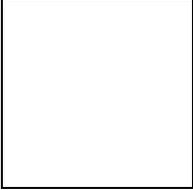
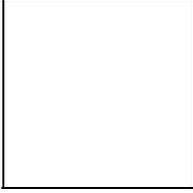
ранга

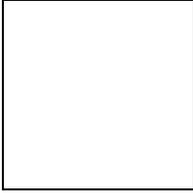
и их отклонения от точных значений

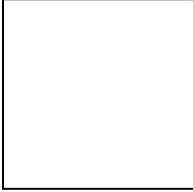
--	--	--

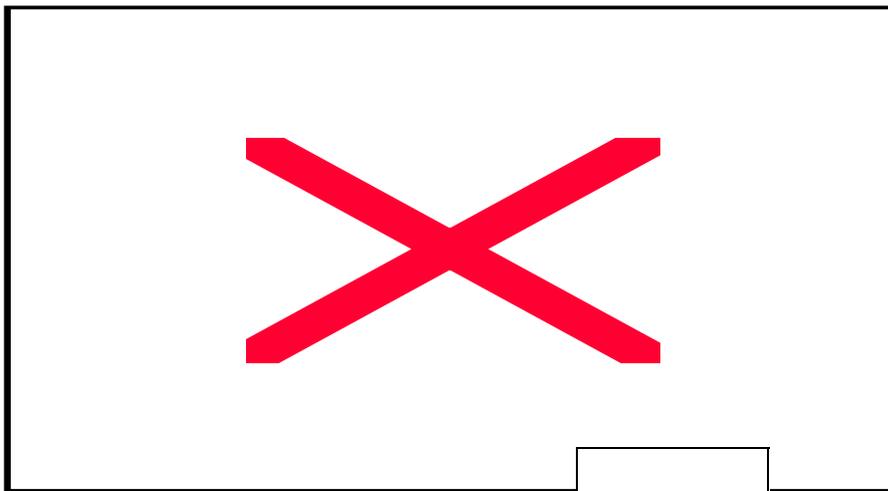
Представленные в таблице 4.1 точные собственные значения  получены с помощью подхода, допускающего реализацию в с.с.м. Maple 10.0. Используемая процедура

dsolve/numeric/BVP позволяет при дополнительном условии  находить

 . Собственные значения с порядковыми номерами  можна

определить, фиксируя параметр  и, используя метод бисекции при отслеживании знака соответствующей собственной функции через решения задач Коши по

одному из краевых условий. Приведенные отклонения  показывают достаточно высокую точность приближений.



На рис.4.1 изображен график функции , нули которой и соответствуют

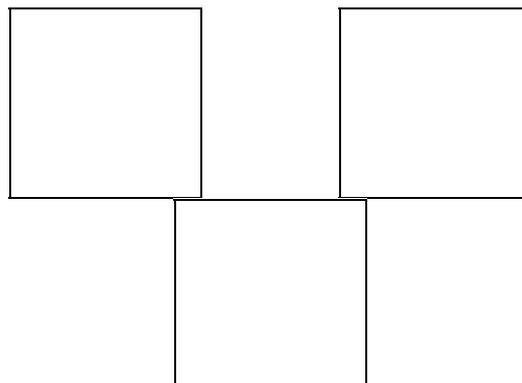
указанным в таблице 4.1 собственным значениям .

Заметим, что возможность в с.с.м. Maple построения графика для приближений нулевого ранга позволяет локализовать области существования точных собственных значений, нахождение которых с помощью метода бисекции на произвольных (неизвестных) отрезках было бы затруднительным.

Пример 2. Неразделяющиеся краевые условия.

В качестве иллюстрации возможностей FD-метода и сравнением его с методом предложенным в [1], рассмотрим две задачи из [1], которые имеют одни и те же собственные значения.

Задача В



$$\square \tag{4.1}$$

Задача С

$$\square$$

$$\square$$

$$\square \tag{4.2}$$

где

$$\square$$

$$\square$$

Задачу **В** будем использовать для нахождения точных собственных значений

$$\square$$

с помощью с.с.м. Mathematica 5.1. а на задаче **С** будем производить сравнение FD-метода с методом из [1].

Применяя для задачи **В** замену

$$\square$$

получим уравнение

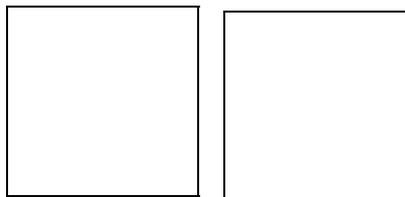
$$\square$$

$$\square \tag{4.3}$$

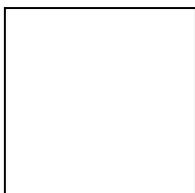
с неразделяющимися краевыми условиями (4.1).

Представив общее решение однородного уравнения (4.3) в виде

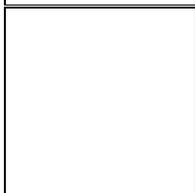
$$\square \tag{4.4}$$



где C_1, C_2 - произвольные постоянные,

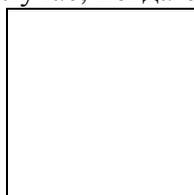


- конфлюэнтные гипергеометрические функции Куммера,

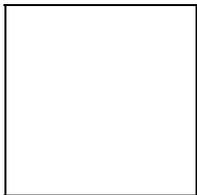
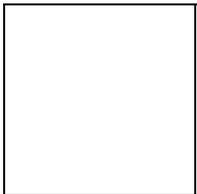
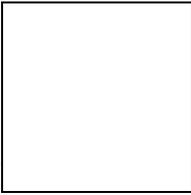
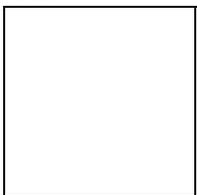
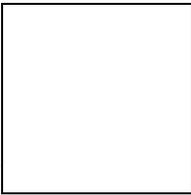
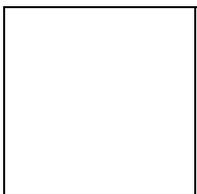
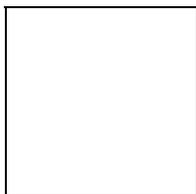


- функции параболического цилиндра (см.[20]),

подставим его в краевые условия (4.1). В результате приходим к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_1, C_2 . Существование её нетривиального решения возможно в случае, когда её определитель равен нулю. Отсюда и



находим точные собственные значения, представленные в таблицах 4.2, 4.3.

		<i>Problem B</i>	<i>Problem C</i>
1	1.635974299113	1.6359 	1.6359 
2	7.956968711152	7.9569 	7.9569 
3	12.820634431862	12.8206 	12.8206 
4	25.257766114130	25.2577	25.2577

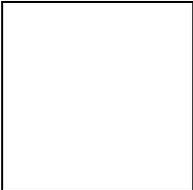
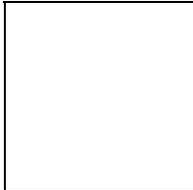
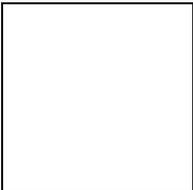
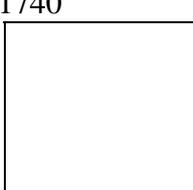
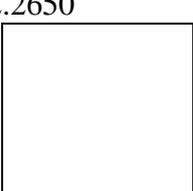
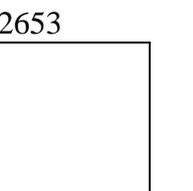
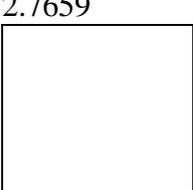
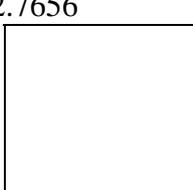
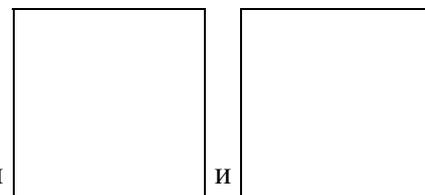
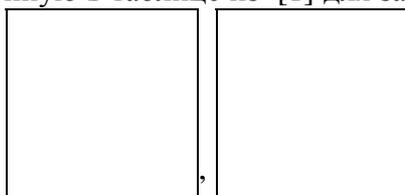
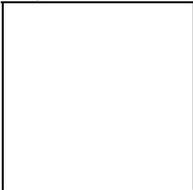
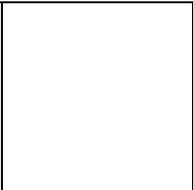
5	38.483926076020	38.4839 	38.4839 
6	60.174055307788	60.1740 	60.1740 
7	82.265382696051	82.2650 	82.2653 
8	112.765702415705	112.7659 	112.7656 

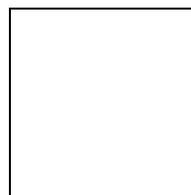
Таблица 4.2: Точные собственные значения ($n=1, \dots, 8$) и результаты решения задач **B** и **C** из [1].



Как видно из таблицы 4.2, точные собственные значения (полученные с использованием в с.с.м. Mathematica опции **WorkingPrecision->36**) в вилку, представленную в таблице из [1] для задачи **B**, не попадают. Аналогичное замечание имеет



место для ,  в задачах **B** и **C**. На основании изложенного можно заключить, что точность метода из [1] с ростом порядкового номера собственного значения падает.

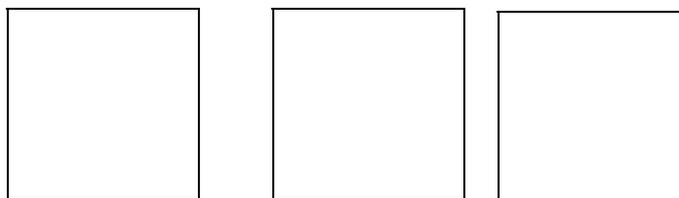


В табл.4.3 приведены точные собственные значения для старших порядковых номеров, которые будут необходимы в последующем численном анализе при построении графических аппроксимаций.

9	143.649840194182	17	564.728680237988
10	182.930927320600	18	639.105729413005
11	222.594881249805	19	713.867711306158
12	270.651407665620	20	797.017840008380
13	319.091381726685	21	880.553180878337
14	375.921846779022	22	972.476339184658
15	433.136382079434	23	1064.784923121396
16	498.740250118135	24	1165.481085283905

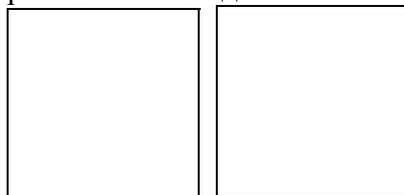
Таблица 4.3: Точные собственные значения (n= 9,...,24) задач **В** и **С**.

Для апробации предложенного в настоящей статье метода в случае системы 3-х уравнений рассматривается задача **С**. Замена (4.1) приводит к матричному уравнению



с неразделяющимися краевыми условиями (4.2).

С помощью алгоритма FD-метода из п.2 получаем приближения 0-4 рангов, которые



вместе с поправками

представлены в таблице 4.4.

1	0.3935400	2.1664951	-1.568947	0.8031094	1.067e-1	1.9009063	-2.65e-1
2	4.2118415	3.6783596	0.8059405	-0.933303	-1.06e-1	7.65669412	3.00e-1
3	9.0332636	3.3280887	0.3822793	0.1145488	-2.30e-3	12.85587810	-3.52e-2
4	21.9487629	3.1726560	0.1248428	0.0104030	1.246e-3	25.25791081	-1.45e-4
5	35.3441902	3.0737817	0.0622912	0.0032386	3.846e-4	38.48388640	3.97e-5
6	57.0657813	3.0686804	0.0384820	0.0010360	7.119e-5	60.17405082	4.49e-6
7	79.2078180	3.0321589	0.0249552	0.0004272	2.221e-5	82.26538148	1.22e-6
8	109.7110702	3.0360771	0.0183333	0.0002139	0.760e-5	112.76570214	2.77e-7
9	140.6182554	3.0179667	0.0135044	0.0001106	0.302e-5	143.64984011	8.85e-8
10	179.8980355	3.0220927	0.0107299	0.0000678	0.140e-5	182.93092729	3.02e-8

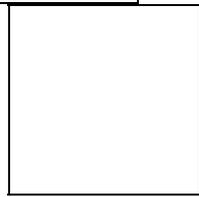
Таблица 4.4. Поправки 0-4 рангов, приближения 4-го ранга и их отклонения

от точных собственных значений ().

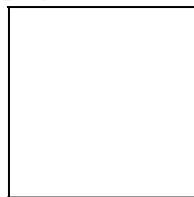
Как видно из таблицы 4.4 для собственных значений с порядковыми номерами

практическая сходимость FD-метода для имеет место. Вместе с тем для собственного значения с порядковым номером сходимость не наблюдается, так как выбранная матрица недостаточно хорошо аппроксимирует исходную матрицу коэффициентов .

Положим \square , сетку \square возьмем в виде



а матрицу \square – согласно формуле (3.4):



Результаты вычислений представлены в следующей таблице

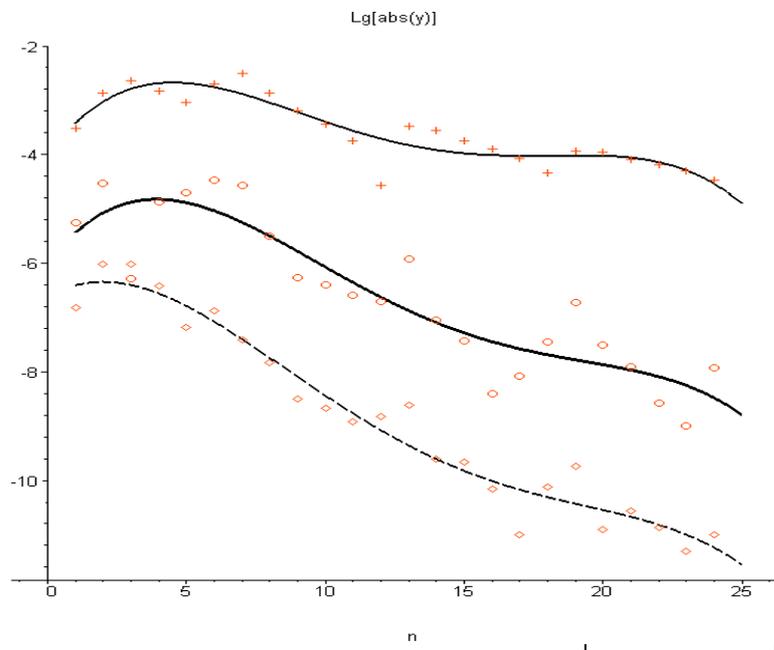
	\square	\square	\square	\square	\square	\square
1	1.71304822	-0.07677473	-0.00030460	5.5593 e-6	1.63597445	-1.519 e-7
2	8.02182593	-0.06355607	-0.00133038	3.0196 e-5	7.95696968	-9.682 e-7
3	12.79813363	0.02482971	-0.00232933	-5.1356 e-7	12.82063349	9.460 e-7
4	25.24822842	0.01102647	-0.00147585	-1.3293 e-5	25.25776574	3.740 e-7
5	38.45879540	0.02606145	-0.00091108	-1.9759 e-5	38.48392601	6.686 e-8
6	60.12372701	0.05236221	0.00199957	-3.4470 e-5	60.17405517	1.347 e-7
7	82.22781446	0.03447911	0.00306261	2.6905 e-5	82.26538308	-3.821 e-7
8	112.85723561	-0.09291837	0.00138203	3.1615 e-6	112.76570243	-1.499 e-8
9	143.70578733	-0.05657420	0.00062654	5.3224 e-7	143.64984020	-3.119 e-9
10	182.96789655	-0.03730656	0.00033693	4.0546 e-7	182.93092732	-2.135 e-9

Таблица 4.5. Поправки 0-3 рангов, приближения 3-го ранга и их отклонения

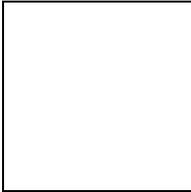
от точных собственных значений

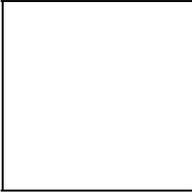
В таблице 4.5 приведены результаты для первых 10-ти собственных значений, хотя

 эксперимент был проведен для , что отображено на рис.4.2. Здесь верхние
 кривые соответствуют средне-квадратической аппроксимации для поправок второго

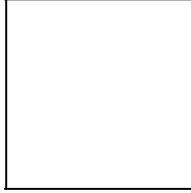


и третьего рангов, а нижняя кривая (пунктирная) – абсолютной

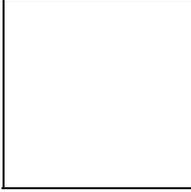
величине отклонения приближений третьего ранга  от точных собственных

значений .

Из таблицы и графиков следует, что монотонное уменьшение усредненной погрешности приближений 3-го ранга и соответственно их поправок происходит с

увеличением собственных значений, начиная с порядкового номера .

Таким образом экспериментально показано, что для задачи из примера 2, начиная с

порядкового номера , FD-метод вместе с средне-квадратической обработкой результатов вычислений обладает свойством (P1).

Благодарность. Авторы выражают признательность за частичную финансовую поддержку Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) и DFFD в Украине (Грант NDP N- 0107.096)

Литература:

1. Dwyer H.I., Zettl A.. Computing Eigenvalues of Regular Sturm-Liouville Problems //Electronic Journal of Diff. Equations, 1994. № 6, pp.1-10.
2. Bailey P.B.. SLEIGN: An Eigenfunction-eigenvalue Code for Sturm-Liouville Problems, {SAND7-2044}, Sandia Laboratories, Albuquerque, 1978.
3. Bailey P.B., Gordon M.K., Shampine L.F.. Automatic Solution of the Sturm-Liouville Problems // ACM Trans. Math. Software, 4(1978), pp.193-208.
4. Pruess S. and Fulton C.. Mathematical software for Sturm-Liouville problems // ACM TOMS (1994), to appear.
5. Pryce J.. D02KEF, NAG Library Reference Guide.
6. Plum M.. Eigenvalue Inclusions for Second-order Ordinary Differential Operators by a Numerical Homotopy Method // Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 41.-(March 1990), pp.205-226.
7. Dwyer H.I. and Zettl A.. Eigenvalue computations for regular matrix Sturm-Liouville problems // Electronic Journal of Diff. Equations, 1995, vol. 1995(05), pp. 1-13.
8. Atkinson F.V., Krall A.M., Leaf G.K., and Zettl A. On the numerical computation of eigenvalues of matrix Sturm-Liouville problems with matrix coefficients // Argon National Laboratory, Reports, Darien, 1987.
9. Макаров В.Л.. О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма-Лиувилля с кусочно-гладким коэффициентом // ДАН СССР. N 3 (320), 1991, с.31-39.
10. Макаров В.Л., Лазурчак И.И., Бандырский Б.И.. Неклассические асимптотические формулы и аппроксимация произвольного порядка точности собственных значений задачи Штурма-Лиувилля с условиями Бицадзе-Самарского // Кибернетика и системный анализ, 33, (2003), № 7, с. 955--962 .
11. Bandyrskii B., Makarov V., Lazurchak I. Sapagovas M. Eigenvalue problem with nonlocal Conditions // Nonlinear analysis: Modeling and Control.- V.11, No.1, (2006), pp. 13-23.
12. Makarov V.L.,and Ukhanev O.L.. FD-Method for Sturm-Liouville Problems. Exponential Rate of Convergence // Appl. Math.and Inform., Tbilisi:Univ.Press, 1997, vol.2, pp.1-19.
13. Bandyrskii B., Gavriljuk I., Lazurchak I., Makarov V. Functional diskrete method (FD-method) for matrix Sturm-Liouville problems // Computation Methods in Applied Mathematics.- Vol. 5 (2005), No.4. pp.362-386.
14. Абрамов А.А., Асланян А.А. Обобщение одного метода решения задачи на собственное значение для гамильтоновых систем // ЖВМиМФ [1994], Том 34, № 11, с.1896-1991.
15. Асланян А.А. О решении самосопряженной задачи на собственные значения при больших значений спектрального параметра // ЖВМиМФ [1995], Том 35, №~11, с.1653-1665.
16. Ledoux V., Van Dacle M., Vanden Berghe G. // Computer Physics Communication, 162 (2004), pp.151-165.
17. Беллман Р. Введение в теорию матриц. Пер. с англ.под ред.В.Б. Муского. Изд. 2-е . М., "Наука", 1976, 351с.
18. Дьяконов В.П.. Математическая система Maple V. - М.: Солон,- 1998,-400 с.
19. Wolfram S.. Mathematica: a system for doing mathematics by computer.- Addison Wesley, 1988.
20. Bateman H. and Erdelyi A.. Higner Transcendental Functions.- MC Graw-Hill Book Comp., Inc.,New York, Toronto, London, 1988. 324 p.

Статья получена: 2007-05-15

Рис.– 2; табл. – 5.