УДК 519.2

Оптимальная остановка марковского процесса на конечном интервале времени

[1]Бабилуа Петре, [2]Бокучава Иа, [3]Дочвири Бесарион, [4]Ломинашвили Георгий

[1,2,3] Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили,
Университетская ул. 2, Тбилиси 0143, Грузия
[4] Кутайский государственный университет им. А. Церетели,
ул. Царицы Тамар № 59, Кутаиси 4600, Грузия

Резюме:

Изучены общие вопросы теории оптимальной остановки однородного необрывающегося стандартного марковского процесса на конечном интервале времени $[0,T]$, *с учетом выплаты за наблюдение. В этом случае цена продолжения наблюдений зависит от временного параметра T и задача становится в определенном смысле неоднородной. Эта задача сведена к однородной задаче оптимальной остановки на бесконечном интервале времени и найден вид* ε*-оптимального момента остановки.*

Ключевые слова:

марковский процесс, фазовое пространтсво, оптимальная остановка, цена, момент остановки.

1. Введение

Теория оптимальной остановки на бесконечном интервале времени однородного необрывающегося стандартного марковского процесса наиболее полно изложена в монографии [1]. Дана эксцессивная и супермартингальная характеризация цен и найден вид оптимальных и ε-оптимальных моментов остановки. Использована хорошо развитая теория марковских процессов из монографии [2]. Следует также отметить работу [3].

В настоящей работе задача оптимальной остановки изучается на конечном интервале времени с учетом выплаты за наблюдение. Этот случай не является частным случаем общей теории, так как в этом случае цена продолжения наблюдений зависит от временного параметра и задача становится в определенном смысле неоднородной. За счет перехода к каноническому процессу, расширения фазового пространства и пространства траекторий задача сводится к однородной задаче и находится вид ε-оптимального момента остановки. Вкратце эти результаты изложены в [4].

Всюду в настоящей работе мы существенно будем опираться на результаты монографий [1] и [2].

Рассмотрим стандартный марковский случайный процесс

$$X = (\Omega, \mathrm{M}, \mathrm{M}_t, X_t, \theta_t, P_x), \quad t \in [0,\infty), \tag{1}$$

в фазовом пространстве (E, B), т.е. предполагается, что

1) E локально компактное хаусдорфово пространство со счетной базой, B – σ-алгебра борелевских множеств этого пространства;

2) для каждого $x \in \mathrm{E}$ P_x-является вероятностой мерой на σ-алгебре M; M_t, $t \geqq 0$ – возрастающий поток под-σ-алгебр σ-алгебры M, причем

$$\mathrm{M} = \overline{\mathrm{M}}, \quad \mathrm{M}_t = \mathrm{M}_{t+} = \overline{\mathrm{M}_t},$$

где $\overline{\mathcal{M}}$, $\overline{\mathcal{M}_t}$ обозначают пополнение – по системе всех мер P_x, $x \in \mathcal{E}$ (см. [2]);

3) траектории процесса $X_t(\omega)$ является непрерывными справа и обладают пределами слева на интервале времени $[0,\infty]$;

4) для каждого $t \geq 0$ случайные величины $X_t(\omega)$ (со значениями в $(\mathcal{E},\mathcal{B})$) являются $\mathcal{M}_t$-измеримыми, причем $P_x(X_0 = x) = 1$, а функция $P_x(x_h \in B)$ является *B*-измеримой по *x* для любых фиксированных $h \geq 0$, $B \in \mathcal{B}$;

5) процесс *X* является сторого марковским; для любого $\mathcal{M}_t$-марковского момента τ имеем:

$$P_x(X_{\tau+h} \in B / \mathcal{M}_\tau) = P_{x_\tau}(X_h \in B) \quad (\{\tau < \infty\},\ P_x - \text{п.н.});$$

6) процесс *X* является квазинепрерывным слева: для всякой неубывающей последовательности марковских моментов $\tau_n \uparrow \tau$ должно быть

$$X_{\tau_n} \to X_\tau \quad (\{\tau < \infty\},\ P_x - \text{п.н.});$$

7) для всех $t \geq 0$ определены операторы сдвига $\theta_t : \Omega \to \Omega$ такие, что

$$X_u(\theta,\omega) = X_{u+t}(\omega) \quad \text{для всех} \quad u \geq 0.$$

Предположим, что заданы функция выйгриша $f(x)$ и цена за наблюдение $c(x) \geq 0$, $x \in \mathcal{E}$, [4]. Если мы прекращаем наблюдение в момент времени *t*, то получаем выйгриш

$$g(X_t) = f(X_t) - \int_0^t c(X_s)ds. \tag{2}$$

Пусть теперь $g(x)$ – почти борелевская (см. [2, гл. I]), C_0-непрерывная функция, заданная на $(\mathcal{E},\mathcal{B})$ и принимающая значения в $[-A,\infty]$, где *A* – некоторое конечное положительное число $(0 < A < \infty)$. Заметим здесь, что C_0-непрерывность означает следующее:

$$P_x\left(\lim_{t \downarrow 0} g(X_t) = g(x)\right) = 1 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}. \tag{3}$$

Хорошо известно, что для почти борелевских, C_0-непрерывных функций $g(x)$ случайный процесс $g(X_t)$имеет (P_x-п.н. для любого $x \in \mathcal{E}$) непрерывные вправа траектории (см. [2, гл. II, теорема 4.8]).

Рассмотрим теперь задачу оптимальной остановки стандартного марковсктого процесса $X = (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \theta_t, P_x)$, $t \in [0,\infty)$ на конечном интервале времени $[0,T]$, $0 < T < \infty$, с указанной функцией выигрыша $g(x)$

$$s(T,x) = \sup_{\tau \leq T} E_x\left[g(X_\tau) \cdot I_{(\tau<T)} + \lim_{t \uparrow T} g(X_t) \cdot I_{(\tau=T)}\right], \tag{4}$$

где супремум берется по всем $\mathcal{M}_t$-моментам остановки $\tau(\omega)$ с $\tau(\omega) \leq T$. Величина $s(T,x)$ называется ценой, а момент остановки τ_ε такой, что $\tau_\varepsilon(\omega) \leq T$, называется ε-оптимальной, если

$$E_x\left[g(X_{t_\varepsilon}) \cdot I_{(\tau_\varepsilon<T)} + \lim_{t \uparrow T} g(X_t) \cdot I_{(\tau_\varepsilon=T)}\right] \geq s(T,x) - \varepsilon \tag{5}$$

для всех $x \in \mathcal{E}$.

2. Построение стандартного марковского процесса в расширенном фазовом пространстве

Обозначим через *W* пространство всех непрерывных справа, имеющих пределы слева (на интервале времени $[0,\infty)$) функций *w* со значениями в *E*. Определим случайную функцию $Y_t(\omega) = w(t)$, $t \geq 0$ и введем σ-алгебры

$$\mathcal{Y}^0 = \sigma(Y_u, u \geq 0), \qquad \mathcal{Y}_t^0 = \sigma(Y_u, u \leq t).$$

Определим теперь операторы сдвига $\varphi_t : \mathsf{W} \to \mathsf{W}$, $(\varphi_t w)(u) = w(u+t)$, $t \geq 0$, $u \geq 0$ (очевидно, что $Y_u(\varphi_t w) = Y_{u+1}(w)$). Рассмотрим следующее отображение

$$\pi : \Omega \to \mathsf{W}, \quad (\pi\omega)(t) = X_t(\omega),$$

будем иметь $Y_t(\pi\omega) = (\pi\omega)(t) = X_t(\omega)$, $t \geq 0$.

Очевидно, что

$$\pi^{-1}(w : Y_t(w) \in B) \equiv (\omega : Y_t(\pi\omega) \in B) = (\omega : X_t(\omega) \in B).$$

Следовательно,

$$\pi^{-1}\mathsf{Y}^0 = \mathsf{F}^0, \quad \pi^{-1}\mathsf{Y}_t^0 = \mathsf{F}_t^0, \tag{6}$$

где по определению принимаем

$$\mathsf{F}^0 = \sigma(X_u, u \geq 0), \quad \mathsf{F}_t^0 = \sigma(X_u, u \leq t).$$

Введем теперь меры на пространстве $(\mathsf{W}, \mathsf{Y}^0)$

$$\hat{P}_x(G) = P_x(\pi^{-1}G), \quad \text{где} \quad G \in \mathsf{Y}^0. \tag{7}$$

Покажем сейчас, что случайный процесс $Y = (\mathsf{W}, \mathsf{Y}^0, \mathsf{Y}_{t+}^0, Y_t, \varphi_t, \hat{P}_x)$, $t \geq 0$, является сторого марковским процессом, эквивалентным марковскому процессу $X = (\Omega, \mathsf{M}, \mathsf{M}_t, X_t, \theta_t, P_x)$. В самом дле имеем $\hat{P}_x(Y_h \in B) = P_x(X_h \in B)$. Далее нужно показать свойство сторогой марковости

$$\hat{P}_x(Y_{\hat{\tau}+h} \in B / \ \mathsf{Y}_{\hat{\tau}+}^0) = \hat{P}_{Y\hat{\tau}}(Y_h \in B) \quad (\{\hat{\tau} < \infty\},\ \hat{P}_x - \text{п.н.}), \tag{8}$$

где $\hat{\tau}$ – произвольный марковский момент относительно семейства Y_{t+}^0, а $\mathsf{Y}_{\hat{\tau}+}^0$ есть σ-алгебра множеств G из Y^0 таких, что $G \cap \{\hat{\tau} \leq t\} \in \mathsf{Y}_{t+}^0$, что эквивалентно тому, что $G \cap \{\hat{\tau} < t\} \in \mathsf{Y}_t^0$.

По преджложению 8.2, гл. I из монографии [2], для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие

$$\hat{E}_x\left[f(Y_{\hat{\tau}+h}) \cdot I_{(\hat{\tau}<\infty)}\right] = \hat{E}_x\left[\hat{M}_{Y\hat{\tau}} f(Y_h) \cdot I_{(\hat{\tau}<\infty)}\right], \tag{9}$$

где $\hat{\tau}$ – произвольный Y_{t+}^0-марковский момент, а $f(x)$ – произвольная ограниченная *B*-измеримая функция.

В первую очередь заметим, что по определению мер $\hat{P}_x$ имеем

$$\hat{E}_x\eta(x) = E_x\eta(\pi\omega), \tag{10}$$

где $\eta(\omega)$ – ограниченная Y^0-измеримая функция. Следовательно, нужно доказать, что

$$E_x\left[f(Y_{\hat{\tau}(\pi\omega)+h}(\pi\omega) \cdot I_{(\hat{\tau}(\pi\omega)<\infty)})\right] = E_x\left[Ey_{\hat{\tau}(\pi\omega)}(\pi\omega) f(X_h) \cdot I_{(\hat{\tau}(\pi\omega)<\infty)}\right].$$

Теперь, так как для $\tau(\omega) \equiv \hat{\tau}(\pi\omega)$,

$$(\omega : \tau(\omega) < t) = \pi^{-1}(w : \hat{\tau}(w) < t) \in \mathsf{F}_t^0,$$

то случайная величина $\tau(\omega)$ оказывается F_{t+}^0-марковским моментом и утверждение, которое требуется доказать принимает вид

$$E_x\left[f(X_{\tau+h}) \cdot I_{(\tau<\infty)}\right] = E_x\left[E_{X_\tau} f(X_h) \cdot I_{(\tau<\infty)}\right],$$

что в свою очередь имеет место по предположению строгой марковости процесса *X* относительно семейсива σ-алгебр M_t (заметим, что $\mathsf{F}_{t+}^0 \subseteq \mathsf{M}_{t+} = \mathsf{M}_t$).

Рассмотрим теперь σ-алгебры $\varphi_s^{-1}\mathsf{Y}^0$, $\varphi_s^{-1}\mathsf{Y}_t^0$ для любых $s \geq 0$, $t \geq 0$. Легко проверить, что

$$\varphi_s^{-1}\mathsf{Y}^0 = \sigma(Y_u, u \geq s), \quad \varphi_s^{-1}\mathsf{Y}_t^0 = \sigma(Y_u, s \leq u \leq s+t). \tag{11}$$

Заметим сейчас, что операторы сдвига φ_s, $s \geq 0$ обладают следующим свойством: любую траекторию w' можно представить в виде

$$w' = \varphi_s w, \tag{12}$$

где w – некоторая траектория.

В самом деле, возьмем к примеру

$$w(u)=\begin{cases} w'(0), & \text{при} \quad u<s, \\ w'(u-s), & \text{при} \quad u \geq s. \end{cases}$$

Из этого свойства вытекает, что если $\varphi_s^{-1}G^1=\varphi_s^{-1}G^2$, то обязательно $G^1=G^2$, где G^1, G^2 – произвольные множества траекторий (т.е. подмножества пространства W). Чтобы это проверить возьмем, к примеру, w' такую, что $w' \in G^1$, $w' \notin G^2$. Представим w' в виде $w'=\varphi_s w$. Тогда получим

$$w \in \varphi_s^{-1}G^{-1}, \quad w \notin \varphi_s^{-1}G^2,$$

противоречие. Таким образом множества из σ-алгебры $\varphi_s^{-1}\mathrm{Y}^0$ имеют единственное представление в виде $\varphi_s^{-1}G$, где $G \in \mathrm{Y}^0$.

Основываясь на этой единственности в измеримом пространстве $\left(\mathrm{W}, \varphi_s^{-1}Y^0\right)$ введем вероятностные меры

$$\hat{P}_{s,x}\left(\varphi_s^{-1}G\right) \equiv \hat{P}_x(G), \quad s \geq 0, \tag{13}$$

(заметим, что $\hat{P}_{0,x}(G) \equiv \hat{P}_x(G)$, $G \in \mathrm{Y}^0$).

Тогда по теореме о монотонных классах (см., напр. [2]) получаем, что для любой ограниченной Y^0-измеримой функции $\eta(w)$ имеет место следующее соотношение

$$\hat{E}_{s,x}\eta(\varphi_s w)=\hat{E}_x\eta(w), \quad s \geq 0, \tag{14}$$

где очевидно функция $\eta(\varphi_s w)$ является $\varphi_s^{-1}\mathrm{Y}^0$-измеримой.

С другой стороны покажем, что любая $\varphi_s^{-1}\mathrm{Y}^0$-измеримая функция $\eta_s(w)$ с конечными значениями можно представить в виде

$$\eta_s(w)=\eta(\varphi_s w), \tag{15}$$

где $\eta(w)$ – конечная Y^0-измеримая функция.

Для этого опять воспользуемся теоремой о монотонных классах. Рассмотрим систему всех конечных $\varphi_s^{-1}\mathrm{Y}^0$-измеримых функций $\eta_s(w)$, представимых в указанном виде. Эта система является векторным пространством, содержащим единицу $(\eta_s(w)=1)$ и индикаторы следующих множеств

$$\left(w: Y_{u_1}(w) \in B_1, \ldots, Y_{u_k}(w) \in B_k\right), \quad s \leq u_1 \leq \cdots \leq u_k,$$

в самом деле

$$I_{\left(Y_{u_1}(w) \in B_1, \ldots, Y_{u_k}(w) \in B_k\right)}=\eta(\varphi_s(w)),$$

где

$$\eta(w)=I_{\left(Y_{u_1-s} \in B_1, \ldots, Y_{u_k-s} \in B_k\right)}.$$

Эта система удовлетворяет условию монотонности: если $\eta_s(w)$ неотрицательная возрастающая последовательность из этой системы и предел $\eta_s(w)=\lim\limits_{n\to\infty}\eta_s^n(w)$ является конечным, то должно быть и $\eta_s(w)$ принадлежит той же системе. Проверяется последнее следующим образом: по предположению $\eta_s^n(w)=\eta^n(\varphi_s w)$, причем последовательность $\eta^n(w)$ тоже является возрастающей, так как если для некторого w' это не так, то найдется w такое, что $w'=\varphi_s w$ и тогда последовательность $\eta_s^n(w)$ тоже не будет возрастающей. Обозначим предел последовательности $\eta^n(w)$ через $\eta(w)$. Предельным переходом в равенстве

$$\eta_s^n(w)=\eta^n(\varphi_s w)$$

получаем

$$\eta_s(w) = \eta(\varphi_s w).$$

Таким образом по теореме о монотонных классах получаем, что рассматривающая система содержит все конечные $\varphi_s^{-1}Y^0$-измеримые функции $\eta_s(w)$.

Используем теперь установленный факт для доказательства следующего важного для наших целей предложения.

Лемма 1. *Пусть для произвольного $s \geq 0$ задана неотрицательная функция $\tau_s(w)$ такая, что*

$$(w; \tau_s(w) < t) \in \varphi_s^{-1}\mathrm{Y}_t^0, \quad t \geq 0, \tag{16}$$

тогда найдется Y_{t+}^0-марковский момент $\hat{\tau}(w)$ такой, что

$$\tau_s(w) = \hat{\tau}(\varphi_s w). \tag{17}$$

Доказательство. Заметим сперва, что можно ограничиться случаем конечного $\tau_s(w)$, так как в любом случае имеет место соотношение

$$\tau_s(w) = \lim_{N \to \infty} \tau_s(w) \wedge N.$$

Из условия (16) имеем, что функция $\tau_s(w)$ является $\varphi_s^{-1}\mathrm{Y}^0$-измеримой. Следовательно, по определению (15) получаем

$$\tau_s(w) = \hat{\tau}(\varphi_s(w)),$$

где $\hat{\tau}(w)$ – конечная неотрицательная Y^0-измеримая функция. Далее можно написать

$$(w : \tau_s(w) < t) = \varphi_s^{-1}(w : \hat{\tau}(w) < t).$$

Значит по предположению леммы получаем, что

$$\varphi_s^{-1}(w : \hat{\tau}(w) < t) \in \varphi_s^{-1}\mathrm{Y}_t^0,$$

а отсюда из-за установленной ранее единственности представления имеем

$$(w : \hat{\tau}(w) < t) \in \mathrm{Y}_t^0,$$

что означает, что $\hat{\tau}(w)$ является Y_{t+}^0-марковским моментом.

Перейдем теперь к расширению пространства траекторий *W*, введем новое пространство $\mathrm{W}' = [0, \infty) \times \mathrm{W}$, с элементами $w' = (s, w)$, $s \geq 0$, рассмотрим также новое фазовое пространство $\mathrm{E}' = [0, \infty) \times \mathrm{E}$ с σ-алгеброй произведения $\mathrm{B}' = \mathrm{B}[0, \infty) \oplus \mathrm{B}$, новый случайный процесс со значениями в E'

$$Y_t' = Y_t'(s, w) = (s + t, Y_{s+t}(w)), \quad t \geq 0, \quad s \geq 0, \tag{18}$$

новые опреаторы сдвига φ_t':

$$\varphi_t'(s, w) = (s + t, w), \quad t \geq 0, \quad s \geq 0,$$

причем очевидно, что

$$Y_u'(\varphi_t' w') = Y_{u+t}'(w'), \quad t \geq 0, \quad u \geq 0.$$

В пространстве W' введем σ-алгебры

$$\mathrm{N}^0 = \sigma(Y_u', u \geq 0), \qquad \mathrm{N}_t^0 = \sigma(Y_u', u \leq t),$$

а на σ-алгебре N^0 – вероятностные меры

$$P_{x'}'(A) = P_{(s,x)}'(A) \equiv \hat{P}_{(s,x)}(A_s), \tag{19}$$

где $A \in \mathrm{N}^0$, а A_s представляет собой сечение множества *A* в точке *s*: $A_s = \{w : (s, w) \in A\}$, причем легко видеть, что если $A \in \mathrm{N}^0$, то $A_s \in \varphi_s^{-1}\mathrm{Y}^0$ и если $A \in \mathrm{N}_t^0$,то $A_s \in \varphi_s^{-1}\mathrm{Y}_t^0$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Случайный процесс $\left(W', \mathrm{N}^0, \mathrm{N}^0_{t+}, Y'_t, \varphi'_t, P'_{x'}\right)$, $t \ge 0$, является сторого марковским процессом.

Доказательство. Проверим, что функция $P'_{x'}(Y'_h \in B')$ (при фиксированных $h \ge 0$, $B' \in \mathrm{B}'$) является B'-измеримой по x'. Сначала проверим это для множеств $B' = \Gamma \times B$, $\Gamma \in \mathrm{B}[0,\infty)$, $B \in \mathrm{B}$ порождающих σ-алгебру B'

$$P'(s,x)(Y'_h \in \Gamma \times B) = \hat{P}_{(s,x)}(w : (s+h, Y_{s+h}(w)) \in \Gamma \times B) =$$

$$= I_{(s+h \in \Gamma)} \cdot \hat{P}_{(s,x)}(Y_{s+h} \in B) = I_{(s+h \in \Gamma)} \cdot P_x(X_h \in B) \sim \mathrm{B}'.$$

Рассмотрим теперь систему всех множеств B', $B' \in \mathrm{B}'$, для которых $P'_{x'}(Y'_h \in B')$ является B'-измеримой по x'. Легко проверить, что эта система удовлетворяет всем требованиям теоремы о монотонных классах, следовательно она совпадает с σ-алгеброй B'.

Теперь нужно проверить строго марковое свойство:

$$E'_{x'}\left[f'(Y'_{\tau'+h}) \cdot I_{(\tau'<\infty)}\right] = E'_{Y'_{\tau'}}\left[f(Y'_h) \cdot I_{(\tau'<\infty)}\right], \tag{20}$$

где $f'(x')$ – произвольная ограниченная B'-измеримая фунцкия, а τ' – произвольный N^0_{t+}-марковский момент. Но это свойство легко проверяется опять по теореме о монотонных классах. Лемма 2 доказана.

Произведем сейчас пополнение σ-алгебр N^0, N^0_t по системе мер $P'_{\mu'}$ (см. [2, гл. I]), обозначая их через N', N'_t и установим следующий основной факт.

Лемма 3. *Случайный процесс* $Y' = \left(\mathrm{W}', \mathrm{N}', \mathrm{N}'_t, Y'_t, \varphi'_t, P'_{x'}\right)$ *является стандартным марковским процессом в фазовом пространстве* $(\mathrm{E}', \mathrm{B}')$.

Доказательство. Так как процесс Y'_t является марковским относительно N^0_{t+}, из предложения 8.12 гл. I из [2] получаем, что $\mathrm{N}'_t = \mathrm{N}'_{t+}$. Траектории процесса Y' очевидно являются непрерывными справа и имеющими пределы слева, так как таковыми были траектории процесса Y. Поскольку строго марковские свойства (20) имело место для произвольного N^0_{t+}-марковского момента τ', то по предложению 7.3 гл. I из [2] оно останется в силе и для произвольного N'_t-марковского момента τ'. Теперь следует проверить квазинепрерывность слева процесса Y':

для всякой неубывающей последовательности N'_t-марковских моментов $\tau'_n \uparrow \tau'$ должно быть

$$P'_{x'}\left(\tau' < \infty, Y'_{\tau'_n} \not\to Y'_{\tau'}\right) = 0\,. \tag{22}$$

Проверим (22) сначала для N^0_{t+}-марковских моментов. Имеем $(x' = (s,x))$

$$P'_{x'}\left(\tau' < \infty, Y'_{\tau'_n} \not\to Y'_{\tau'}\right) = \hat{P}_{(s,x)}\left(\tau' < \infty, Y'_{\tau'_n}(s,w) \not\to Y'_{\tau'}(s,w)\right) =$$

$$= \hat{P}_{(s,x)}\left(\tau' < \infty, \left(s + \tau'_n, Y_{s+\tau'_n}(w)\right) \not\to \left(s + \tau', Y_{s+\tau'}(w)\right)\right).$$

Как и при доказательстве предыдущей леммы воспользуемся представлением

$$\tau'_n(s,w) = \hat{\tau}_n(\varphi_s w), \qquad \tau'(s,w) = \hat{\tau}(\varphi_s w),$$

где τ'_n, $\hat{\tau}$ являются Y^0_{t+}-марковскими моментами, причем легко видеть, что $\hat{\tau}_n \uparrow \hat{\tau}$. Будем иметь

$$P'_{(s,x)}\left(\tau' < \infty, Y'_{\tau'_n} \not\to Y'_{\tau'}\right) = \hat{P}_x\left(\hat{\tau} < \infty, (s + \hat{\tau}_n, Y_{\hat{\tau}n}) \not\to (s + \hat{\tau}, Y_{\hat{\tau}})\right).$$

Теперь если ввести обозначения $\tau_n(\omega) \equiv \hat{\tau}_n(\pi\omega)$, $\tau(\omega) \equiv \hat{\tau}(\pi\omega)$, то τ_n, τ окажутся F^0_{t+}-марковскими моментами, $\tau_n \uparrow \tau$ и последняя вероятность перепищется в следующем виде

$$P_x\left(\tau < \infty, \left(s + \tau_n, X_{\tau_n}\right) \not\to (s + \tau, X_\tau)\right).$$

Эта вероятность очевидно равна нулю, так как по предложению процесс X – квазинепрерывный слева.

Осталось соотношение (22) проверить для N_t'-марковских моментов. Опять по предложению 7.3 гл. I из [2] для фиксированного x' и произвольных N_t'-марковских моментов $\tau_n' \uparrow \tau'$ найдутся N_{t+}^0-марковские моменты σ_n', σ' такие, что

$$P_{x'}'(\tau_n' = \sigma_n', \tau' = \sigma') = 1.$$

Рассмотрим последовательность N_{t+}^0-марковских моментов $\tilde{\sigma}_n' = \max(\sigma_1', \ldots, \sigma_n')$ и предел обозначим через $\tilde{\sigma}'$. Будем иметь

$$P_{x'}'\left(\tilde{\sigma}' < \infty, Y_{\tilde{\sigma}_n}' \not\to Y_{\tilde{\sigma}'}'\right) = 0$$

Но очевидно, что

$$P'(\tau_n' = \tilde{\sigma}_n', \tau' = \tilde{\sigma}') = 1,$$

следовательно,

$$P_{x'}'\left(\tau' < \infty, Y_{\tau_n'}' \not\to Y_{\tau'}'\right) = 0.$$

Лемма 3 доказана.

3. Вспомогательные утверждения

Для каждого $n = 1,2,\ldots$ введем следующие обозначения

$$Q_n g(x) = \max\left\{g(x), E_x g\left(X_{2^{-n},T}\right)\right\},$$
$$\sigma_n = \min\left\{k \cdot 2^{-n} \cdot T,\ k = 0,1,\ldots,2^n - 1:\ X_{k \cdot 2^{-n} \cdot T} \in B_k^n\right\}, \tag{23}$$

где множества $B_0^n, B_1^n, \ldots, B_{2^n-1}^n$ принадлежат σ-алгебре B, причем $B_{2^n-1}^n = E$. $Q_n^k g(x)$ будет обозначать k-ую степень оператора Q_n.

Лемма 4. *Имеют место следующие соотношения*

$$s(T,x) = \sup_{\tau<T} E_x g(X_t) = \lim_n \uparrow Q_u^{2^u-1} g(x), \tag{24}$$

причем

$$Q_u^{2^u-1} g(x) = E_x g\left(X_{\sigma_n}\right), \tag{25}$$

где моменты остановки σ_n *являются указанными выше типа* (23).

Доказательство. Пусть τ является M_t-моментом остановки таким, что $\tau(w) \le T$. Рассмотрим последовательность моментов остановки $\tau_n = \min\left(\tau, T - \dfrac{1}{n}\right)$. Имеем

$$g(X_\tau) \cdot I_{(\tau<T)} + \varliminf_{t\uparrow T} g(X_t) \cdot I_{(\tau=T)} \le \varliminf_n g\left(X_{\tau_n}\right)$$

Отсюда по лемме Фату получаем

$$E_x\left[g(X_\tau) \cdot I_{(\tau<T)} + \varliminf_{t\uparrow T} g(X_t) \cdot I_{(\tau=T)}\right] \le \varliminf_n E_x g\left(X_{\tau_n}\right)$$

Так как обратное неравенство очевидно, то имеет место совпадение этих выражений.

Возьмем теперь произвольный M_t-момент остановки τ такой, что $\tau(\omega) < T$. Для него построим последовательность моментов остановок $(n = 1,2,\ldots)$

$$\tau_n = \begin{cases} k \cdot 2^{-n} \cdot T, & \text{если} \quad (k-1) \cdot 2^{-n} T \le \tau < k \cdot 2^{-n} \cdot T, \quad k = 1,2,\ldots,2^n - 2, \\ (2^n - 1) \cdot 2^{-n} \cdot T, & \text{если} \quad \tau \ge (2^n - 2) \cdot 2^{-n} \cdot T. \end{cases}$$

Понятно, что начиная с некоторого $n(\omega)$ последовательность τ_n является убывающей, причем $\tau_n \downarrow \tau$. Отсюда принимая во внимание тот факт, что процесс $g(X_t)$ имеет $(P_x$-п.н. для каждого непрерывные справа траектории, получаем

$$g(X_\tau) = \lim_n g(X_{\tau_n}) \quad (P_x - \text{п.н.}).$$

Значит по лемме Фату имеем

$$E_x g(X_\tau) \le \underline{\lim}_n E_x g(X_{\tau_n}).$$

Теперь если клас всех M_t-моментов остановки, принимающих все значения из конечного множества $0, 2^{-n}\cdot T, \ldots, (2^n - 1)\cdot 2^{-n}\cdot T$ обозначить через M_T^n, то из предыдущего неравенства вытекает, что

$$s(T,x) = \sup_{\tau\in\bigcup_n \mathsf{M}_T^n} E_x g(X_\tau) = \lim_n \uparrow \sup_{\tau\in \mathsf{M}_T^n} E_x g(X_\tau).$$

Воспользуемся сейчас теоремой 1, § 2, гл. II, из [1], откуда получаем

$$\sup_{\tau\in \mathsf{M}_T^n} E_x g(X_\tau) = Q_u^{2^u - 1} g(x) = E_x g(X_{\sigma_n}),$$

где моменты остановки σ_n являются моментами типа (23). Доказательство леммы 4 завершено.

Рассмотрим теперь задачу оптимальной остановки стандартного марковского процесса $Y' = (\mathsf{W}', \mathsf{N}', \mathsf{N}'_t, Y'_t, \varphi'_t, P'_{x'})$, $t \ge 0$ $(x' = (s,x))$, с функцией выйгрыша

$$G'(T,x') \equiv G(T,s,x) = g(x)\cdot I_{(s<T)} + (-A)\cdot I_{(s\ge T)}, \tag{26}$$

$$s'(T,x') = \sup_{\tau'} E'_x G'(T, Y'_{\tau'}), \tag{27}$$

где супремум берется по всем N'_t-моментам остановки τ' (т.е. требуется, что $P'_{x'}(\tau' < \infty) = 1$ для любого $x' \in E'$).

Так как функция $G(T,s,x)$ является непрерывной справа по s, а функция $g(x)$ предполагается C_0-непрерывной, то легко проверить, что функция $G'(T,x')$ тоже C_0-непрерывна относительно процесса Y'. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Для произвольного* N'_t*-момента остановки* τ' *и для фиксированного* $x' = (s,x)$ *найдется* F^0_{t+}*-момент остановки* τ *такой, что*

$$E'_{x'} G'(T, Y'_{\tau'}) = E_x G(T, s+\tau, X_\tau). \tag{28}$$

Доказательство. Можно сразу считать, что τ' – N^0_{t+}-моменты остановки, так как по предложению 7.3 гл. I из [2] для каждой фиксированной $x' = (s,x)$ всегда найдется N^0_{t+}-марковский момент $\tilde{\tau}'$ такой, что $P'_{x'}(\tau' = \tilde{\tau}') = 1$.

Имеем

$$E'_{x'} G'(T, Y'_{\tau'}) = \hat{E}_{(s,x)} G'(T, Y'_{\tau'(s,w)}(s,w)) = \hat{E}_{(s,x)} G(T, s+\tau', Y_{s+\tau'}(w)),$$

где $\tau' = \tau'(s,w)$ можно записать следующим образом (см. доказательство леммы 2)

$$\tau'(s,w) = \hat{\tau}(\varphi_s w),$$

где $\hat{\tau}(s)$ – Y^0_{t+}-момент остановки (для фиксированного x, $P'_x(\hat{\tau} < \infty) = 1$). Подставим это выражение в предыдущее соотношение и воспользуемся формулой (14), будем иметь

$$E'_{x'} G'(T, Y'_{\tau'}) = \hat{E}_x G(T, s+\hat{\tau}, Y_{\hat{\tau}}).$$

Обозначим теперь $\tau(\omega) = \hat{\tau}(\pi\omega)$, тогда τ окажется F^0_{t+}-моментом остановки $(P_x(\tau < \infty) = 1$ для того же самого $x)$ и мы получим

$$E'_{x'}G'(T,Y'_{\tau'}) = E_x G(T, s+\tau, Y_\tau).$$

Лемма 5 доказана.

4. Основные результаты

Теорема 1. *Имеет место следующее соотношение* $(x' = (s,x))$

$$s'(T,x') = \begin{cases} s(T-s,x), & \textit{при} \quad s < T, \\ -A, & \textit{при} \quad s \geq T, \quad 0 < A < \infty. \end{cases} \tag{29}$$

Доказательство. Возьмем произвольный N'_t-момент остановки τ'. По лемме 5 будем иметь

$$E'_{x'}G'(T,Y'_{\tau'}) = E_x G(T, s+\tau, X_\tau) = E_x\left[g(X_\tau)\cdot I_{(\tau<T-s)} + (-A)\cdot I_{(\tau\geq T-s)}\right].$$

Предположим сначала, что $0 \leq s < T$. Рассмотрим момент остановки $\sigma = \min(\tau, T-s)$. Легко видеть, что

$$E_x\left[g(X_\tau)\cdot I_{(\tau<T-s)} + (-A)\cdot I_{(\tau\geq T-s)}\right] \leq$$

$$\leq E_x\left[g(X_\sigma)\cdot I_{(\sigma<T-s)} + \varlimsup_{t\uparrow T-s} g(X_t)\cdot I_{(\sigma=T-s)}\right] \leq s(T-s,x).$$

Следовательно (при $s < T$),

$$s'(T,x') \leq s(T-s,x).$$

С другой стороны по лемме 4 имеем

$$s(T-s,x) = \lim_n \uparrow E_x g(X_{\sigma_n}),$$

где $\sigma_n = \min\{k\cdot 2^{-n}(T-s),\ k = 0,1,\ldots,2^n-1:\ X_{k\cdot 2^{-n}(T-s)} \in B_k^n\}$.

Определим теперь соответствующий N_t^0-момент остановки

$$\sigma'_n = \min\{k\cdot 2^{-n}(T-s),\ k = 0,1,\ldots,2^n-1:\ Y'_{k\cdot 2^{-n}(T-s)} \in [0,\infty)\times B_k^n\}.$$

Очевидно, что

$$E'_{x'}G'(T,Y'_{\sigma'_n}) = E_x G(T, s+\sigma_n, X_{\sigma_n}) =$$

$$= E_x\left[g(X_{\sigma_n})\cdot I_{(\sigma_n<T-s)} + (-A)\cdot I_{(\sigma_n\geq T-s)}\right] = E_x g(X_{\sigma_n}),$$

так как $\sigma_n < T-s$.

Таким образом получаем неравенство

$$s(T-s,x) \leq s'(T,x'),$$

следовательно, и совпадение

$$s'(T,x') = s(T-s,x) \quad \text{при} \quad s < T.$$

При $s \geq T$ равенство $s'(T,x') = -A$ проверяется тривиальным образом. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть почти борелевская, C_0-непрерывная функция удовлетворяет условию*

$$g(x) \geq -A, \quad 0 < A < \infty,$$

$$E_x \sup_{0\leq t<T} \max(0, g(X_t)) < \infty, \quad x \in \mathrm{E}.$$

Тогда момент остановки τ_ε такой, что

$$\tau_\varepsilon = \begin{cases} \inf\{0 \leq t < T:\ s(T-t, X_t(\omega)) \leq g(X_t(\omega)) + \varepsilon\}, \\ T, \quad \textit{если нет такого } t < T, \end{cases}$$

является ε-оптимальным моментом остановки для любого $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Предположим, что

$$E_x \sup_{0\le t<T} \max(0, g(X_t)) < \infty \quad \text{для любого} \quad x \in \mathrm{E}.$$

Покажем, что тогда для произвольного $x' = (s, x)$

$$E'_{x'} \sup_{t\ge 0} \max(0, G'(T, Y'_t)) < \infty\,. \tag{30}$$

В самом деле

$$G'(T, Y'_t(s,w)) = G(T, s+t, Y_{s+t}(w)) = \\ = g\left(Y_{s+t}(w) \cdot I_{(s+t<T)} + (-A) \cdot I_{(s+t\ge T)}\right),$$

таким образом (для $w' = (s, w)$)

$$\sup_{t\ge 0} \max(0, G'(T, Y'_t)) \le \sup_{t<T} \max(0, g(Y_{s+1}(w))).$$

Следовательно,

$$E'_{(s,x)} \sup_{t\ge 0} \max(0, G'(T, Y'_t)) \le \hat{E}_{s,x} \sup_{t<T} \max(0, g(Y_{s+t}(ww))) = \\ = E_x \sup_{t<T} \max(0, g(X_t)) < \infty.$$

Теперь мы вправе применить теорему 3, § 3 гл. III из [1] к задаче оптимальной остановки процесса Y' с функцией выйгрыша $G'(T, x')$. Из этой теоремы получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ момент

$$\tau'_\varepsilon = \inf\{t \ge 0 :\ s'(T, Y'_t) \le G'(T, Y'_t) + \varepsilon\}$$

является ε-оптимальным моментом остановки

$$E'_{x'} G'(T, Y'_{\tau'_\varepsilon}) \ge s'(T, x') - \varepsilon\,,$$

причем, очевидно, что $\tau'_\varepsilon(w') \le T$.

Будем иметь

$$E'_{(0,x)} G(T, Y'_{\tau'_\varepsilon}) = E_x G(T, \tau_\varepsilon, X_{\tau_\varepsilon}),$$

где

$$\tau_\varepsilon = \inf\{t \ge 0 :\ s'(T, t, X_t) \le G(T, t, X_t) + \varepsilon\}.$$

После применения теоремы 1 получаем

$$\tau_\varepsilon = \begin{cases} \inf\{0 \le t < T :\ s(T-t, X_t) \le g(X_t) + \varepsilon\}, & \text{если такой } t \text{ имеется,} \\ T, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

причем

$$E_x \left[g(X_{\tau_\varepsilon}) \cdot I_{(\tau_\varepsilon < T)} + (-A) \cdot I_{(\tau_\varepsilon = T)} \right] \ge s(T, x) - \varepsilon\,,$$

значит

$$E_x \left[g(X_{\tau_\varepsilon}) \cdot I_{(\tau_\varepsilon < T)} + \varliminf_{t\uparrow T} g(X_t) \cdot I_{(\tau_\varepsilon = T)} \right] \ge s(T, x) - \varepsilon\,,$$

т.е. построенный момент остановки τ_ε является ε-оптимальным.Теорема 2 доказана.

Замечание. В силу теоремы 1, § 3 гл. III из [1] функция $s'(T, x')$ является C_0-непрерывной, следовательно процесс $s'(T, Y'_t)$ имеет $P'_{x'}$-п.н. непрерывные справа траектории. Отсюда нетрудно вывести, что P_x-п.н. траектории процесса $s(T-t, X_t)$, $0 \le t < T$ – непрерывны справа.

Литература

1. Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ. *Москва*, *Наука*, 1976.
2. Blumenthal R. M., Getoor R. K., Markov processes and potential theory. *Pure and Applied Mathematics*, Vol. 29, *New York-London: Academic Press*, 1968.
3. Thompson M. E., Continuous parameter optimal stopping problems. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 1971, **19**, 302-318.
4. Babilua P., Bokuchava I., Dochviri B., Shashiashvili M., Optimal stopping problem on a finite time interval. *Bull. Georgian Acad. Sci.*, 2007, **173**, No.2, 250-253.

Статья получена: 2007-05-28