Приближенное решение уравнения магнитного пограничного слоя I рода при сильном отсосе

Дж.В. Шарикадзе

Институт прикладной математики им. И. Векуа Тбилисского государственного университета

Аннотация

В статье в первых двух приближениях найдено решение магнитного пограничного слоя первого рода при сильном отсосе жидкости из пограничного слоя. Найдено поверхностное трение на пластинке, которое растёт на величину $\frac{\nu B_w B_w'}{\mu_0 v_w}$ *по сравнению обычной гидродинамики.*

В магнитной гидродинамике наряду с вязкостью и теплопроводностью имеет место еще один ”механизм”, приводящий при определенных условиях к образованию пограничных слоев резкого изменения магнитного поля. Образование таких слоев, их иногда называют токовыми, связано с диффузией магнитного поля при конечной электропроводностью среды. Относительная скорость диффузии магнитного поля определяется магнитным числом Реинольдса $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_m}}$. При $\mathrm{Re}_m >> 1$ в потоке образуются токовые слой, характерная толщина которых суть

$$\delta_\nu \sim \frac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}_m}}, \qquad \mathrm{Re}_m = \sigma\mu_0.$$

Важным параметром, определяющим структуру уравнения пограничного слоя, является отношение

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\delta_\nu} \sim \sqrt{\frac{R_m}{R}} = \sqrt{\frac{\nu}{\nu_m}}.$$

Этот параметр существенен в тех случаях, когда токовый слой возникает вблизи поверхности тела, т.е. когда возможно образование вязкого погроничного слоя. При $\varepsilon \sim 1$ толщины вязкого и токового пограничных слоев сравнимы между собой и характерные длины всех параметров поперек слоя совпадают по порядку величины [1,2].

В этой статье мы рассмотрим случай токового или магнитного погроничного слоя первого рода, когда через поверхность тела происходит сильный отсос жидкости. Токовым пограничным слоем первого рода называются слой, образующийся при продольном оптекании плоской пластины с током, направленным перпендикулярно плоскости течения, при $\varepsilon \sim 1$ [2].

Если отсуствуют внешние по отношению к пластине источники магнитного поля, то при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_m = \infty$ существует решение задачи об обтекании пластины, содержащее разрывы скорости и магнитного поля на поверхности пластины. При $\mathrm{Re} \sim \mathrm{Re}_m >> 1$ вблизи пластины образуется вязкий токовый пограничный слой, вне которого течение остоется поступательным ($u_\infty = const$, $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$) при отсуствии магнитного поля ($\vec{B} = 0$). Так как $\varepsilon \sim 1$, то $\delta \sim \delta_j$ и $\frac{\vartheta}{u_0} \sim \frac{\delta}{L} \sim \frac{B_y}{B_x}$. Пользуясь этими оценками, из уравнений магнитной гидродинамики получают уравнения токового или магнитного пограничного слоя первого рода [1]:

$$
\begin{aligned}
& u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{\mu_0\rho}\left(B_x\frac{\partial B_x}{\partial x}+B_y\frac{\partial B_x}{\partial y}\right),\\
& u\frac{\partial B_x}{\partial x}+v\frac{\partial B_x}{\partial y}-B_x\frac{\partial u}{\partial x}-B_y\frac{\partial u}{\partial y}=\nu_m\frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2},\\
& \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\\
& \frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}=0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Граничные условия для системы (1) в случае отсоса жидкости из пограничного слоя со скоростью v_w будут иметь вид:

$$
\left.
\begin{aligned}
& u=0, \quad v=-v_w, \quad B_x=B_0(x) \quad \text{при} \quad y=0,\\
& u=u_\infty, \quad B_x=B_y=0 \qquad\qquad \text{при} \quad y\to\infty.
\end{aligned}
\right\}
\tag{2}
$$

Величина $B_0(x)$ в (2) есть заданная функция, определяемая распределением тока $i(x)$ в пластине.

Нашей задачей является нахождение приближенного решения задачи (1)-(2) при сильном отсосе жидкости из пограничного слоя.

Определим поперечные скорости и напреженность магнитного поля из граничных условий (2), тогда будем иметь:

$$
v=-v_w-\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}dy, \qquad B_y=-\int_0^y\frac{\partial B_x}{\partial x}dy.
\tag{3}
$$

Подставляя (3) в первых два уравнения системы (1), получим:

$$
\begin{aligned}
& \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+v_w\frac{\partial u}{\partial y}=u\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{1}{\mu_0\rho}\left(B_x\frac{\partial B_x}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\int_0^y\frac{\partial B_x}{\partial x}dy\right),\\
& \nu_w\frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2}+v_w\frac{\partial B_x}{\partial y}=u\frac{\partial B_x}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}dy-B_x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\int_0^y\frac{\partial B_x}{\partial x}dy.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Допустим, что коэффициенты обычной вязкости и магнитной вязкости равны $(\nu=\nu_m)$ и введем новые величины [4,5]:

$$
z=\frac{V_w}{\nu}y, \quad u(x,y)=f(x,z), \quad B_x(x,z)=\phi(x,z).
\tag{5}
$$

Подставляя (5) в (4) и граничные условия (2), получим

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{\beta^2}\left[f\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial z}\int_0^z\frac{\partial f}{\partial x}dz-\frac{1}{\mu_0\rho}\left(\Phi\frac{\partial \Phi}{\partial x}-\frac{\partial \Phi}{\partial z}\int_0^z\frac{\partial \Phi}{\partial x}dz\right)\right],\\
& \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}=\frac{1}{\beta^2}\left[f\frac{\partial \Phi}{\partial x}-\frac{\partial \Phi}{\partial z}\int_0^z\frac{\partial f}{\partial x}dz-\Phi\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\int_0^z\frac{\partial \Phi}{\partial x}dz\right],
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
& f(x,z)=0, \quad \phi(x,z)=B_0(x) \quad \textit{при} \quad z=0,\\
& f(x,z)=u_\infty, \quad \phi(x,z)=0 \quad \textit{при} \quad z\to\infty.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $\beta^2=\dfrac{V_w^2}{\nu}$. При сильном отсосе $\beta^2>>1$, а $\dfrac{1}{\beta^2}=\varepsilon$ малая величина. Поэтому будем искать решение задачи (6), (7) в виде рядов по степеням ε:

$$
f(x,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(x,z), \qquad \Phi(x,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\Phi_k(x,z)
\tag{8}
$$

Подставляя (8) в (6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε для первых двух приближениях получим следующую систему:

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} + \frac{\partial f_0}{\partial z} = 0, \qquad f_0\big|_{z=0} = 0, \qquad f_0\big|_{z=\infty} = u_\infty, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} + \frac{\partial f_1}{\partial z} = f_0 \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial f_0}{\partial z}\int_0^z \frac{\partial f_0}{\partial x} dz - \frac{1}{\mu_0 \beta}\left[\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\int_0^z \frac{\partial \Phi}{\partial x} dz\right],$$
$$f_1\big|_{z=0} = 0, \qquad f_1\big|_{z=\infty} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = 0, \qquad \Phi_0\big|_{z=0} = B(x), \qquad \Phi_0\big|_{z=\infty} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = f_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}\int_0^z \frac{\partial f}{\partial x} dz - \Phi_0 \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial z}\int_0^z \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} dz$$
$$\Phi_1\big|_{z=0} = 0, \qquad \Phi_1\big|_{z=\infty} = 0 \tag{12}$$

Решения задачи (9) и (11) суть:

$$f_0(x,z) = u_\infty\left(1 - e^{-z}\right), \qquad u_\infty = const, \tag{13}$$

$$\Phi_0(x,z) = B_w(x) e^{-z}. \tag{14}$$

Задачи (10) и (12), после подстановки (13) и (14) примут вид:

$$f_1^{''} + f_1^{'} = -\frac{B_w B_w^{'}}{\mu_0 \rho} e^{-z}, \qquad B_w^{'} = \frac{dB_w}{dx}; \qquad f_1\big|_{z=0} = 0, \qquad f_1\big|_{z=\infty} = 0, \tag{15}$$

$$\Phi_1^{''} + \Phi_1^{'} = 2u_w B_w^{'}\left(e^{-z} - e^{-2z}\right), \qquad \Phi_1\big|_{z=0} = 0, \qquad \Phi_1\big|_{z=\infty} = 0. \tag{16}$$

Решения задачи (15) и (16) имеют вид:

$$f_1(x,z) = \frac{B_w B_w^{'}}{\mu_0 \rho} z e^{-z},$$

$$\Phi_1(x,z) = u_\infty B_w^{'}\left[(1-2z)e^{-z} - e^{-2z}\right].$$

Таким образом, решение задачи при двух первих приближениях имеют вид:

$$f(x,z) \approx f_0(x,z) + \varepsilon f_1(x,z) = u_\infty(1 - e^{-z}) + \varepsilon \frac{B_w B_w^{'}}{\mu_0 \rho} z e^{-z},$$

$$\Phi(x,z) \approx \Phi_0(x,z) + \varepsilon \Phi_1(x,z) = B_w(x) e^{-z} + \varepsilon u_w B_w^{'}\left[(1-2z)e^{-z} - e^{-2z}\right].$$

Эти формулы дают возможность легко определить все физические характеристики магнитного пограничного слоя первого рода при сильном отсосе.

Поверхностное трение на пористой пластинке выражается формулой

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \rho v_w \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \rho v_w u_\infty + \varepsilon \frac{v_w B_w B_w^{'}}{\mu_0} = \rho v_w u_\infty + \frac{\nu B_w B_w^{'}}{\mu_0 v_w}$$

Отсюда видно, что поверхностное трение на пластинке увеличивается на величину $\frac{\nu B_w B_w^{'}}{\mu_0 v_w}$, по сравнению классической гидродинамики [6] .

Литература

1. А.Б. Ватажин, Г.А. Любимов, С.А. Регирер. Магнитогидродинамические течения в каналах. "Наука", М., 1970.
2. В.Н. Жигулев. Теория магнитного пограничного слоя. ДАН СССР, т. 124, № 5, 1959.
3. E.J. Watson. The asymptotic theory of boundary layer flow with suction. Reports and Memoranda, 2610, 1947.
4. J.V. Sharikadze. Solution of boundary layer equations of conducting fluid with strong suction. Reports of Enlarged Sesion of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics. v. 16, № 1, 2001.
5. J.V. Sharikadze. Folkner-Skan problems for conducting fluid with strong suction. Transactions of International conference "The problems of continium mechanics". Tbilisi, State Tecnical University, 2007.
6. Г.Шлихтинг. Теория пограничного слоя. "Наука". М., 1969.

Статья получена: 2007-05-30