УДК 519.642

О некоторых вычислительных схемах для приближенного решения интегральных уравнений задач плоской теории упругости

Саникидзе Джемал Гуриевич
Институт вычислительной математики им.Н.И.Мусхелишвили
Грузия, Тбилиси, 0193, ул. Акурская,8

Аннотация

Излагается определенная приближенная схема для численного решения первой и второй основных задач плоской теории упругости для областей с произвольными ляпуновскими контурами. Конструирование соответствующего вычислительного алгоритма главным образом основано на методе аппроксимации сингулярных интегралов с ядром Коши. Дана априорная оценка погрешности аппроксимации и схема обоснования процесса. Реализация данного алгоритма может быть в одинаковой степени осуществлена как при непрерывном, так и дискретном задании исходных данных.

Ключевые слова: *упругость, вычислительная схема, аппроксимация, сингулярный интеграл, оценка, обоснование.*

Среди широко применяемых методов исследования различного рода граничных задач следует, по-видимому, отметить метод интегральных уравнений. Упомянутый метод, называющийся в современной литературе методом граничных интегральных уравнений, часто оказывается в значительной мере эффективным как средство не только теоретического исследования, но и численного решения различных граничных задач. Среди определенных известных достоинств этого метода в первую очередь следовало бы упомянуть присущую ему способность понижения размерности исходной задачи.

В настоящей заметке мы останавливаемся о некоторых аспектах применения интегральных уравнений к численному решению некоторых основных задач плоской теории упругости. Отметим, в связи с этим, что наряду с определенным самостоятельтным интересом, плоские задачи представляют также интерес с точки зрения того, что к ним могут быть сведены некоторые отдельные задачи трехмерной упругости, а также, задачи пластичности. Тем не менее, построение и исследование эффективно реализуемых вычислительных алгоритмов, гарантирующих при этом более менее высокую априорную точность, до сих пор остается актуальной задачей.

Нижеследующие рассмотрения в этом направлении относятся, в частности, к хорошо известным в литературе уравнениям Шермана-Лауричела (см., напр., [1-2]) первой и второй основных задач плоской теории упругости. Ввиду значительной аналогии этих задач с точки зрения изложенных здесь рассмотрений мы основное внимание будем сосредотачивать на первой основной задаче.

Вычислительная схема для численного решения упомянутой задачи, рассматриваемая в данной заметке, является определенной модификацией полученной ранее схемы, разработанной автором (вместе с соавторами) и оформленной в виде пакета прикладных программ (см. [3]).

Будем считать, что рассматривается конечная односвязная область (в дальнейшем его будем обозначать через D) с границей L, охватывающей начало координат внутри себя.

Основным объектом нижеследующих рассмотрений, согласно сказанному выше, для нас является интегральное уравнение

$$\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(t)d\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi}(t)d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}+\frac{1}{\pi i}\left(\frac{1}{t_0}-\frac{1}{\bar t_0}+\frac{t_0}{\bar t_0^2}\right)\mathrm{Re}\int_L \frac{\varphi(t)}{t^2}dt=f(t_0). \qquad (1)$$

Оно отличается от упомянутого выше уравнения Шермана-Лауричела в исходной его форме лишь последним слагаемым в левой части. Введение указанного слагаемого обеспечивает однозначную разрешимость полученного в результате уравнения (1), причем его решение удовлетворяет исходному уравнению Шермана-Лауричела (в общем случае не разрешимому ─ см., напр., [2]) при тех правых частях $f(t_0)$, для которых соответствующая задача теории упругости разрешима. Напоминая, что здесь рассматривается первая основная задача, правая часть $f(t_0)$ в уравнении (1) представляет функцию, известным образом определяемую (см. [1-2]) через компоненты вектора внешних напряжений. Заметим, что применением преобразования $t-t_0=re^{i\vartheta}$ ($r=|t-t_0|,\vartheta=\arg(t-t_0)$) уравнение (1) может быть записано в виде системы двух уравнений относительно $\mathrm{Re}\varphi$ и $\mathrm{Im}\varphi$.

Тем не менее, наиболее эффективным с точки зрения численного решения уравнений вида (1), по-видимому, следовало бы считать представление уравнения (1) через сингулярные интегралы с ядром Коши. Именно, в дальнейшем мы будем рассматривать уравнение (1) записанным в виде

$$(K\varphi)(t_0)\equiv\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi}(t)\overline{dt}}{t-t_0}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{h(t_0,t)}}{t-t_0}\varphi(t)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\left(\frac{1}{t_0}-\frac{1}{\bar t_0}+\frac{t_0}{\bar t_0^2}\right)\mathrm{Re}\int_L \frac{\varphi(t)}{t^2}dt=f(t_0) \qquad (2)$$

(подразумевая соответствующие сингулярные интегралы рассматриваемыми в смысле их главных значений), при этом

$$h(t_0,t)=\frac{d\bar t}{dt}-\frac{\bar t-\bar t_0}{t-t_0}\quad (t\neq t_0),\quad h(t_0,t_0)=0.$$

Возможность построения в известном смысле эффективно реализуемой схемы, гарантирующей более-менее хорошую аппроксимацию рассматриваемого граничного интегрального уравнения (2), определяется, в первую очередь, надлежащим выбором квадратурных формул для сингулярных интегралов в (2). В упомянутой в [3] работе для этой цели применялись указанные в [4] квадратурные формулы для сингулярных интегралов. Отметим здесь, что в предположении одной лишь гладкости контура L в рассматриваемых здесь сингулярных интегралах порядок точности соответствующих квадратурных формул по указанным в [4] оценкам зависит лишь от степени точности применяемой там аппроксимации плотности $\varphi(t)$ и дифференциальных свойств последней. То же самое относится к регулярному интегралу $\int_L \frac{\varphi(t)}{t^2}dt$, к аппрроксимации которого может быть применена обычная квадратурная формула.

В связи с учетом указанного обстоятельства применительно к уравнению (2) отметим, что хотя в общем случае дифференциальные свойства искомого решения $\varphi(t)$ и зависят от аналогичных свойств исходных данных (степени гладкости контура L и правой части f), тем не менее, в отдельных случаях гладкость решения $\varphi(t)$ может оказаться более высокой. Исходя из этого, представляет определенный интерес рассмотрение таких схем аппроксимации исходного граничного интегрального уравнения, в которых главная часть в оценке точности приближения обусловлена исключительно точностью аппроксимации искомого решения для возможно широких классов контуров L. Рассматривая ниже этот вопрос, мы всюду далее будем принимать предположение, что L представляет ляпуновский контур с заданным показателем μ $(0<\mu\le 1)$. Отметим также, что наряду с этим вопросом в данных здесь рассмотрениях определенное внимание уделяется вопросу обоснования полученных на упомянутой выше основе вычислительных схем для уравнений вида (2).

Согласно сказанному выше относительно сингулярных интегралов и регулярного интеграла от функции $\varphi(t)/t^2$, с указанной выше точки зрения в уравнении (2) рассмотрению подлежит вопрос аппроксимации интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{h(t_0,t)}{t-t_0}\varphi(t)dt\,.$$

Отметим, что в отмеченной в [3] работе указанный интеграл вычислялся приближенно как интеграл с сингулярным ядром через значения функции $h(t_0,t)\ \varphi(t)$, причем для вычисления значений производной $d\overline{t}/dt$ применялась определенная (пятиточечная) формула численного дифференцирования (построенная по значениям функции $\overline{t}=\overline{t}\,(t)$ в узлах, используемых в [4] для приближенного вычисления сингулдярных (а также регулярного) интегралов.

В данном случае, воспользовавшись тем же самим, что и в [4], разбиением контура L, приближенное вычисление рассматриваемого интеграла будем основывать на указанном в [4] же приближении плотности $\varphi(t)$ (рассматривая, тем самым выражение

$$\frac{d\overline{t}}{dt}-\frac{\overline{t}-\overline{t}_0}{t-t_0}$$

как бы в качестве весовой функции):

$$\varphi(t)\approx\varphi(t_0)+(t-t_0)\left\{l_{\nu\sigma}(t)\frac{\varphi(\tau_{\nu+\sigma})-L_{n\nu}(\varphi;t_0)}{\tau_{\nu+\sigma}-t_0}+l_{\nu\,\sigma+1}(t)\frac{\varphi(\tau_{\nu+\sigma+1})-L_{n\nu}(\varphi;t_0)}{\tau_{\nu+\sigma+1}-t_0}\right\}, \qquad (3)$$

$t_0\in\tau_\nu\tau_{\nu+1}$, $\ t\in\tau_{\nu+\sigma}\tau_{\nu+\sigma+1}$ $\ (0\le\nu,\sigma\le n-1;\, n>2)$, где $l_{\nu\sigma}(t)=\dfrac{t-\tau_{\nu+\sigma+1}}{\tau_{\nu+\sigma}-\tau_{\nu+\sigma+1}}$, $\ l_{\nu\,\sigma+1}(t)=\dfrac{t-\tau_{\nu+\sigma}}{\tau_{\nu+\sigma+1}-\tau_{\nu+\sigma}}$,

$L_{n\nu}(\varphi;t_0)=\dfrac{t_0-\tau_{\nu+1}}{\tau_\nu-\tau_{\nu+1}}\varphi(\tau_\nu)+\dfrac{t_0-\tau_\nu}{\tau_{\nu+1}-\tau_\nu}\varphi(\tau_{\nu+1})$, причем отношения в правой части (3) при σ таких, что знаменатели соответствующих отношений обращаются в нуль, имеют легковычисляемые конечные пределы. Здесь, как и всюду ниже, под $\tau_{\nu+\sigma}\tau_{\nu+\sigma+1}$ подразумевается кратчайшая дуга контура L с концами $\tau_{\nu+\sigma}$, $\tau_{\nu+\sigma+1}$ (расположенными по выбранному на L положительному направлению).

Очевидно, что реализация полученной на указанной основе квадратурной формулы в конечном счете сводится к вычислению интегралов выда

$$\int\limits_{\tau_{\nu+\sigma}\tau_{\nu+\sigma+1}} l_{\nu j}(t)\left[\frac{d\overline{t}}{dt}-\frac{\overline{t}-\overline{t}_0}{t-t_0}\right]dt \quad (\sigma,\nu=0,...,n-1;\ j=\sigma,\sigma+1)\,. \qquad (4)$$

Прежде чем заняться этим, отметим, что для порядка точности указанной (основанной на (3)) аппроксимации при надлежащей гладкости функции φ согласно [4] получается оценка $O\left(n^{-2}\ln n\right)$ (при возможности утверждения более высокой гладкости $\varphi(t)$ порядок точности может быть увеличен применением из [4] формул вида (3) более высокой точности).

Возвращаясь теперь к интегралу (4), преобразуем его к виду (ограничиваясь для определенности случаем $j=\sigma$)

$$-\overline{t}\,(\tau_{\nu+\sigma})-\int\limits_{\tau_{\nu+\sigma}\tau_{\nu+\sigma+1}} l'_{\nu\sigma}(t)\overline{t}\,(t)dt \quad -\int\limits_{\tau_{\nu+\sigma}\tau_{\nu+\sigma+1}} l_{\nu\sigma}(t)\frac{\overline{t}-\overline{t}_0}{t-t_0}dt \quad . \qquad (5)$$

Для приближенного вычисления последних интегралов введем на каждой из дуг $\tau_{\nu+\sigma}\tau_{\nu+\sigma+1}$ узлы $\{t_{\nu\lambda}\}$, разбивающие соответствующую дугу на N $(N>n)$ равных*) по длине дуг, где N

*) Однако, аналогично тому, как было замечено в [4], соответствующие результаты остаются справедливыми и при несколько более общих способах разбиения.

подразумевается настолько бóльшим n, насколько это потребуется в дальнейшем для получения нужных для нас оценок. Естественно, при этом, связывать N с n тем или иным образом, соответствующим точности применяемых конкретных квадратурных формул для остальных интегралов в уравнении (2).

Теперь к первому интегралу в (5) применим квадратурную формулу, которая получается применением к функции $\overline{t}(t)$ на каждой частичной дуге контура $\tau_{\nu+\sigma}\tau_{\nu+\sigma+1}$ линейной интерполяции по значениям $\overline{t}(t)$ в концах рассматриваемых частичных дуг. Коэффициенты такой квадратурной формулы, очевидно, вычисляются элементарно. С учетом принятого предположения относительно границы L и очевидной оценки производной $l_{\nu\sigma}^{'}(t)$, для остаточного члена соответствующей квадратурной формулы мы получим оценку $O\left(nN^{-1-\mu}\right)$ (выполняющегося равномерно относительно ν и σ), где, напоминаем, μ — показатель ляпуновости линии L. Что касается второго интеграла в (5), то для его приближенного вычисления будем аппроксимировать функцию $\dfrac{\overline{t}-\overline{t}_0}{t-t_0}$ согласно формуле вида (3) (с использованием при этом узлов $\{t_{\nu\lambda}\}$), подразумевая в последней вместо $\varphi(t)$ функцию $\overline{t}(t)$. Аналогично тому, как выше, можно проследить, что соответствующий остаточный член имеет в данном случае оценку $O\left(N^{-1-\mu}\ln n\right)$.

Рассматриваемый здесь окончательный процесс конструирования вычислительной схемы, как уже упомимналось выше, заключается в применении определенных квадратурных формул для сингулярных интегралов в уравнении (2) (и соответствующим образом подобранной обычной квадратурной формулы для регулярного интеграла $\int_L \frac{\varphi(t)}{t^2}dt$). Отметим, что в упомянутой в [3] работе для аппроксимации сингулярных интегралов применялась квадратурная формула из [4], имеющая точность $O\left(n^{-4}\ln n\right)$. В данном случае мы ради простоты дальнейших рассмотрений воспользуемся более простыми квадратурными формулами для сингулярных интегралов (основанных в [4] на приближении плотности $\varphi(t)$ по приведенной здесь формуле (4)). В частности,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt \approx \frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2}\left\{\left(p_{\nu-1}+2p_\nu+p_{\nu+1}\right)\frac{\varphi(\tau_{\nu+1})-\varphi(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+1}-\tau_\nu}+\sum_{\sigma=1}^{n-2}\left(p_{\nu+\sigma}+p_{\nu+\sigma+1}\right)\frac{\varphi(\tau_{\nu+\sigma+1})-\varphi(t_0)}{\tau_{\nu+\sigma+1}-t_0}\right\}$$
$$\left(t_0\in\tau_\nu\tau_{\nu+1},\ \nu=1,2,...,n\right), \qquad (6)$$

где $p_j=\dfrac{\tau_{j+1}-\tau_j}{2\pi i}$ для соответствующих j. Для функций φ с производной, удовлетворяющей на L условию Гельдера с некоторым показателем α $(0<\alpha\le 1)$ остаточный член указанной квадратурной формулы имеет оценку $O\left(n^{-1-\alpha}\ln n\right)$. К указанному же выше регулярному интегралу применим обычную квадратурную формулу (с теми же узлами и коэффициентами), доставляющую для функций указанного класса порядок приближения $O\left(n^{-1-\alpha}\right)$:

$$\int_L \frac{\varphi(t)}{t^2}dt \approx \pi i\left\{\left(p_{\nu-1}+p_\nu\right)\frac{\varphi(\tau_\nu)}{\tau_\nu^2}+\left(p_\nu+p_{\nu+1}\right)\frac{\varphi(\tau_{\nu+1})}{\tau_{\nu+1}^2}+\right.$$
$$\left.+\sum_{\sigma=1}^{n-2}\left(p_{\nu+\sigma}+p_{\nu+\sigma+1}\right)\frac{\varphi(\tau_{\nu+\sigma+1})}{\tau_{\nu+\sigma+1}^2}\right\}.$$

В результате мы оператор-функцию $(K\varphi)(t_0)$ в уравнении (2) заменим выражением

$$(K_n\varphi)(t_0)=\varphi(t_0)+(Q_n\varphi)(t_0)-(Q_n^*\varphi)(t_0)-(H_n\varphi)(t_0)+(G_n\varphi_n)(t_0),$$

где $(Q_n\varphi)(t_0)$ обозначает сумму в фигурных скобках с множителем $1/2$ в (6), а $(Q_n^*\varphi)(t_0)$ — аналогичную сумму, полученную из Q_n в результате замены коэффициентов p_j через $p_j^* = \dfrac{\overline{\tau}_{j+1} - \overline{\tau}_j}{2\pi i}$; $(H_n\varphi)(t_0)$ представляет выражение, осуществляющее приближение в целом интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{h(t_0,t)}{t-t_0}\varphi(t)dt\,. \qquad (7)$$

по указанной выше схеме; $(G_n\varphi)(t_0)$ обозначает квадратурную сумму, соответствующую $1/\pi i\left(1/t_0 - 1/\overline{t}_0 + t_0/\overline{t}_0^{\,2}\right)\mathrm{Re}\int_L \varphi(t)/t^2\, dt$. Аналогичные схемы более высоких степеней точности могут быть получены, исходя из [4], использованием более точных формул для сингулярных (а также формул соответствующей точности для регулярных) интегралов и интегралов вида (7). Согласно уже отмеченному выше, точность аппроксимации оператор-функции $(K\varphi)(t_0)$ выражением $(K_n\varphi)(t_0)$ в пределах точности применяемых квадратурных формул и принятом предположении относительно границы L в полной мере определяется одними структурными свойствами функции $\varphi(t)$.

В результате численное решение исходного уравнения $(K\varphi)(t_0) = f$ заключается в решении построенного указанным образом функционального уравнения

$$(K_n\varphi_n)(t_0) = f(t_0)\,, \qquad (8)$$

что, очевидно, в конечном счете сводится к решению определенной линейной алгебраической системы относительно искомых (приближенных) значений функции $\varphi(t)$ в узлах. Проследив за структурой зависимости от узлов коэффициентов построенных на такой основе систем, метод аппроксимации сингулярных интегралов можно, по-видимому, рассматривать, как один из наиболее удобно реализуемый метод численного решения граничных интегральных уравнений ряда классов задач. С другой стороны, следует при этом отметить, что обоснование основанных на таком методе вычислительных схем обычно оказывается затруднительным. Основной причиной для этого является то обстоятельство, что в таких схемах не утверждается, как правило, близость по норме заданного и аппроксимирующего операторов в надлежащих функциональных пространствах. В результате этого не оказываются применимыми известные общефункциональные подходы. В частности, из-за такого рода обстоятельств не состоялось возможным обоснование упомянутых выше в заметке [3] вычислительных алгоритмов для численного решения рассматриваемых в соответствующем пакете задач теории упругости а, также, рассматриваемых там же определенных других граничных задач (скажем, ряда конкретных задач теории гармонических функций).

Из сказанного выше следует, что изучение возможности обоснования той или иной конкретной такого рода приближенной схемы главным образом может быть основано на изучении индивидуальных свойств построенных аппроксимирующих операторов. Применением определенных таких подходов в работах [5-7] были обоснованы аналогичные схемы по методу аппроксимации сингулярных интегралов для численного решения задачи Дирихле в случае односвязных конечных и бесконечных областей, а также видоизмененной задачи Дирихле (см.[8]) для конечных многосвязных областей.

Как выяснилось в дальнейшем, используемые в указанных работах подходы (при их определенной трансформации) могут быть применены к обоснованию изложенной здесь приближенной схемы для численного решения уравнений вида (2) (а также аналогичного уравнения второй основной задачи теории упругости). Ниже мы, исходя из ряда утверждений работы [5], изложим вкратце некоторые фрагменты, относящиеся к рассмотрению указанного вопроса.

Полагая $\beta \in (0,1)$, исходное уравнение (2) будем рассматривать как линейное операторное уравнение в Гельдеровом пространстве H_β (при обычном определении нормы $\|\varphi\|_{H_\beta}$ в этом пространстве). В том же пространстве наряду с (2) рассмотрим соответствующее аппроксимирующее уравнение (8).

Согласно известным (упомянутым выше) утверждениям относительно разрешимости уравнения (2) оператор K $\left(H_\beta \to H_\beta\right)$ непрерывно обратим. С другой стороны (см., [1], а также [8]), при принятом здесь предположении относительно контура L соответствующий оператор имеет такую же обратимость и в пространстве C — непрерывных на L функций.

В нижеследующих рассмотрениях будем считать всюду, где это необходимо, что используемые здесь оценки справедливы с учетом надлежащей оговорки относительно N.

Основным объектом нашего рассмотрения ниже будет соответствующее (8) однородное уравнение

$$(K_n\varphi_n)(t_0) = 0\,, \tag{8_0}$$

решение которого для простоты также обозначаем буквой φ_n. Принимая во внимание это, введем в рассмотрение величину

$$h_{n\beta}(\varphi_n) = \max_{l=1;2}\left\{\max_{\substack{1\le\nu,\,j\le n\\(\nu\ne j)}} \frac{\left|\varphi_n^{(l)}(\tau_j) - \varphi_n^{(l)}(\tau_\nu)\right|}{\left|\tau_j - \tau_\nu\right|^\beta}\right\}$$

где $\varphi_n^{(1)}$, $\varphi_n^{(2)}$ обозначают действительную и мнимую части $\varphi_n(t)$.

Для обоснования рассматриваемой схемы существенным является доказательство того, что, начиная с некоторого n, однородное уравнение (8_0) имеет лишь нулевое решение.

С целью доказательства последнего ниже мы формулируем определенные вспомогательные утверждения в виде пунктов 1)-2). Эти утверждения во многой мере схожи изложенным в [5] и, также, соответствующие доказательства за исключением ряда легкоучитываемых отличительных нюансов аналогичны указанным там же.

1) В принятом предположении относительно контура L при любых ν $(1 \le \nu \le n)$ и j, λ таких, что $\nu + \lambda \in \left[\nu - 2j_n, \nu + 2j_n\right]$ $(j \ne \nu)$ справедливо

$$\frac{p_{\nu+j+1} + p_{\nu+j}}{\tau_{\nu+j} - \tau_{\nu+\lambda}} = \frac{1}{\pi i(j-\lambda)}(1 + \delta_n^{(1)})$$

$$\frac{p^*_{\nu+j+1} + p^*_{\nu+j}}{\tau_{\nu+j} - \tau_{\nu+\lambda}} = \frac{1}{\pi i(j-\lambda)}(1 + \delta_n^{(2)})$$

($\delta_n^{(1)}, \delta_n^{(2)} \to 0$ при $n \to \infty$), где p_μ и p^*_μ — указанные выше квадратурные коэффициенты, а $\{j_n\}$ ($j_n \to \infty$ при $n \to \infty$) — указанная в [5] последовательность.

Асимптотические представления данных здесь видов могут быть легко получены, следуя [5]. На этих представлениях в существенной мере опирается оценка разности $(Q_n\varphi_n)(t_0) - (Q_n^*\varphi_n)(t_0)$, играющая, по аналогии с [5], значительную роль в процессе обоснования рассматриваемой схемы.

2) Для решения φ_n уравнения (8_0) имеет место

$$\varphi_n(t_0) = O(n^{-\beta}\ln^2 n)h_{n\beta}(\varphi_n)\,. \tag{9}$$

К доказательству справедливости последнего утверждения проследим, согласно вышеуказанному, оценки остаточных членов используемых квадратурных формул (учитывая [4]). В силу сказанного относительно N в результате после несущественных огрублений можно написать

$$(K\varphi_n)(t_0) - (K_n\varphi_n)(t_0) = O(n^{-\beta}\ln n)\|\varphi_n\|_{H_\beta}\,. \tag{10}$$

Далее, исходя из (8_0) и указанного выше представления оператора K_n, для решения φ_n уравнения (8_0) имеем

$$\varphi_n(t_0) = -(Q_n\varphi_n)(t_0) + (Q_n^*\varphi_n)(t_0) + (H_n\varphi_n)(t_0) - (G_n\varphi_n)(t_0)\,.$$

Из последнего, применяя к оценке $(Q_n\varphi_n)(t_0)$, $(Q_n^*\varphi_n)(t_0)$ рассуждения из [5] и аналогичным образом получаемую оценку для $(H_n\varphi_n)(t_0)$, ввиду

$$\max_{t_0\in L}\left|\left(G\varphi_n\right)(t_0)\right| = O(1)\max_{t\in L}\left|\varphi_n(t)\right|$$

можно убедиться в справедливости оценки

$$\left\|\varphi_n\right\|_{H_\beta} = O(\ln n)h_{n\beta}(\varphi_n) + O(1)\max_{t\in L}\left|\varphi_n(t)\right|\,. \qquad (11)$$

С другой стороны, принимая во внимание сказанное относительно обратимости в пространстве C оператора K, вновь с учетом $(K_n\varphi_n)(t_0) = 0$ из (10) следует

$$\varphi_n(t_0) = O(n^{-\beta}\ln n)\left\|\varphi_n\right\|_{H_\beta}\,.$$

Учитывая при этом (11), на основании полученных оценок приходим к справедливости (9). Тем самым, доказательство интересующего нас утверждения данным путем заключается в доказательстве обращаемости в нуль (начиная с некоторого n) выражений $h_{n\beta}(\varphi_n)$. Последнее уже может быть доказано по значительной аналогии с указанным в [5] доказательством аналогичного утверждения. На основе тех же соображений, что и в [5] доказывается также сходимость процесса с оценкой ее скорости в зависимости от степени точности используемых квадратурных формул и структурных свойств искомого решения φ.

Как известно, окончательной целью решения задач теории упругости является определение компонентов напряжений и смещений в точках заданной области. Последние, после того, как функция $\varphi(t)$ найдена, определяются по известным формулам (см. [1]) в точках $z\in D$. В упомянутом выше пакете программ для вычисления этих величин были построены определенные приближенные формулы. Обширный численный эксперимент показал, что соответствующие формулы дают приемлемые по точности результаты в фиксированных точках данной области, за исключением точек, весьма близких к ее границе. В связи с этим позже были найдены несколько другого типа формулы (см. [9]), хотя и обладающие определенно более сложной структурой, но могущие давать в известном смысле значительно уточненные результаты вблизи границы области.

Напомним, что в данном здесь случае мы для определенности рассматривали первую основную задачу теории упругости.. Однако, вполне аналогично могла бы рассматриваться и вторая основная задача.

Отметим также, что применение аналогичной вычислительной схемы возможно и в том случае, когда конечная область D многосвязна. Такое рассмотрение не содержит принципиальной сложности. Однако, связанные с ним исследования оказываются в значительной мере громоздкими.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи теории упругости. Москва: Наука, 1966, изд. пятое.
2. Михлин С.Г. Интегральные уравнения Москва-Ленинград: Огиз, 1949, издание второе.
3. Саникидзе Д.Г. Пакет прикладных программ «НОФИМА» для численного решения сингулярных интегральных уравнений и некоторых граничных задач. Инф. бюлл. ГКНТ СССР, 1982, №1 (45), 27 (соавт. Ш. С. Хубеджашвили, Н. Г. Деметрашвили, Л. И. Абесадзе, М. П. Мелия).
4. Саникидзе Д.Г. Численное решение сингулярных интегральных уравнений с применением методов неполной регуляризации. Тр. Ин-та вычислит. матем. им. Н. И. Мусхелишвили АН ГССР, 1985, XXV:1, 136-154.
5. Саникидзе Д.Г. О численном решении граничных задач методом аппроксимации сингулярных интегралов. Дифференц. уравнения, 1993, 29, №9, 1632-1644.
6. Sanikidze D.G. Approximation Schemes for Singular Integrals and Their Applications to Some Boundary Problems. Computational Methods in Applied Math., 2004, v.4, #1, 94-104 (with M. Mirianashvili).
7. Саникидзе Д.Г. Об одной схеме численного решения видоизмененной задачи Дирихле для конечных многосвязных областей и некоторых ее приложениях. Дифференц. уравнения, 2006, т.42, № 9, 1272-1281 (соавт. М.Г. Мирианашвили, К.Р. Купатадзе).
8. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Москва: физматгиз, 1968, изд. второе.
9. Саникидзе Д.Г. Метод свободных параметров в приближенном вычислении интегралов типа Коши. Тр. X меж. симп. «Методы дискретных особенностей в задачах матем. физ.».Херсон: Айлант, 2001, 299-302 (соавт.К.Р.Нинидзе).

Статья получена: 2007-07-07