УДК: **517.958: 57**

Об экологической модели «хищник-жертва», учитывающей сезонность размножения популяций

Чилачава Темур

Сухумский государственный университет
Грузия, Тбилиси, 380043, ул. Джикиа 9.

Аннотация:

В данной работе предложено развитие математической модели «хищник-жертва» в направлении учета сезонности размножения жертв и хищников.

Экспериментальные данные взяты на примере Лагодехского заповедника. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами решена численным методом Рунге-Кутта.

Программа написана в программной среде Matlab. Для искомых функций (ависимость численностей популяций жертв и хищников от времени) получены соответствующие численные значения.

Для различных начальных значений искомых функций и коэффициентов встреч популяций построены соответствующие графики, отражающие динамику популяций.

Установлена нижняя грань отношения начальных значений количества жертв и хищников, при котором не происходит выход на естесственный режим «не вымирания». Найдены соответствующие периоды решений.

***Ключевые слова**: Сезонность размножения, переменные коэффициенты, нижняя грань, режим «вымирания» и «не вымирания».*

Одним из существенных направлений современной экологии является популяционная экология – направление, изучающее структуру и динамику популяций.

Существующие на Кавказе заповедники отличаются размерами, составом и структурой экосистем, набором видов копытных и хищников. Многолетнее целенаправленное уничтожение хищников, в частности, волка в заповедниках, при всемерной охране копытных, способствовало нарушению сукцессионных процессов в экосистемах. В связи с этим особую актуальность приобретает вопрос о необходимом для оптимального функционирования экосистем количестве волков на заповедной территории.

Также по данным "НАКРЕС", из-за снижения уровня жизни населения, резко увеличился браконьерский отстрел животных в заповедниках. В результате этого численность благородных оленей, например, в Лагодехском заповеднике снизилась с 1400 особей в 1988 г. до 80 особей в 1997 г.

Одной из важнейших проблем современной экологии является задача взаимодействия двух взаимопротивоборствующих популяций «хищник – жертва» (например, волк-олень) [1].

На помощь экологам и зоологам заповедников пришло математическое моделирование [2]-[6]. Одним из первых значительных успехов математической экологии было доказательство существования периодических колебаний численности популяций хищников и жертв в стационарной среде.

Математическая модель в простейшем случае, когда коэффициенты системы постоянны была предложена и решена Лотки и Вольтерра [1].

Построенная ими модель сообщества, в котором особи одной популяции являлись пищей (жертва) для особей другой популяции (хищник), объясняла многие на первый взгляд непонятные изменения в численности популяций, которые нельзя было связать с периодическим колебанием внешних факторов .

Несмотря на многочисленные недостатки классической модели “хищник-жертва, она отражает такое важное с точки зрения эколога-популяциониста свойство, как колебание численности.

Кроме того эта модель служит основой для обобщения. Однако она не учитывает факторов, которые обеспечивают стабильность таких систем в природе.

Развитие классической модели “хищник-жертва” позволяет выявить новые эффекты, реально имеющие место в природе.

В направлении обобщения математической модели Лотки- Вольтерра работал А. Колмогоров [7]-[8]. В предложенной им математической модели, в популяции хищников отсутствует внутривидовая конкуренция, но коэффициенты системы уравнений являются определенными функциями, в роли аргументов которых выступают искомые функции.

Отличие предложенной А. Базыкиным математической модели от классической модели Лотки-Вольтерра состоит в использовании более сложной гипотезы динамики роста популяции жертв [9].

Однако, уделив должное внимание внутренним факторам, внешние факторы были оставлены без рассмотрения.

Так например, естесственным развитием классической модели представляется учет сезонности размножения двух противоборствующих популяций, обусловленную климатическими факторами и временами года. Таким образом, до сих пор не были изучены случаи, когда коэффициенты прироста и смертности являются функциями времени, т.е. не были учтены сезонность размножения и смертности популяций в зависимости от времени года (сезона).

По-видимому, реальный учет сезонности размножения двух противоборствующих популяций позволит выявить некоторые новые эффекты раннее не доступные классической модели.

1. Как известно классическая модель Лотки-Вольтерра показывает численное изменение двух противоборствующих популяций, где одна популяция является хищником, а вторая – жертвой. При этом предполагается, что обе популяции существуют изолированно и у популяции жертв пищевые ресурсы неограничены, а популяция хищников питается исключительно пойманными жертвами.

Математическая модель Лотки-Вольтерра описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

где a,b,c,d - положительные постоянные коэффициенты (параметры модели), а $x(t), y(t)$ - соответственно число жертв и хищников в момент времени t, а начальные данные имеют вид

$$x(t_0) = x_0, \qquad y(t_0) = y_0 \tag{1.2}$$

Анализ точного решения задачи Коши (1.1), (1.2) (замкнутая интегральная кривая) показывает, что популяция, состоящая из однородных хищников и однородных жертв в ограниченном микрокосмосе при полном постоянстве всех внешних факторов, должна обладать периодическими колебаниями численностей обоих видов [1]. Эти колебания являются «собственными периодическими колебаниями», так как они вытекают из свойств самой системы «хищник – жертва».

Данная модель была усложнена для получения более точных результатов. В частности, были введены вероятностные коэффициенты встреч противоборствующих популяций [3].

Наиболее отчетливо тенденция к максимально обобщенному описанию системы «хищник – жертва» выражена в работе А.Н. Колмогорова [7], в которой он вообще отказывается от явного выражения для задающих характеристики видов и межвидовых взаимоотношений функциональных зависимостей, ограничиваясь лишь некоторыми качественными предположениями.

2. Рассмотрим математическую модель, учитывающую сезонность размножения противоборствующих популяций, т.е. коэффициенты $a(t), c(t)$ в (1.1) будут определенными функциями времени.

Подробный математический анализ на основании данных экспериментальных наблюдений проведенных зоологами, например, в Лагодехском заповеднике, позволяет определить зависимость коэффициентов системы уравнений от времени следующим образом:

$$a(t) = \ln\left(1 + \frac{\alpha_{k+1}}{x_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i}\right) \tag{2.1}$$

$$c(t) = \ln\left(1 + \frac{\beta_{k+1}}{y_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i}\right) \tag{2.2}$$

$$t \in [k, k+1], \qquad k \in \overline{0,11} \tag{2.3}$$

где α_i, β_i приведены в таблице 1.

месяц	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
популяции (α_i)	0	0	0	0	2	3	10	15	20	25	0	0
популяции (β_i)	0	0	0	0	2	4	4	5	10	5	3	2

Таб. 1

Система дифференциальных уравнений (1.1), (1.2) с кусочно-постоянными коэффициентами (2.1) - (2. 3) решена численным методом Рунге-Кутта. Расчеты были проведены в програмной среде Matlab.

3. Математическая модель, учитывающая сезонность размножения жертв

Рассмотрим модель, учитывающую сезонность размножения популяции жертв. Таким образом рассматривается система дифференциальных уравнений (1.1), с начальными условиями (1.2), при этом кусочно-постоянная функция $a(t)$ имеет вид (2.1), (2.3), а α_i определены в таблице 1, а остальные коэффициенты уравнения (1.1) b, c, d являются постоянными.

Графики при некоторых начальных данных и параметров модели приведены на рис. 1,2.

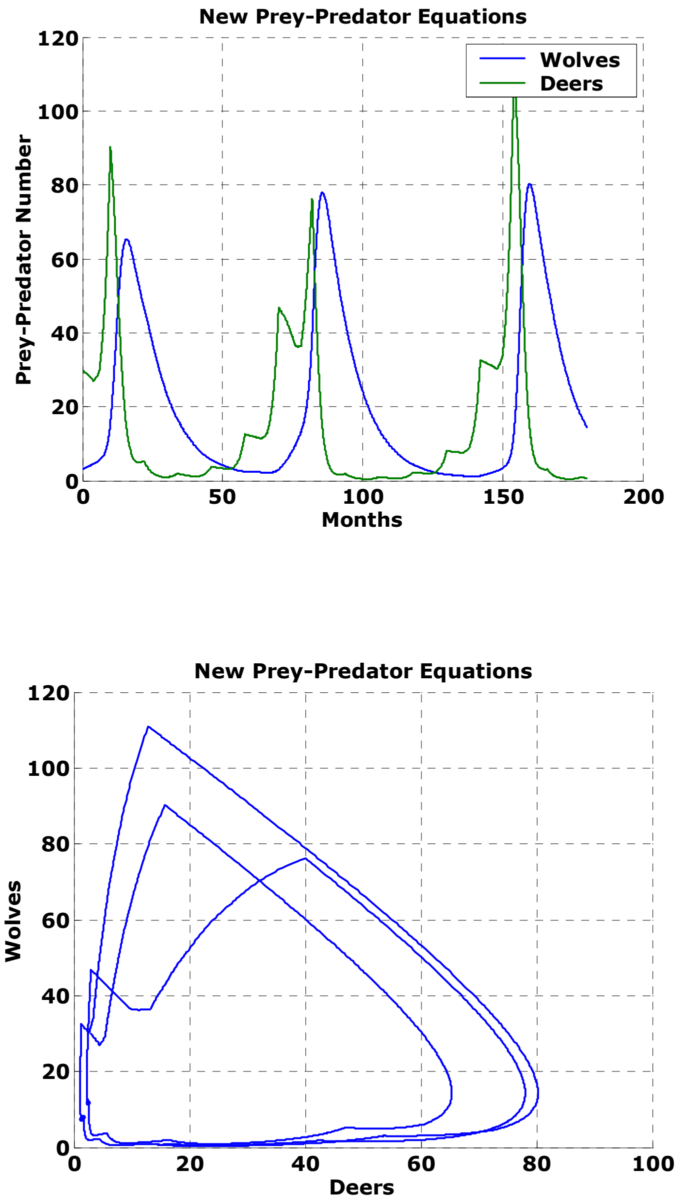
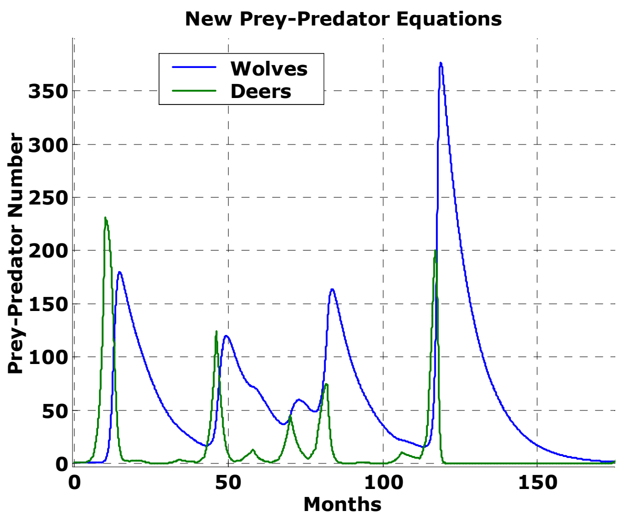


Рис. 1 $b = d = 0.007, c = 0.1, x_0 : y_0 = 10:1, T = 15$ лет.



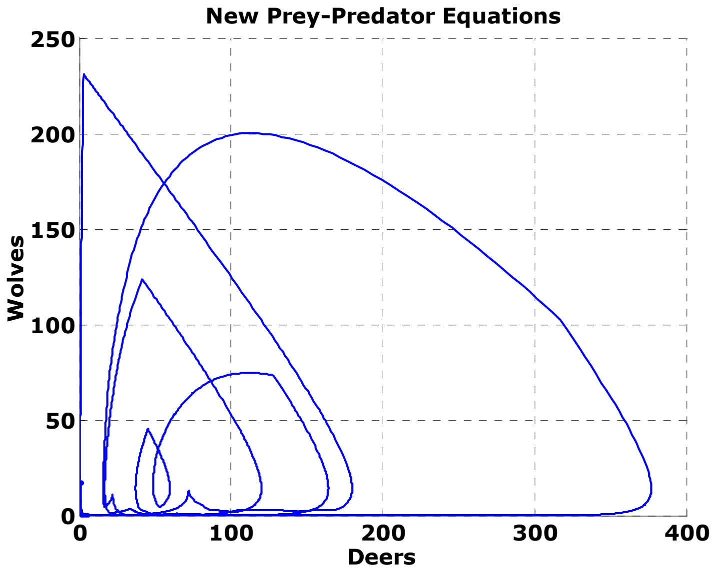


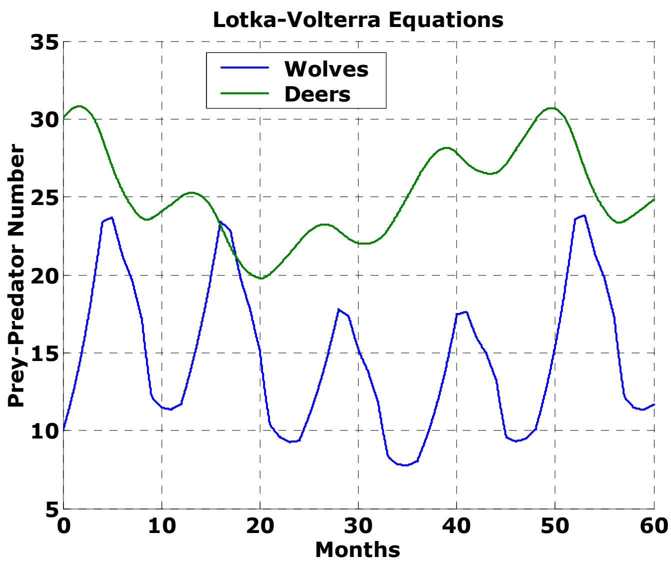
Рис. 2 $b = d = 0.007, c = 0.1, x_0 : y_0 = 1:1, T = 15$ лет.

Как видно из рисунка 2 , вначале популяция жертв (оленей) вышла на нуль, а затем популяция хищников (волков) резко стала уменьшаться в численности. Это естественно объясняется равным начальным соотношением популяций, что не имеет место в реальной жизни.

4. Математическая модель, учитывающая сезонность размножения хищников

Рассмотрим модель, учитывающую сезонность размножения популяции хищников. Таким образом рассматривается система дифференциальных уравнений (1.1), с начальными условиями (1.2), при этом кусочно-постоянная функция $c(t)$ имеет вид (2.2), (2.3), а β_i определены в таблице 1, а остальные коэффициенты уравнения (1.1) a, b, d являются постоянными.

Графики при некоторых начальных данных и параметров модели приведены на рис. 3,4.



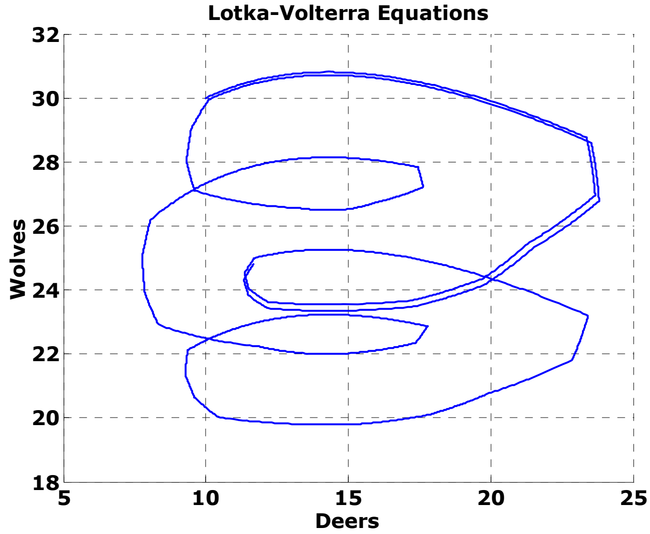
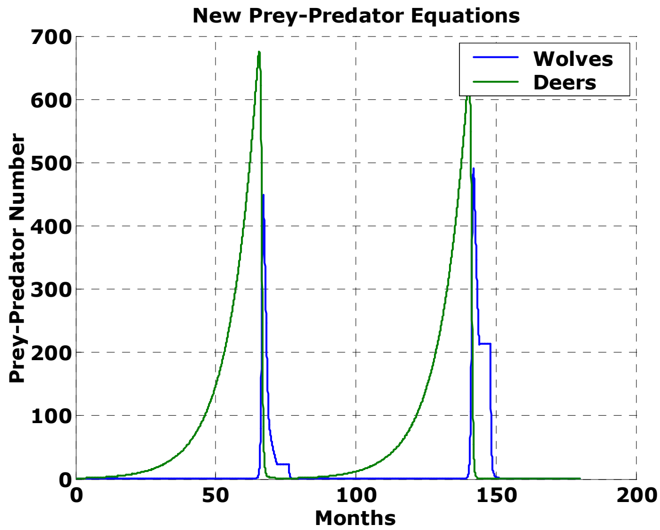


Рис.3 $b = d = 0.007, a = 0.1, x_0 = 30, y_0 = 10, T = 5$ лет.



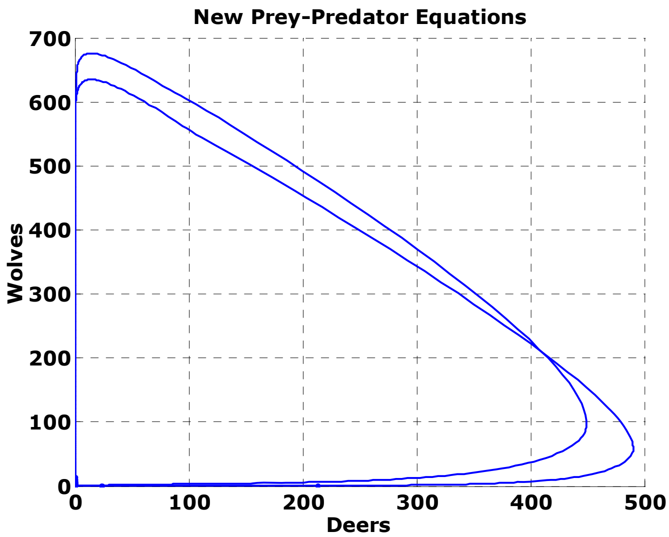


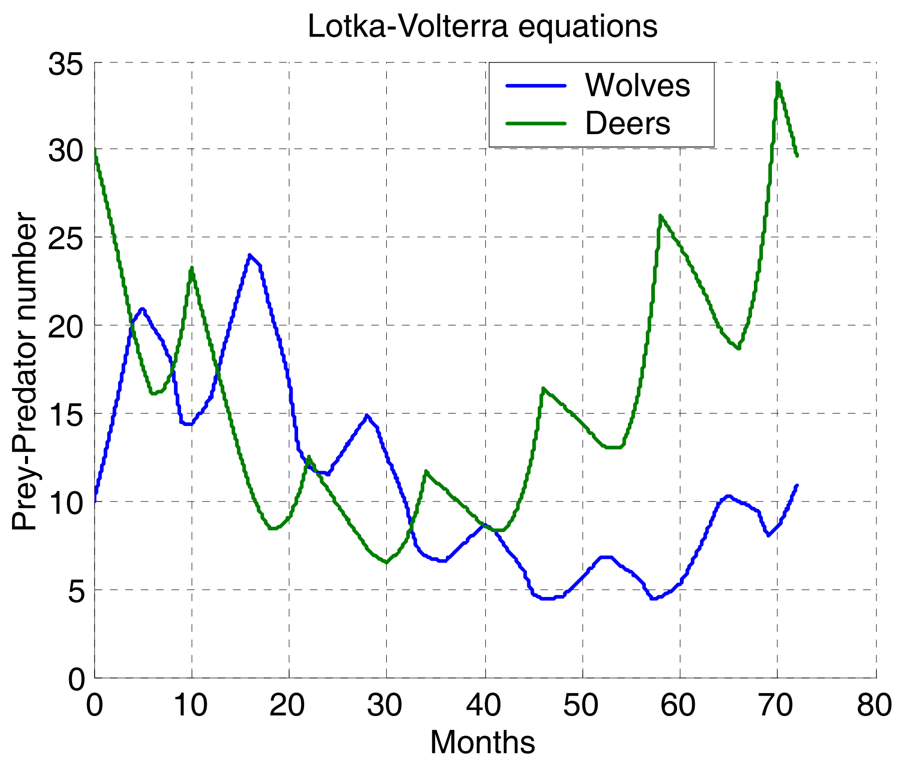
Рис. 4 $b = d = 0.007, a = 0.1, x_0 : y_0 = 1:1, T = 15$ лет.

Как видно из рисунка 4, происходит выход на нуль численности популяций, что связано с начальным равным соотношением хищников и жертв.

5. Математическая модель, учитывающая сезонность размножения обеих популяций

Рассмотрим общую модель, учитывающую сезонность размножения обех популяций. Таким образом рассматривается система дифференциальных уравнений (1.1), с начальными условиями (1.2), при этом кусочно-постоянные функции $a(t), b(t)$ имеют вид (2.1) - (2.3), причем α_i, β_i определены в таблице 1, а остальные коэффициенты уравнения $(1.1), c, d$ являются постоянными.

Графики при некоторых начальных данных и параметров модели приведены на рис. 5-13.



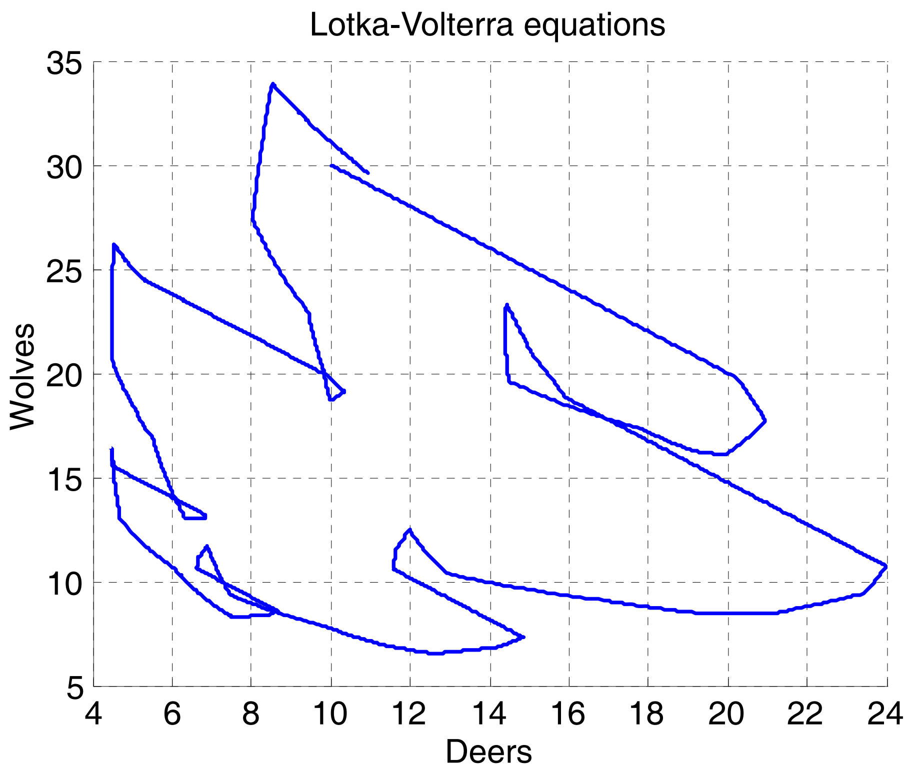
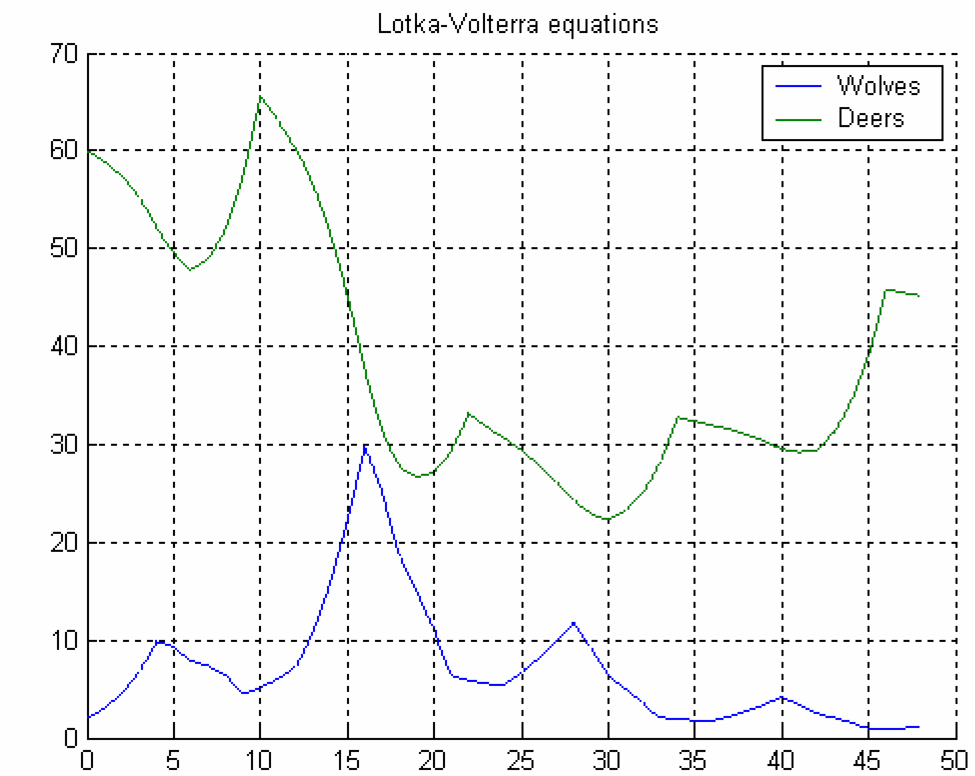


Рис. 5 $b = d = 0.007, x_0 = 30, y_0 = 10, T = 6$ лет.



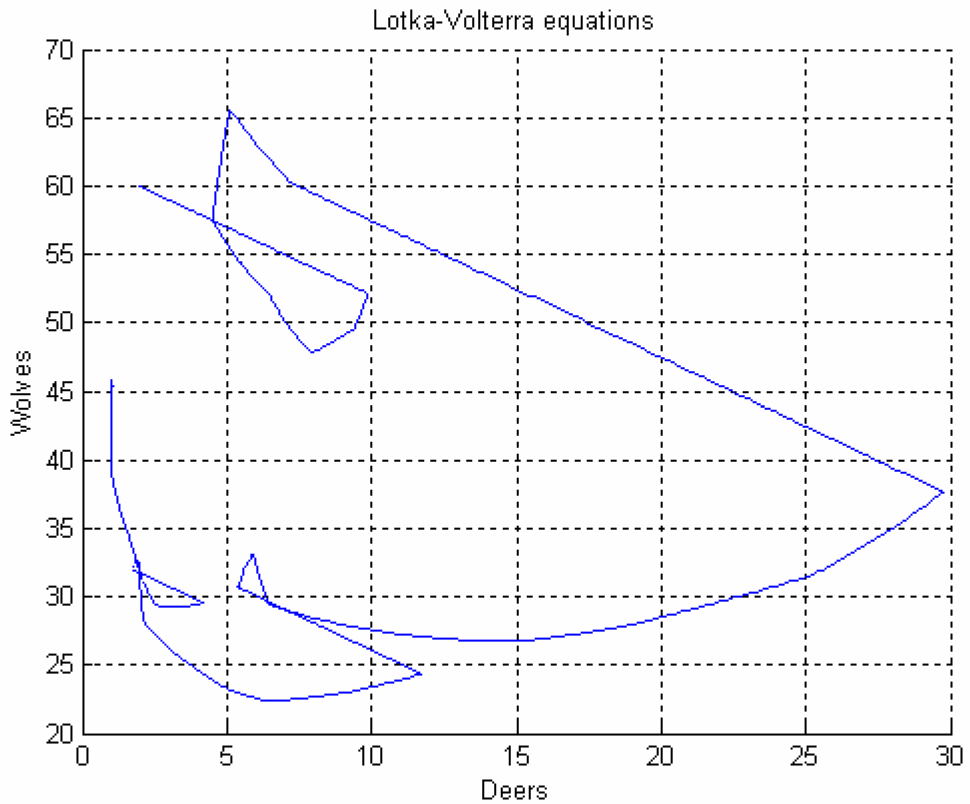
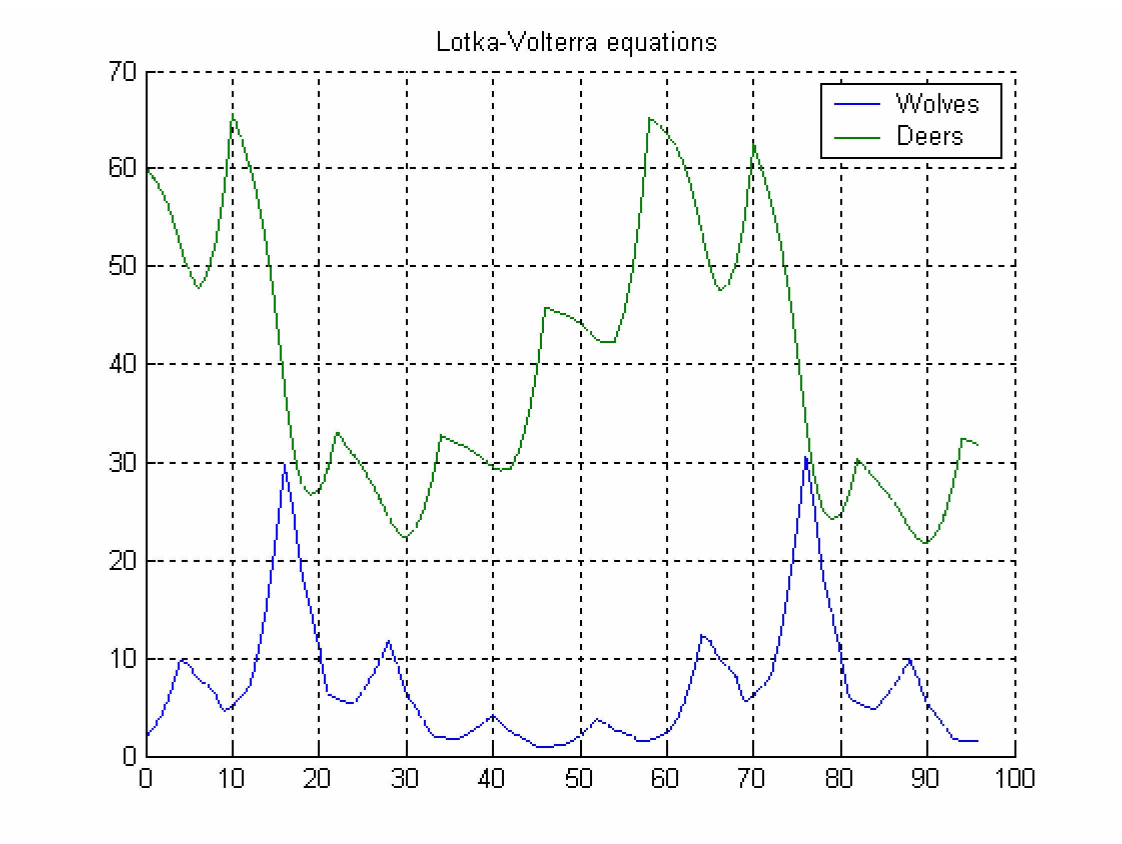


Рис. 6 $b = d = 0.007, x_0 = 60, y_0 = 2, T = 4$ лет



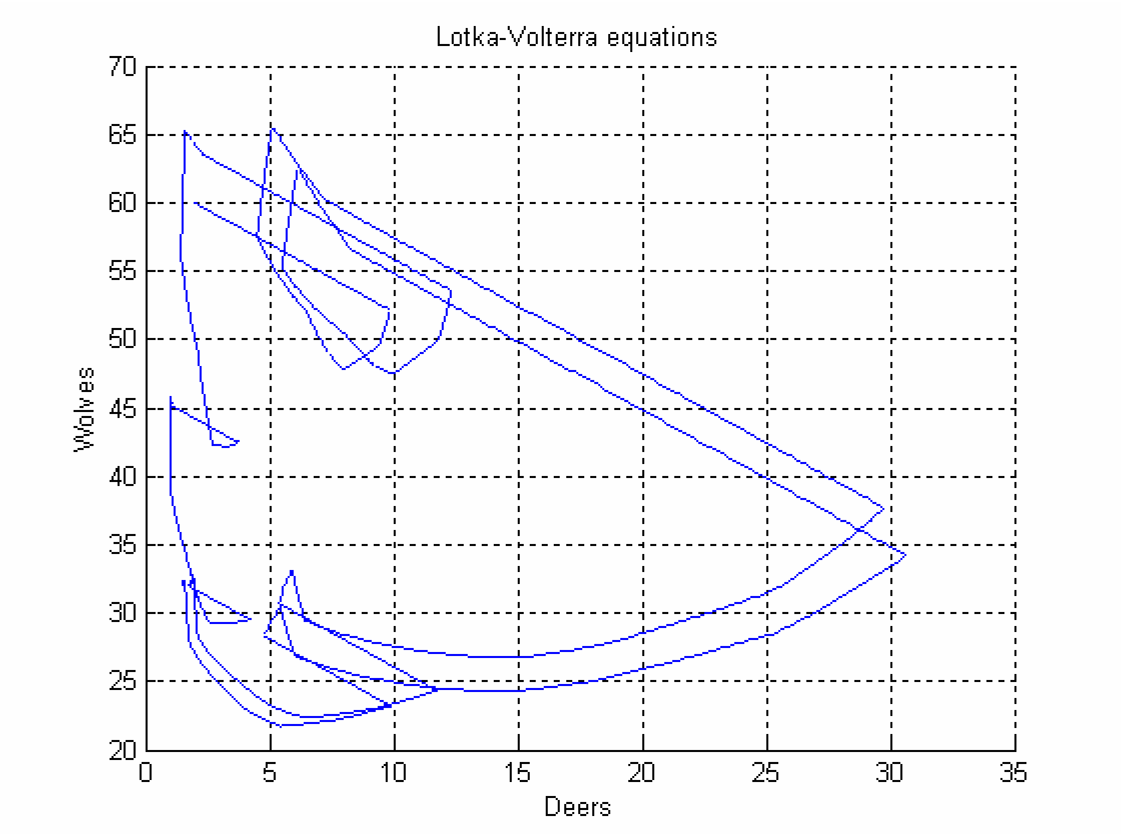


Рис. 7 $b = d = 0.007, x_0 = 60, y_0 = 2, T = 8$ лет

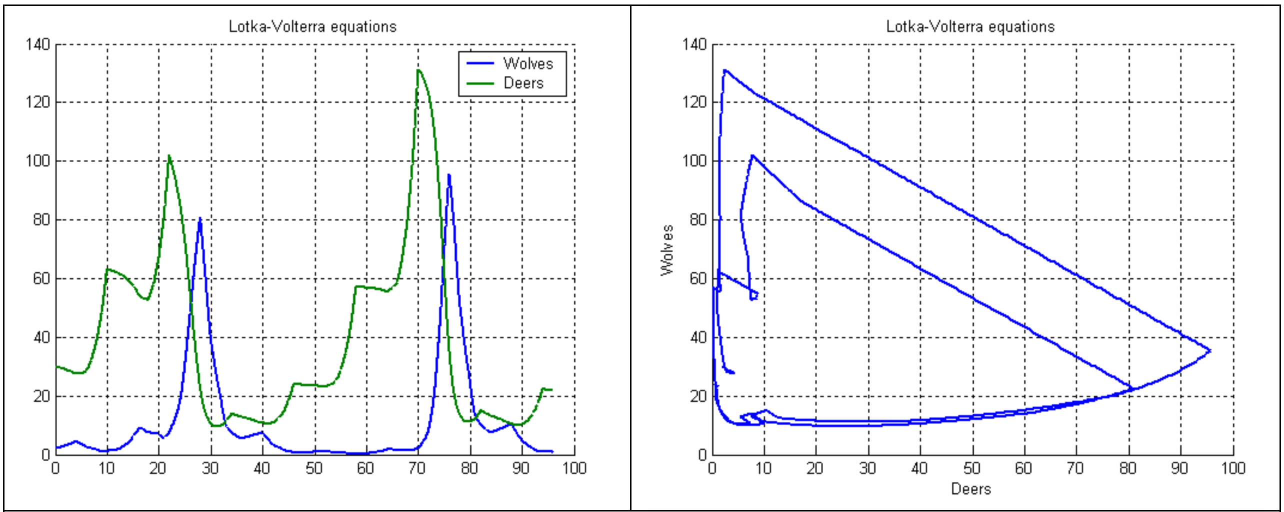


Рис. 8 Начальное количество оленей равно 30 и волков – 2. Временной период - 8 лет. Коэффициенты встреч равны 0.007 (b=d=0.007)

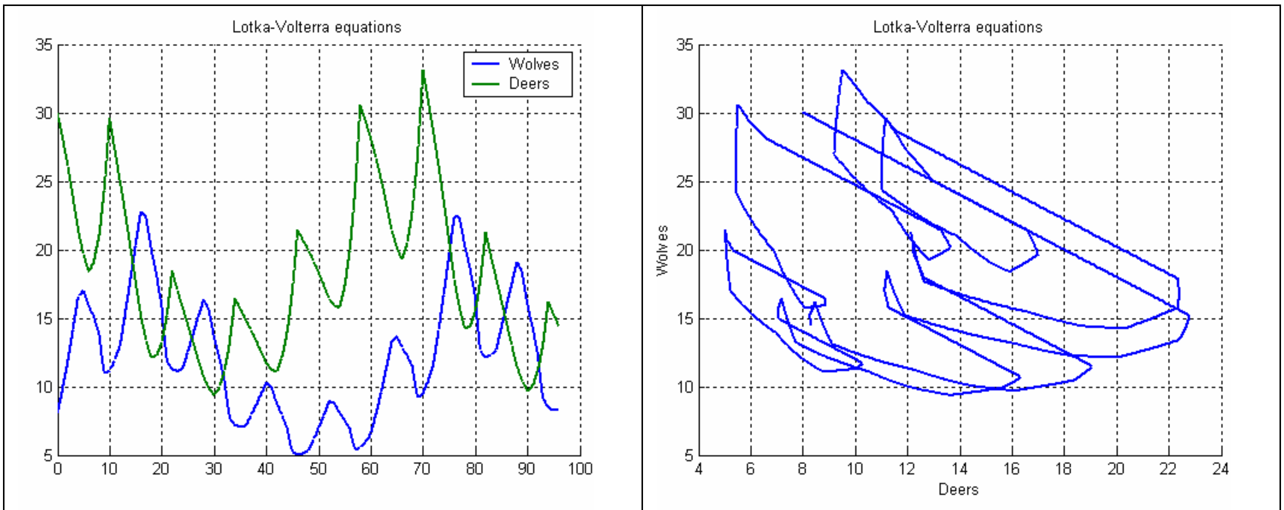


Рис. 9 Начальное количество оленей равно 30 и волков – 8. Временной период - 8 лет. Коэффициенты встреч равны 0.007 (b=d=0.007)

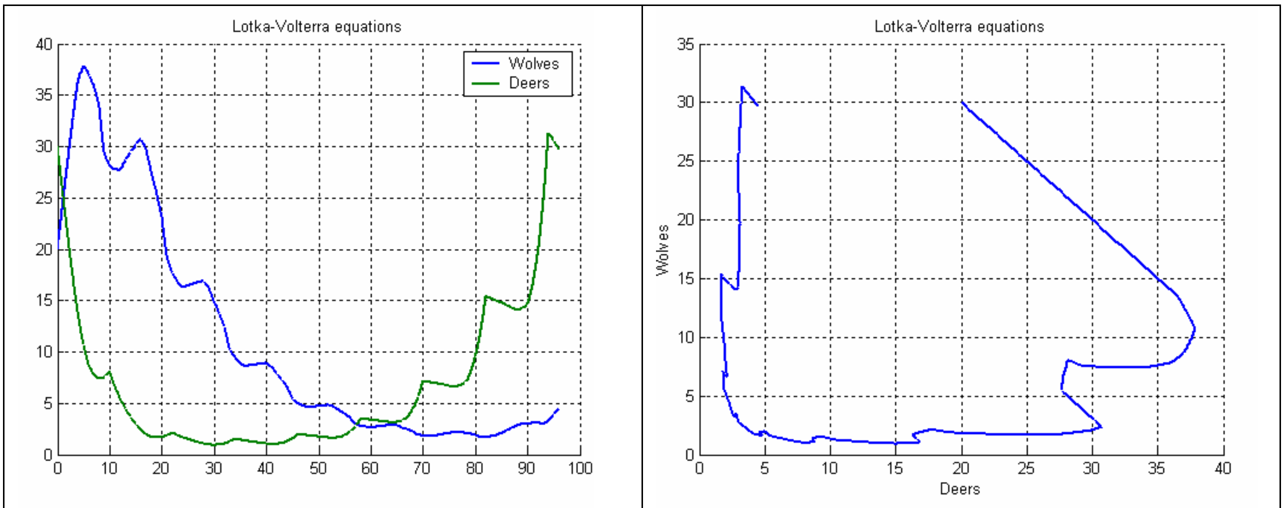


Рис. 10 Начальное количество оленей равно 30 и волков – 20. Временной период - 8 лет. Коэффициенты встреч равны 0.007 (b=d=0.007)

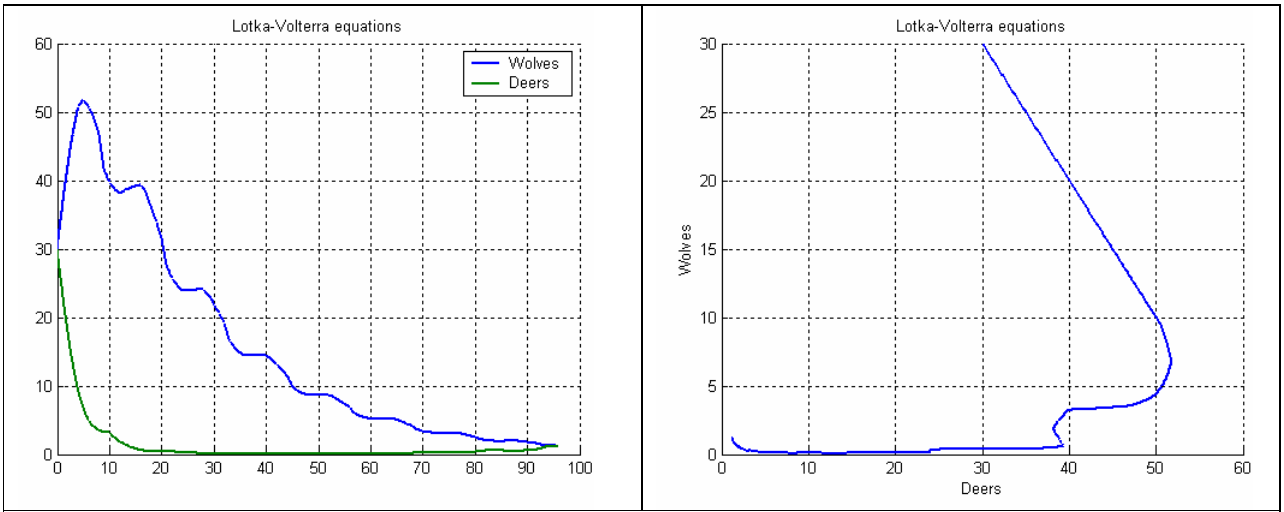


Рис. 11 Начальное количество оленей равно 30 и волков – 30. Временной период - 8 лет. Коэффициенты встреч равны 0.007 (b=d=0.007)

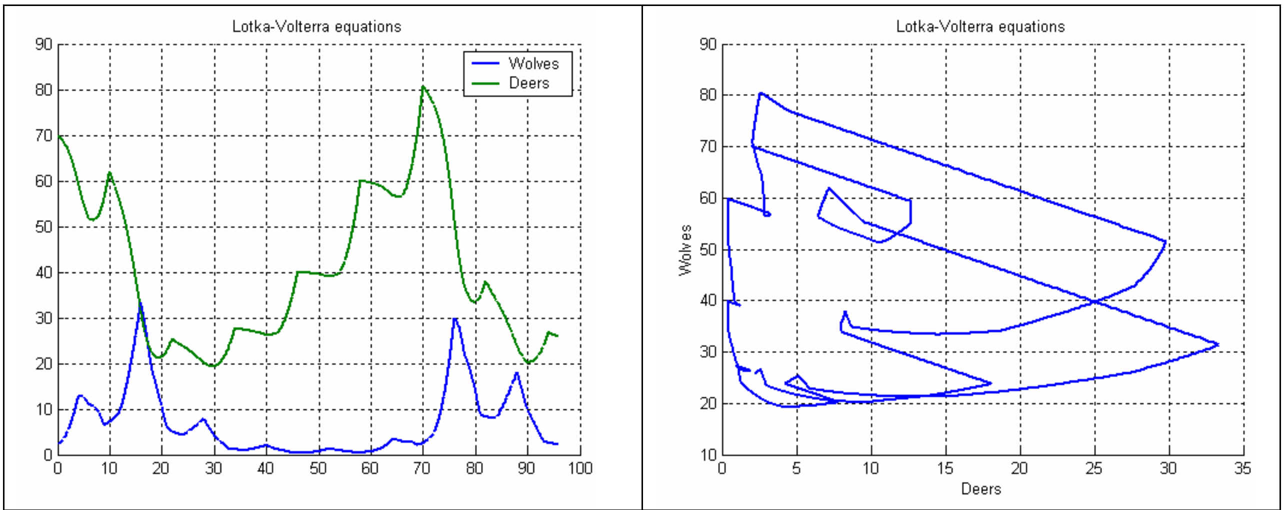


Рис. 12 Начальное количество оленей равно 70 и волков – 2. Временной период - 8 лет. Коэффициенты встреч равны 0.007 (b=d=0.007)

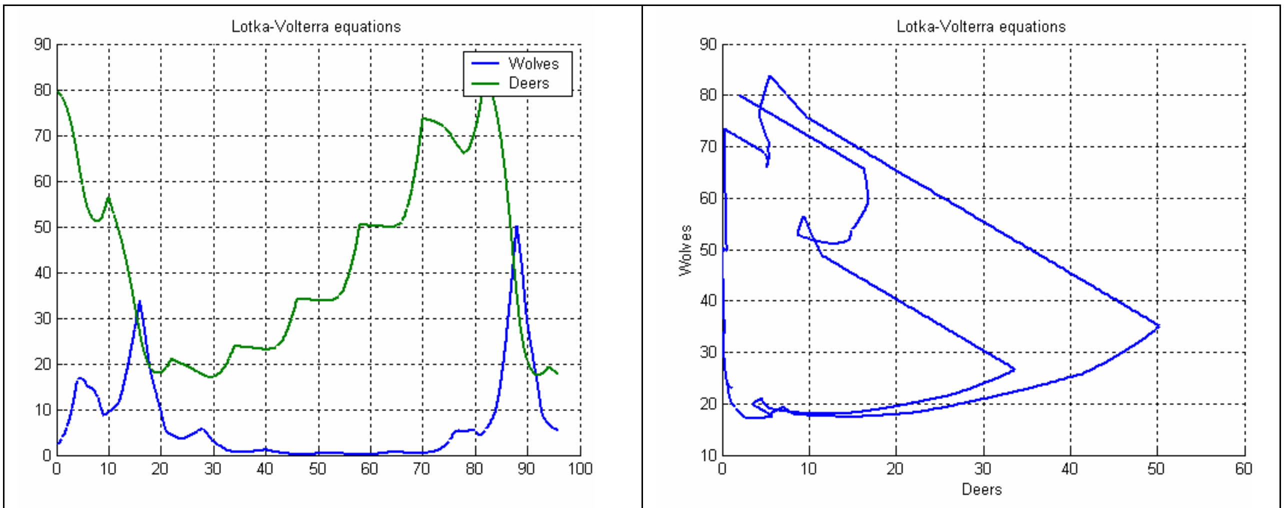


Рис. 13 Начальное количество оленей равно 80 и волков – 2. Временной период - 8 лет. Коэффициенты встреч равны 0.007 (b=d=0.007)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование динамики популяций и выявление влияния начальных условий на динамику численности популяций, на основании численных результатов показали, что в случае начального соотношения популяций 1:1 (изначальное одинаковое количество оленей и волков) решение выходит на нулевое (см. рис. 2, 4,11), что не имеет место в реальной жизни.

Анализ численных результатов позволил определить минимальное соотношение между начальными значениями жертв и хищников, при котором не происходит выход на режим вымирания ($\min(x_0 / y_0) \approx 1.2$).

Таким образом, математическое моделирование более “реальной” жизни в системе хищник-жертва” дало качественно почти те же результаты, что и уравнения Лотки-Вольтерра с постоянными коэффициентами, хотя и высветило новые ситуации, ранее не описываемые этими уравнениями.

Например, оказалось что решение не зависит от того с какого месяца года начать расчет, т.е., если популяции обречены на гибель, то не имеет значения заселим мы их в заповедник весной или зимой.

Усовершенствованная модель точнее дает ответ на вопрос в тот или иной месяц года какова будет численность популяций, так как она учитывает сезонность размножения популяций.

Литература

1. В. Вольтерра Математическая теория борьбы за существование. М. Наука, 1976, 286 стр., 2004, 288 стр.

2. E. Renshaw Modelling biological population in space and time. Cambridge Univ. Press, 1991.

3. Дж. М. Смит Модели в экологии. М. Наука, 1976, 428 стр.

4. Дж. М. Смит Математические идеи в биологии. Изд. 2, 2005, 176 стр.

5. N.S. Goel, S.C. Maitra, E.W. Montroll On the Volterra and other nonlinear models of interacting populations. Rev. of modern Phys. 1971, v. 43, p. 231 – 276.

6. В.Н. Тутубалин, Ю.М. Барабашева, А.А. Григорян, Г.Н. Девяткова, Е.Г. Угер Дифференциальные уравнения в экологии: историко-методологическое размышление. Вопросы истории естествознания и техники. 1997, № 3, стр. 141 – 151.

7. А.Н. Колмогоров Качественное изучение математических моделей динамики популяций. Проблемы кибернетики. 1972, вып. 25, стр. 100 – 106.

8. Ю.М. Свирежев, Д.О. Логофет Устойчивость биологических сообществ. М. Наука, 1978, 352 стр.

9. А.Д. Базыкин Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М. Наука, 1985, 165 стр.

Статья получена: 2008-05-13