УДК-(теория чисел.) 511

θ–Конгруэнтные числа для сингулярных треугольников

Н. Канделаки[1], Г. Церцвадзе[1]
[1] Институт вычислительной математики им.Н.Мусхелишвили, Грузия, Тбилиси

Абстракт

Треугольник называется сингулярным, если его площадь равняется периметру.

В работе исследуются сингулярные треугольники с рациональными сторонами и с фиксированным рациональным θ-углом. Без привлечения гипотезы Бёрча-Суиннертон-Дайера, для таких треугольников конструктивно построены все бесконечные последовательности как θ-конгруэнтных, так и θ–неконгруэнтных чисел.

Ключевые слова: *θ – конгруэнтные числа, сингулярные треугольники, теорема Туннелла, гипотеза Бёрча-Суиннертон-Дайера.*

§1. Введение

Натуральное число **n** называется конгруэнтным, если существует прямоугольньй треугольник, все стороны которого рациональны, а площадь равна **n.** Первое конгруэнтное число n=5 построил Фибоначчи. Позже, великий Ферма доказал, что числа n=1,2,3,4 не являются конгруэнтными. Ясно, что число n=6 конгруэнтно и фиксируется известной первой примитивной пифагоровой троикой a=3, b=4, c=5 ($a^2+b^2=c^2$; ab/2=6). Со временем стало известно, что число n=7 конгруэнтно (Эйлер). Одноко, попытка найти общее решение этой древней и важной задачи теории чисел казалась совершенно безнадежной. Только в 1983 году молодому американскому математику Дж.Туннеллу удалось дать замечательное и почти исчерпывающее решение этой задачи [1]:

<u>Теорема (1.1).</u> Пусть n натуральное число, свободное от квадратов. Рассмотрим условия :

(A)- n конгруэнтно,

(B)- число троек целых чисел (x, y, z) удовлетворяющих уравнению

$$2x^2+y^2+8z^2=n$$

равно удвоенному числу троек, удовлетворяющих уравнию

$$2x^2+y^2+32z^2=n .$$

Тогда из (A) следует (B). Кроме того, если верна слабая форма гипотезы Бёрча-Суиннертон-Дайера то из (B) следует (A).

Центральное место в знаменитой слабой гипотезе Бёрча-Суйннертон-Дайера занимает L-функция Хассе-Вейля еллиптической кривой [1] :

$$L(E \cap s)=\Pi(1-2ap^{-s}+ p^{1-2s})^{-1} \qquad (1.1)$$

эллиптической кривой

$$E\cap: y^2=x^3 - nx \qquad (1.2)$$

и формулируется так:

$L=L(E\cap 1)=0$ тогда и только тогда, когда эллиптическая кривая $E\cap$ имеет бесконечно много рационалных точек.

Важнейшим результатом в этом направлении является теорема Дж. Коутса и Э. Уайлса [1]:

<u>Теорема (1.2)</u> Пусть E эллиптическая кривая,определенная над Q и обладающая комплексным умножением. Если E содержит бесконечно много Q-точек то,

$$L(E,1)=0 \qquad (1.3)$$

Понятие особенных прямоугольников с равной между собой площадью и периметром древнейшее понятие. Пусть **Х** и **У** натуральные числа, задающие длину и ширину прямоугольника с площадью r. Тогда для особенных прямоугольников возникает следуюшая система в множестве натуралных чисел N

$$\begin{cases} X+У= r/2 \\ XУ= r \end{cases} \qquad (1.4)$$

решение которой, как хорошо известно, имеет следующий вид

$$X_1=4 \;\; У_1=4 \;\; r_1=16 \qquad X_2=6 \;\; У_2=3 \;\; r_2=18 \qquad (1.5)$$

Особенные многоугольники, естественно, назвать сингулярными.

В данной работе мы рассматриваем только сингулярные треугольники.

§2. θ-рациональные треугольники и числа

В моногрифии [1] доются важные обобщения прямоугольных треугольников, соответствующих конгруэнтных чисел и тщательно анализируются их широкие возможности.

Основным понятием здесь является рациональность угла. И так, угол треугольника θ, вообще говоря, не объязательно прямоугольного, называется рациональным, если его $\sin\theta$ и $\cos\theta$ одновременно рациональны. Треугольник с рациональными длинами сторон X,У,Z и с рациональным углом θ мы будем называть θ–рациональным треугольником. Ясно, что для этого треугольника, если θ лежит между сторонами X и У площадь треугольника r также рациональна

$$r = XУ\sin\theta /2 \qquad (2.1)$$

Также как и в прямоугольном случае, выделение рационального квадрата s^2 из числа r задает число свободное от квадратов, т.е. $r=s^2p_1 p_2 \ldots p_n$, где $p_1 p_2 \ldots p_n$ простые числа, так, что

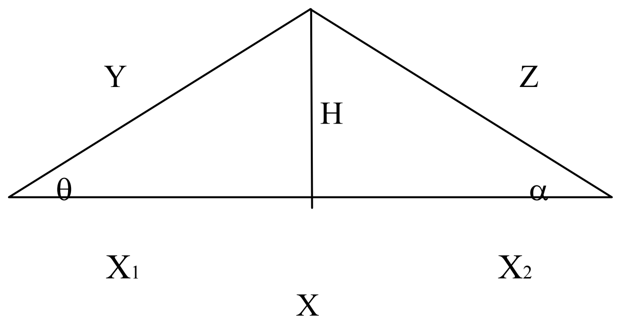
$$r=s^2 n(n=p_1 \ldots p_n).$$

Теперь гомотетия S^{-1} для площади треугольника фиксирует число n свободное от квадратов. Поэтому для наших треугольников справедливо говорить о конгруэнтности числа r, или же о его неконруэтности. Обозначим через X основание θ, а углы при основании через θ и α соответственно. Имеет место следующее предложение

<u>Предложение (2.1)</u> Треугольник является θ рациональным тогда и только тогда, когда $x\in Q$ и углы θ и α одновременно рациональны.

<u>Доказательство:</u> Для доказательства достаточности, нужно показать, что У и Z принадлежат Q. Допустим на основание X высоту длиной H и обозначим длины отрезков от высоты H до углов θ и α через X_1 и X_2 соответственно. Картина такая

$$X = X_1 + X_2$$



(2.2)

Согласно (2.2) мы имеем

$$\begin{cases} H=X_1\, tg\theta \\ H=X_2\, tg\theta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Htg\alpha = X_1 \\ Htg\alpha = X_2 \end{cases} \Rightarrow \quad H=X(ctg\alpha + ctg\theta)^{-1} \qquad (2.3)$$

Так как по условиям предложения $x\in Q$, θ и α одновременно рациональны, то H рациональна и, следовательно, x_1 и x_2 также рациональны. С другой стороны т.к.

$$У=H/\sin\theta, \qquad Z=H/\sin\alpha \qquad (2.4)$$

то У и Z рациональны. Достаточность предложения докозана. Для доказательства необходимости нужно лишь показать, что α рационален, т.е. что $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ одновременно рациональны. Но это следует непосредственно из теоремы синусов и косинусов

$$\sin\alpha=У/ Z\sin\theta \qquad \cos\alpha=(X^2+Z^2-Y^2)/2XZ \qquad (2.5)$$

Ясно, что если θ треугольник задан, то площадь r конгруэнтна

$$(p,q)=1 \qquad p/q=r=HX/2 \qquad (2.6)$$

и соответствующая эллиптическая кривая имеет вид

$$y^2=q^2x^3+2ctg\theta x^2qp-p^2x \qquad (2.7)$$

с корнями для $f(x)=q^2x^3+2ctg\theta\, x^2qp-p^2x$, при $ctg\theta=4/3$, $x_1=0$, $x_2=p/3q$, $x_3=-3p/q$. Все это показывает насколько важный класс эллиптических крывых порождаетая при рассмотрении θ треугольников . Поэтому начиная с этого момента мы фиксируем угол θ , так что

$$\sin\theta=4/5; \ \cos\theta=3/5 ; \ \ ctg\theta=3/4 \qquad (2.8)$$

Заметим, что выбор этих значений обусловлено первой примитивной пифагоровой троикой

$$a=3,\ b=4,\ c=5 \quad (a^2+b^2=c^2)\ (3^2+4^2=5^2)$$

с площадью

$$ab/2=1/2*3*4=6.$$

Читатель, конечно, помнит, что нашим основным дополнительным предположением является сингулярность треугольников

$$X+У+Z = r \tag{2.9}$$

§3. Основные результаты

И так, согласно (2.8) мы имеем

$$XУ=5r/2 \tag{3.1}$$

а согласно (2.9)

$$X+Y+Z=r \quad =>$$
$$X+Y+(X^2+Y^2-2XY\cos\theta)^{1/2}= r \quad =>$$
$$X+Y+(X^2+Y^2-2XY\ 3/5)^{1/2} =r \quad =>$$
$$(X^2+Y^2-2XY\ 3/5)^{1/2}=r-X-Y \quad =>$$
$$X^2+Y^2-2XY\ 3/5= r^2+X^2+Y^2 -2R(X+Y)+2XY \quad =>$$
$$r^2-2r(X+Y)+2XY+2XY*3/5=0 \quad =>$$
$$r^2-2r(X+Y)+8r=0 \quad =>$$
$$X+Y=(r+8)/2 \quad =>$$
$$Z=(r-8)/2$$

Таким образом,

$$X+У=(r+8)/2; \qquad Z =(r-8)/2 \tag{3.2}$$

Важно отметить, что из (3.1) и (3.2) фиксируется система

$$\begin{cases} X+Y=(\ r +8)/2 \\ XY=5r / 2 \end{cases} \tag{3.3}$$

Напомним, что $r =p/q$ $(p,q)=1$, тогда решение (3.3) относительно X и У непосредственно даёт следующее

$$X=1/4q\ [p+8q+(p^2-24\ pq+64q^2)^{1/2}]$$
$$У= 1/4q\ [p+8q-(p^2-24\ pq+64q^2)^{1/2}] \tag{3.4}$$

Но X и У являются рациональными тогда и только тогда,когда подкорневое выражение в (3.4) есть полный квадрат, т.е когда

$$p^2-24\ pq+64q^2= l^2 \quad l \in N \tag{3.5}$$

Решая (3.5) относительно p получим $p=12q+(80q^2 + l^2)^{1/2}$. Для удобства пусть $l =4\ l_1$ и обозначатся l_1 опять через l мы окончательно получим , что

$$p=12q+4\ (5q^2+ l^2)^{1/2} \tag{3.6}$$

Таким образом, мы доказали следующую лемму:

<u>Лемма (3.1)</u> Для сингулярного θ треугольника с $\sin\theta=4/5$ и площадью $r=p/q$ имеем $p=12q+4(5q^2+l^2)^{1/2}$.

Ферма высказал очень глубокую гипотезу о числах вида $5 \cdot q^2+l^2$ [2].
Сначала строится последовательность простых чисел вида 4n+3 последняя цифра которых есть 3, либо 7. Эта последовательность имеет вид и она, конечно, бесконечная

$$3, 7, 23, 43, 47, 67, 83, 103, 107, 127, \ldots . \tag{3.7}$$

Гипотеза Ферма заключается в следующем: Если λ_1 и λ_2 простые числа из последовительности (3.7), то $\lambda_1 \lambda_2 = 5q^2+l^2$. Так, например :

$$3*3=2^2+5*1^2 ;\ 3*7=4^2+5*1^2 ;\ 7*7=2^2+5*3^2 ;\ 3*23=8^2+5*1^2 \tag{3.8}$$

Эта гипотеза не только верна, но и являестя основным фактом о числах вида $5q^2+l^2$.
Это ещё одно подтверждение гениальности Ферма именно в теории чисел.

Если мы рассмотрим теперь квадраты простых чисел из бесконечной последовотельности (3.7)

$$3^2, 7^2, 23^2, 43^2, 47^2, 67^2, \ldots, \lambda^2_k \tag{3.9}$$

тогда согласно гипотезе Ферма из (3.6) мы получим бесконечную последовательность равенств

$$p_к=12q_к+4\lambda_к \qquad к=1, 2, \ldots . \tag{3.10}$$

так как

$$\lambda^2_k = 5q^2_k + l^2_k \tag{3.11}$$

Как видим, процедура построения конгруэнтных чисел такова : берется к-тое простое число λ_k из бесконечной последовательности (3.7) которое возводится в квадрат λ^2_k ; затем l_k определется соотношением

$$\lambda^2_k = 5q^2_k + l^2_k$$

при фиксированном $q_k=1,2,\ldots$ Последовительность равенств $p_к=12q_к+4\lambda_к$ бесконечна. Более того, этой последовательностью исчерпываются все конгруэнтные числа для нашего сингулярного θ–треугольника $r_k=p_k/q_k$.

Примеры:

1) $3*3=5*1^2+2^2$, $q_1=1$, $l_1=2$, $p_1=12*1+3=16$, $p_1/q_1=15/1$.
2) $7*7=5*3^2+2^2$, $q_2=3$, $l_2=2$, $p_2=12*3+7=43$, $p_2/q_2=43/3$.
3) $23*23=5*3^2+22^2$, $q_3=3$, $l^2{}_3=22$, $p_3=12*3+23=59$, $p_3/q_3=59/3$.
4) $43*43=5*9^2+38^2$, $q_4=9$, $l^2{}_4=38$, $p_4=12*9+43=151$, $p_4/q_4=151/9$.
5) $47*47=5*21^2+2^2$, $q_5=21$, $l^2{}_5=2$, $p_5=12*21+47=299$, $p_5/q_5=299/21$.

Эту замечательную последовательность мы можем продолжать бесконечно для 67^2, 101^2, 107^2, и.т.д. , А это в свою очередь означает, что мы без привлечения гипотезы Бёрча-Суиннертон-Дайера построили бесконечную последовательность конгруэнтных чисел для сингулярных θ треугольников, эллиптическая крывая которых имеет вид

$$y^2=q^2x^3+2\operatorname{ctg}\theta\, x^2qp-p^2x$$

при $\sin\theta = 4/5$ с бесконечным числом рациональных решений. Суммируем теперь эти результаты в виде основной теоремы предлагаемой работы :

Теорема (3.1) **Рассмотрим эллиптическую крывую $y^2=f(x)$, где**

$$f(x)=x(x-p/3q)(x+3p/q), \quad (p,q)=1 \quad (\; y^2=q^2x^3+8qpx^2/5-p^2x \;).$$

Без привлечения гипотезы Бёрга-Суиннертон-Дайера эта крывая имеет бесконечно много рациональных решений $(p_к, q_к)(к=1,2, . .)$ Здесь

$$p_к=12q_к+\lambda_к , \quad (к=1,2, ...)$$

где $\lambda_к$ простые числа вида $\lambda к =4nк +3$, последняя цифра которых 3 или 7 (3, 7, 23, 43, 47, 67, 103, 107, 127, . . .)

Как видим, наш результат конструктивен, т.е. последовательность $(p_{к,} q_к)(к=1,2, . .)$ строится явным образом, без привлечения каких либо вспомогательных гипотез.

Литература

1. Н.Коблиц. Введение в эллиптические кривые и модулярные формы. Москва, «Мир», 1988.
2. Г.Эдвардс. Послебняя теорема Ферма. Генетическое введение в Апчебраическую теорию чисел. Изб. «Мир». Москва 1980.

Статья получена: 2009-01-16