Приближённое решение автомодельной задачи свободной конвекции при сильном отсосе

Джондо Шарикадзе

Институт прикладной математики им. И. Векуа
Тбилисского государственного университета им. И. Джавахишвили

Аннотация.

В статье решена автомодельная задача свободной конвекции при сильном отсосе. Приближённо найдены первые два приближения и количество тепла, переходящее от пластины к жидкости. Рассмотренная задача существует только при наличии отсоса жидкости через пластину.

Рассмотрим стационарную задачу свободной конвекции с учётом протекания жидкости через пластинку.

Основные уравнения и граничные условия при этом имеют вид [1]:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+g\beta\left(T-T_\infty\right), \tag{1}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+\mathrm{v}\frac{\partial T}{\partial y}=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&u(x,0)=u_w,\ \mathrm{v}(x,0)=-\mathrm{v}_w(x),\ T(x,0)=T_w=\text{const},\\ &u(x,\infty)=u_w,\ T(x,\infty)=T_\infty=\text{const}.\end{aligned} \tag{4}$$

Если из (3) уравнения определим поперечную скорость $\mathrm{v}(x,y)$ и учтём граничное условие для этой скорости из (4) и подставим в уравнениях (1) и (2), получим:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{v}_w(x)\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}dy=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+g\beta\left(T-T_\infty\right), \tag{5}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}-\mathrm{v}_w\frac{\partial T}{\partial y}-\frac{\partial T}{\partial y}\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}dy=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \tag{6}$$

Легко показать, что уравнения (5) и (6) имеют следующие автомодельные решения [1]:

$$u(x,y)=4x^2\sqrt{x}u_w\varphi(\eta),\ T-T_\infty=\left(T-T_\infty\right)Q(\eta), \tag{7}$$

где

$$\eta=c\frac{y}{x^{\frac{1}{4}}},\ c=\left[\frac{g\beta\left(T-T_\infty\right)}{4\nu^2}\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Расчёты показывают, что автомодельность решений сохранится, если скорость просочивания через пластинку выбрать в виде

$$\mathrm{v}_w(x)=\gamma\frac{c\nu}{x^{\frac{1}{4}}}. \tag{8}$$

Подставляя (7) и (8) в (5) и (6), получим уравнения

$$\varphi'' + \gamma\varphi' = -3\varphi'\int_0^\eta \varphi d\eta - Q\,, \tag{9}$$

$$Q'' + \Pr\gamma Q' = -3Q'\int_0^\eta \varphi d\eta - Q \tag{10}$$

и граничные условия

$$\varphi(0) = 1\,,\ \varphi(\infty) = 0\,,\ Q(0) = 1\,,\ Q(\infty) = 0\,. \tag{11}$$

Пусть отсос жидкости через пластинку сильный. Тогда, вводя новую переменную

$$z = \gamma\eta$$

и новые функции

$$\varphi(\eta) = f(z)\,,\ Q(\eta) = \psi(z)\,,$$

из уравнений (9) и (10) получим:

$$f''' + f' = \frac{1}{\gamma^2}\left[-3f'\int_0^z f d\eta - \psi\right], \tag{12}$$

$$\psi'' + P_2\psi' = \frac{1}{\gamma^2}\left[-3\psi'\int_0^z f d\eta\right], \tag{13}$$

а из граничных условий (11):

$$f(0) = 1\,,\ f(\infty) = 0\,,\ \psi(0) = 1\,,\ \psi(\infty) = 0\,. \tag{14}$$

Если найдём функции Грина задач (12), (14) и (13), (14), решение этих задач можно написать в виде:

$$f(z) = f_0(z) + \frac{1}{\gamma^2}\int_0^\infty\left[-3f'\int_0^\eta f d\alpha - \psi\right]G_f d\eta\,, \tag{15}$$

$$\psi(z) = \psi_0(z) + \frac{1}{\gamma^2}\int_0^\infty\left[-3\psi'\int_0^\eta f d\alpha\right]G_\psi d\eta\,, \tag{16}$$

где функции Грина имеют вид:

$$G_{1f} = -1 + e^{-z}\,,\ 0 < z < \eta\,,$$

$$G_{2f} = \left(1 - e^{\eta}\right)e^{-z}\,,\ \eta < z < \infty\,,$$

$$G_{1\psi} = \frac{1}{P_2}\left(e^{-\Pr z} - 1\right),\ 0 < z < \eta\,,$$

$$G_{2\psi} = \frac{1}{P_2}\left(1 - e^{\Pr\eta}\right)e^{-\Pr z}\,,\ \eta < z < \infty\,.$$

Уравнения (15) и (16) представляют собой интегро-дифференциальные уравнения относительно f и ψ с малым периметром $\frac{1}{\gamma^2} = \varepsilon$. Их решения можно искать в виде рядов

$$f(z) = \sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k f_k(z)\,,\ \psi(z) = \sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k \psi_k(z) \tag{17}$$

последовательными приближениями. После подстоновки рядов (17) в виде (15) и (16) и приравнивая коэффициенты перед одинаковыми степенями k, получим следующие рекуррентные соотношения:

$$f_0(z) = f_0(z)\,,$$

$$f_1(z) = \int_0^\infty\left[-3f_0'\int_0^\eta f_0 d\alpha - \psi_0\right]G_f d\eta\,,$$

....

$$f_{k+1}(z)=\int_0^\infty\left[-3\sum_{\beta=}^{k} f'_\beta\int_0^\eta f_{k-\beta}d\alpha-\psi_k\right]G_f d\eta .$$

$$\psi_0(z)=\psi_0(z),$$

$$\psi_1(z)=\int_0^\infty\left[-3\psi'_0\int_0^\eta f d\alpha-\psi_0\right]G_\psi d\eta ,$$

....

$$\psi_{k+1}(z)=\int_0^\infty\left[-3\sum_{\beta=}^{k}\psi'_\beta\int_0^\eta f_{k-\beta}d\alpha-\psi_k\right]G_\psi d\eta .$$

Для первых двух приближений будем иметь следующие решения:

$$f_0(z)=e^{-z},$$

$$\psi_0(z)=e^{-\Pr z},$$

$$f_1(z)=-3ze^{-z}-\frac{3}{2}e^{-2z}-\frac{1}{\Pr(1-\Pr)}e^{-\Pr z},$$

$$\psi_1(z)=\frac{\Pr}{\Pr+1}\left[e^{-\Pr z}-e^{-(\Pr+1)z}\right]-\frac{3}{2}ze^{-\Pr z}.$$

Найдём количество тепла, переходящее от пластины к жидкости в точке x через единицу площади в единицу времени

$$q(x)=-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_0=-\frac{\lambda c}{x^{\frac{1}{4}}}(T_w-T_\infty)\left(\frac{\partial Q}{\partial\eta}\right)=-\frac{\lambda c}{x^{\frac{1}{4}}}\gamma(T_w-T_\infty)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_{z=0}.$$

Подставив сюда вместо $\psi(z)$ его выражение

$$\psi(z)\approx\psi_0(z)+\frac{1}{\gamma^2}\psi_1(z)=e^{-\Pr z}+\frac{1}{\gamma^2}\frac{\Pr}{\Pr+1}\left[e^{-\Pr z}-e^{-(\Pr+1)z}\right]-\frac{3}{2}ze^{-\Pr z},$$

получим

$$q(x)=-\frac{\lambda c\gamma}{x^{\frac{1}{4}}}(T_w-T_\infty)\left[-\Pr+\frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{\Pr}{\Pr+1}-\frac{3}{2}\right)\right].$$

Полное количество тепла, переходящее к жидкости от всей пластины, равно

$$Q(x)=b\int_0^b q(x)dx=-\frac{4\lambda c\gamma}{3}(T_w-T_\infty)\left[-\Pr+\frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{\Pr}{\Pr+1}-\frac{3}{2}\right)\right]bl^{\frac{3}{4}},$$

где b есть ширина пластины. Если ввести среднее число Нуссельта посредством соотношения

$$Q=b\lambda\ Nu_{cp}(T_w-T_\infty)$$

будем иметь

$$Nu_{cp}=\frac{4}{3}ce^{\frac{3}{4}}\left[-\Pr\gamma+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\Pr}{\Pr+1}-\frac{3}{2}\right)\right].$$

Заменив c его выражением, получим

$$Nu_{cp}=\frac{4}{3}\left[-\Pr\gamma+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\Pr}{\Pr+1}-\frac{3}{2}\right)\right](Gr)^{\frac{1}{4}},$$

где

$$Gr=\frac{g\beta l^3(T_w-T_\infty)}{4\nu^2}.$$

Эти формулы показывают, что рассмотренная задача существует только при наличии отсоса жидкости через пластину $(\gamma\neq 0)$.

Следуя работе К. Т. Янга [2], можно показать, что если распределение температуры на пластине имеет вид $T_w - T_\infty = T_1 x^n$, то естественно конвективное течение также приводит к автомодельным решениям и в нашем случае. При этом $\psi(z)$ и $Q(z)$ функции подчиняются уравнениям:

$$\varphi'' + \gamma\varphi' = -(n+3)\varphi'\int_0^\eta \varphi d\eta + 2(n+1)\psi^2 + Q\,,$$

$$Q'' + \Pr\gamma Q' - 4n\Pr Q = -(n+3)\Pr Q'\int_0^\eta \varphi d\eta\,.$$

Решения этих уравнений можно провести аналогично изложенному выше методом (см. также [3]).

Натоящая статья посвящается светлой памяти академика А. А. Самарского.

Литература

1. Шлихтинг Г. – Теория пограничного слоя. М., Наука, 1969.
2. Yang K. T. – Possible similarity solutions for laminar free conversion on vertical plates and cylindres. I. Appl. Mech., 28, 230-236 (1960).
3. Sparrow E. M., Gregg I. L. – Similar solutions for free conversion from a nonisothermal vertical plate. ASME 80, 379-386 (1958)
4. Шарикадзе Дж. В. Приближённое решение уравнения магнитного пограничного слоя первого ряда при сильном отсосе. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2007, No 2(13), 17-20.
5. Sharikadze J. V. Solution of boundary layer equations of conducting fluid with strong suction. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics. v. 16, No. 6, 2001.
6. Sharikadze J. V. Falkuer-Skan problems for conducting fluid with strong suction. Transcations of International conference “The problems of continium mechanics”. Translations, Tbilisi, State Technical University, 2007, 83-86.

Статья получена: 2009-04-17