

УДК: 519.711.3, 624.131.6

Математическое моделирование флюидодинамических процессов в земной коре

Клочкова Л.В.¹, Повещенко Ю.А.², Самарская Е.А.¹, Тишкин В.Ф.¹

¹Институт математического моделирования РАН, tishkin@imamod.ru, elena@kabsi.at

²Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, hecon@hotmail.ru

Введение

Авторами на протяжении ряда лет разрабатывались некоторые вопросы теории фильтрации для математического моделирования флюидодинамических процессов в земной коре. В частности, на базе определённого класса флюидодинамических моделей, описывающих консолидацию осадочных бассейнов, автоколебательные процессы в коровых волноводах, медленные и быстрые (на заключительной стадии) процессы эволюции осадочного бассейна, предложена модель, которая может быть эффективным инструментом для изучения осадочного бассейна как системы, чтобы установить его структуру, генезис и этапы развития. Математическое моделирование фильтрационных и упруго-пластичных процессов в ряде актуальных геофизических задач заключается в моделировании многокомпонентной, многофазной фильтрации и сорбции в напряженно-деформированных средах. Характерной и малоизученной особенностью таких процессов является существенное влияние напряженного состояния на процессы фильтрации, которые в свою очередь, приводят к перераспределению напряжений и деформаций. Предлагаемый подход, основанный на методе опорных операторов, позволяет производить расчеты в областях сложной формы на нерегулярных сетках с сохранением основных свойств исходных уравнений. Показана возможность применения этого метода к расчету крупномасштабных миграций углеводородов, исследованию процессов захоронения радиоактивных отходов в глубинных скважинах, а также к проблеме моделирования техногенных землетрясений. Применение современных методов вычислительной математики к исследованию ряда геофизических проблем, в частности, к формированию осадочных бассейнов и миграции в них углеводородов важно как с практической точки зрения, - в них содержатся основные запасы нефти и газа, так и с теоретической, т.к. в них запасена огромная информация о структуре регионов.

Формирование месторождений полезных ископаемых тесно связано с тектоникой литосферных плит. Теория предсказывает возможность генерации углеводородов в зонах подвига плит за счет термолитизации органических веществ, затачиваемых туда вместе с осадками. Часть углеводородов мигрирует оттуда, а часть сохраняется в поднадвиговых зонах. Результаты бурения показали справедливость подобных предположений. В частности, это позволило удвоить извлекаемые запасы нефти в США. В предлагаемом для математического моделирования регионе междуречья Вилюй-Лена с этой точки зрения исключительно перспективен краевой прогиб на востоке Сибирской платформы и поднадвиговые зоны Верхояно-Колымского складчатого пояса.

Моделирование мест захоронения радиоактивных отходов в глубинных скважинах и фильтрационных процессов, сопутствующих этой технологии, является одной из актуальных экологических задач. Идея захоронения состоит в том, что радиоактивные отходы после некоторой обработки помещаются в контейнер, опускаемый в глубокую скважину. Возникающие в результате температурные поля в скальных породах вызывают термоупругие напряжения, которые могут привести к образованию трещин с возможной утечкой радиоактивных флюидов.

При добыче угля, нефти, газа происходит изменение напряженно-деформированного состояния горных пород. Возникающие при этом градиенты давления могут приводить к значительным смещениям частей земной коры, проявляющимся, в частности, в виде землетрясений, и резким выбросам флюидов, которые могут сопровождаться взрывами и пожарами в шахтах. Предполагается, что одним из основных механизмов в вышеперечисленных задачах является процесс фильтрации в пористых напряженно-деформированных средах.

В процессах фильтрации важнейшими составляющими являются фазовые и химические превращения углеводородов, которые приводят к фазовым превращениям и изменениям плотностей. Кроме того развитие различных подходов к оценкам состояния сейсмически опасных зон и взрывоопасных скоплений углеводородов в создаваемых человеком при разработке месторождений искусственных полостях жизненно важны и необходимы для экспертных оценок и контроля.

Предлагаемые методы и подходы сводятся к следующему:

- 1) формулировка геодинамических и математических моделей, описывающих процесс формирования осадочных бассейнов;
- 2) разработка методов совместного решения фильтрационных и упругих задач;
- 3) проведение вычислительных экспериментов и исследование типичных режимов формирования осадочных бассейнов в зависимости от структуры и возможных фильтрационных режимов;
- 4) разработка и реализация вычислительных алгоритмов для численного интегрирования стационарных уравнений термоупругости;
- 5) исследование поля напряжений, обусловленного тепловыделением радиоактивного источника, с последующим анализом возможного разрушения пород и образования трещин;
- 6) расчет напряженно-деформированного состояния подземных коллекторов, вызванного перераспределением порового давления, в задаче о техногенных землетрясениях и взрывам углеводородов в шахтах.

В представляемой работе изложены некоторые основополагающие задачи из этого цикла работ. Данный раздел содержит теорию физико-математического моделирования и результаты вычислительного моделирования задач по оценке возможных запасов нефти и газа в районах с определенной литологической структурой и сложной геометрией коллекторов, развиваемые авторами в течении десяти лет. Приводятся результаты флюидодинамических расчетов в регионе междуречья Вилюй - Лена и Тимано-Печорском регионе. Изложен один из подходов к оценкам опасности при разработке месторождений углеводородов.

При решении поставленных задач численное моделирование проводилось на нерегулярных сетках. Соответствующая аппроксимирующая сетка генерирована с помощью специально созданного пакета программ ТЕКОН. Для нерегулярных сеток были разработаны специальные вычислительные алгоритмы численного интегрирования уравнений системы дифференциальных уравнений. Основой построения таких алгоритмов является метод опорных операторов. Построены согласованные разностные аналоги основных дифференциальных тензорных операторов и на их основе - разностные схемы для уравнений, сохраняющие дивергентность, положительность эллиптического оператора, самосопряженность. Это дает возможность получать корректные с точки зрения физики результаты даже на грубых сетках, а также обеспечивает необходимый порядок аппроксимации в расчетной области в случае негладких коэффициентов и правых частей уравнений.

В настоящее время проведены исследования по перечисленным ниже направлениям.

- Построены и обоснованы вычислительные алгоритмы для численного решения эллиптических уравнений. Методом опорных операторов построены разностные схемы для эллиптических уравнений на произвольных нерегулярных сетках. Сформулированы достаточные условия сходимости разностных схем метода опорных операторов для

уравнения Пуассона на обобщенных решениях и построены разностные схемы, удовлетворяющие этим условиям. Алгоритмы решения соответствующих разностных уравнений реализованы в виде комплекса программ для IBM PC.

- Разработаны и реализованы в виде комплекса программ вычислительных алгоритмов для численного интегрирования уравнения многофазной фильтрации в модели Баклея-Левретта в пространственно-двумерном случае. Разработан и реализован вычислительный алгоритм для решения уравнений стационарной теории упругости с учетом порового давления.

- Разработаны специальные инструментальные средства, необходимые для создания широкого класса пакетов прикладных программ.

1. Физическая концепция процессов миграции углеводородов в реальных геологических регионах

Процессы миграции углеводородов в реальных геологических регионах интересны как с точки зрения теории развития осадочных бассейнов так и с практической точки зрения поиска и оптимальной разработки месторождений полезных ископаемых.

На современном этапе развития технологии добычи нефти, газа, угля и других полезных ископаемых особую актуальность приобретает единая концепция математического моделирования, во-первых, строения и поведения недр Земли, во-вторых, изменения горных массивов под воздействием внешних условий, в-третьих, происхождения газа и нефти и их циркуляция внутри систем резервуаров, трещин и пор. Математическое моделирование позволяет применить весь арсенал современной вычислительной математики и геоинформатики (сейсмическую съемку, новейшие цифровые карты или другую информацию о Земле с экрана дисплея). В настоящее время становится реальным заменить простые модели традиционной геологии на более сложные подходы. С помощью компьютерной технологии вычислительного эксперимента развиваются адекватные реальным условиям континуальные теории, учитывающие одновременно множество разнородных факторов, что позволяет вести поиск месторождений нетрадиционными для геологии методами. Применение вычислительного эксперимента дает возможность проанализировать влияние различных факторов, например, на процессы генерации и миграции углеводородов, определить возможные области образования месторождений и оценить запасы в них нефти и газа.

Для прогнозирования местонахождения залежей и их объемов предлагается комплексный подход, заключающийся в создании банка данных сложных моделей, которые помогали бы, с одной стороны, адекватно описывать геодинамическую картину регионов, перспективных для геологоразведочных работ, а с другой - регионов с уже известными объемными источниками. Виртуальная картина, воспроизводящая геологический объект и отражающая неоднородность фильтрационных свойств коллекторов, обусловленную их сложной геометрической и литологической структурой, даёт возможность по аналогии с уже имеющимися и хорошо изученными месторождениями в регионах, имеющих похожую геологическую структуру, построить прогноз существования месторождения и его объёма. На рисунках 1-4 показаны регионы междуречья Виллой-Лена (исключительно перспективен краевой прогиб на востоке Сибирской платформы) и сложно структурированного региона Тимано-Печерья. Именно для таких регионов характерны огромные скопления полезных ископаемых, включая алмазные и золотоносные трубки.

Построение базовой математической модели флюидодинамики также требует детального изучения геологических и ландшафтных свойств местности, перспективной для геологоразведочных работ, поскольку содержательная задача должна быть привязана к конкретному региону.

В представляемой работе общая геодинамическая схема образования месторождений углеводородов (УВ) состоит в следующем: сначала происходит образование осадочных бассейнов на пассивных окраинах континентов. На формирование осадочного бассейна

оказывает влияние множество различных процессов: деформационных, фильтрационных, термодинамических и т.д. Эти процессы обладают собственными характерными временами. В случаях, когда эти времена близки, необходимо совместное моделирование этих процессов, так как при взаимодействии нескольких процессов трудно выделить характерные свойства каждого из них. При резком отличии характерных времен процессы разделяются, и их моделирование можно проводить отдельно, что сильно упрощает задачу. На разных этапах геологического развития одного и того же региона встречаются как первый, так и второй случаи.

На практике, как правило, выполняется численное моделирование одного из процессов, определяющего образование месторождения УВ, как это сделано для региона междуречья Виллой – Лена в предлагаемой работе: моделирование совместной фильтрации жидкости и газа, позволяющее выявить основные свойства процесса образования месторождений УВ.

Во флюидодинамическом режиме осадочных бассейнов доминирующую роль играют два явления - это консолидация (отверждение)осадочного бассейна и автоколебания в коровых волноводах. Консолидация охватывает зону до глубин примерно в 10 км. В процессе ее флюиды устремляются вверх, частично унося с собой растворенные в них УВ. В нижней части осадочного бассейна от 10 до 20 км возникают коровые волноводы, которые охватывают не только осадочные породы, но и породы фундамента. Наибольший интерес для этой схемы представляет движение флюидов из зоны субдукции литосферных плит. Отжимание флюидов вверх идет в режиме компакции многофазного (в частности, рассмотренного в представляемой работе двухфазного) флюида. Относительно быстрый режим компакции развивается на фоне медленных процессов формирования осадочных бассейнов, длящихся десятки миллионов лет. Кроме того, в зоне субдукции протекают интенсивные сейсмические процессы. При сейсмическом сотрясении на короткое время открываются трещины, в окрестности которых среда подвергается дилатансионному охрупчиванию. При этом происходит перераспределение порового давления и интенсивные перетоки флюидов. Эти быстрые процессы сопровождаются упругими деформациями скелета. Они резко ускоряют процесс концентрации и сегрегации флюидов и их подъем наверх. Таким образом образование и наполнение месторождений УВ в значительной степени связано с быстрыми процессами. Градиенты порового давления при компакции соизмеримы с градиентом геостатического давления. Не существует других природных процессов, в которых градиенты порового давления на больших расстояниях и за геологические масштабы времени по порядку величины были бы такими же. Периодически двигаясь вверх и вниз от волноводов и обратно к ним, флюиды промывают насыщенные углеводородами осадочные слои и создают предпосылки для образования месторождений нефти и газа.

В силу присущей изучаемой пороупругой среде физической неустойчивости Релэй-Тейлоровского типа соответствующая математическая нелинейная модель обладает гиперболическими свойствами. Развивающиеся асимптотические колебательные процессы в таких средах могут носить характер градиентных катастроф.

При движении в фазе компакции от волноводов вверх флюиды могут упираться в непроницаемые покрышки и создавать аномально высокие пластовые давления. При техногенном изменении коллекторных свойств (истончение таких непроницаемых покрышек) возможны также градиентные катастрофы. Именно этот подход к оценкам опасности при разработке месторождений угля, состоящий в компьютерной технологии прогнозирования флюидодинамических процессов при эволюции осадочных бассейнов и при изменениях структуры среды в процессе разработок месторождений, был предложен для введения в нормы техники безопасности против спорадических выбросов углеводородов в угольных шахтах. Развитие различных подходов к оценкам образования взрывоопасных скоплений углеводородов в создаваемых человеком при разработке месторождений

техногенных полостях является необходимым для экспертных оценок и контроля при разработках месторождений.

2. Математическая постановка задачи

В работе под термином "моделирование" понимается исследование объектов и процессов с помощью численных методов и доведение такого исследования до получения не только качественной картины, но и количественных соотношений. Применительно к природным объектам слово "модель" можно понимать буквально. Мера нашего незнания объектов, точнее отсутствия информации о них, столь велика, что речь зачастую может идти лишь об "угадывании" их поведения, моделировании его на основе тех или иных гипотез. В подземной гидродинамике, где наблюдательные данные весьма фрагментарны и зачастую получаются не прямыми измерениями, а являются результатом той или иной интерпретации измеренных величин, для модели объекта исследователь может предложить несколько вариантов и разыграть с ними различные сценарии. Наблюдая за результатами, составляют представление о модели и условиях ее применимости для описания поведения объекта или хода процесса. Однако реализация такой программы сталкивается с рядом проблем. Принципиальная проблема состоит в неопределенности и неразработанности самих моделей для описания окружающей среды. Даже если предположить, что течение несжимаемой (первое предположение) однофазной (второе предположение) жидкости через недеформируемое (третье предположение) пористое тело описывается уравнениями Стокса (четвертое предположение), то воспользоваться такой моделью для описания реальных подземных течений все равно невозможно, потому что, во-первых, геометрическая структура порового пространства неизвестна, во-вторых, даже если бы она была известна, решить такую задачу технически невозможно. Такая ситуация аналогична проблеме описания системы многих частиц, решаемой в рамках моделей статистической физики, которые дают возможность перейти к усредненному термодинамическому описанию на языке макроскопических характеристик объектов. Отказываясь от детального описания поля скоростей в поровом пространстве жидкости, модели теории фильтрации оперируют средними величинами скорости и давления, устанавливая между ними феноменологические соотношения, простейшим из которых является закон Дарси. Этот закон имеет модельный характер в том смысле, что он не является фундаментальным законом природы, и дает приближенно правильные результаты в некоторой области параметров. Вопросы об области применимости закона Дарси и о его уточнении сами являются предметом отдельного исследования, невозможного без привлечения численных методов. Подземные пространства, в которых протекают гидродинамические процессы, представляют собой, как правило, пористые и трещиновато-пористые тела, характеризующиеся сложной системой пор, каналов, трещин, по которым может происходить течение жидкости и (или) газа. Течение через такие пористые тела, при котм сила трения флюида (жидкости, газа) о скелет играет определяющую роль, по-существу, и есть процесс фильтрации. Центральную роль в теории фильтрации занимает понятие скорости фильтрации. Скорость фильтрации в точке x есть вектор $\bar{V}(x)$, такой что объем флюида, протекающего за единицу времени через ориентированный элемент площади $d\bar{S}$, расположенный в точке x , включающий как поровое пространство, так и скелет, равен $\bar{V}(x) d\bar{S}$. Элемент площади $d\bar{S}$ считается макроскопическим, т.е. настолько превосходящим размеры пор и каналов, что на величине $\bar{V}(x) d\bar{S}$ не сказываются флуктуации истинной скорости флюида, движущегося по хаотической сети каналов пористого тела. Таким образом, скорость фильтрации есть макроскопическая (в указанном смысле) величина, характеризующая среднюю скорость течения флюида, который как будто заполняет все пространство. Зависимость такой скорости флюида от движущих сил в поровом пространстве описывается законом Дарси:

$$\overline{V(x)} = -\frac{K}{\eta} \text{grad} p, (1)$$

Здесь p - поровое давление (давление флюида); η - динамическая вязкость флюида; K - коэффициент пропорциональности, называемый проницаемостью и являющийся одной из феноменологических характеристик пористого тела. Размерность проницаемости $[K]=\text{м}^2$.

Другими важными характеристиками пористого тела являются пористость и просветность (динамическая пористость). Пористость m есть отношение объема порового пространства к полному объёму тела. Просветность есть отношение площади пор в некотором сечении к полной площади этого сечения. Динамическая пористость несколько отличается от объемной m , но в дальнейшем полагается, что они совпадают. Величина $d = \sqrt{K/m}$ имеет размерность $[d]=\text{м}$. С этой величиной связывают средний линейный размер пор.

Проницаемость, просветность, пористость являются характеристиками элементарных площадей и объемов пористого тела. Под элементарными понимаются площади и объемы, линейные размеры которых, с одной стороны, много больше размеров пор, а, с другой стороны, достаточно малы, чтобы в их пределах считать макроскопические величины (скорость фильтрации, среднее давление и т.п.) постоянными. Как проницаемость, так и пористость могут меняться от точки к точке пористого тела. Кроме того, они, вообще говоря, зависят от порового давления, напряженно-деформированного состояния пористой среды и других факторов.

Ясно, что обобщением формулы (1) на случай, когда на флюид действует внешняя сила (в обычных условиях речь идет о силе тяжести), является

$$\overline{V(x)} = \frac{K}{\eta} (-\text{grad} p + \rho g), (2)$$

где ρ - плотность, g - ускорение вободного падения.

При $\overline{V(x)}=0$ это соотношение приводит к гидростатическому распределению давления, которое не должно зависеть от наличия скелета. Элементарный "вывод" этого соотношения позволяет сформулировать предположения, приводящие к закону Дарси и дать интерпретацию входящих в него членов [1]. Для этого необходимо предположить, что течение является достаточно медленным, так что инерционными членами можно пренебречь, сила трения пропорциональна скорости фильтрации и вязкости флюида. При этом величина $-\eta \overline{V(x)}/K$ есть сила трения на единицу объема флюида. Сила, действующая на скелет со стороны флюида, есть

$$\frac{m\eta}{K} \overline{V} - p \text{grad} m, (3.)$$

При фильтрации флюида через пористую среду происходит диссипация энергии. Эта диссипация обусловлена действием вязких сил, приводящих к трению флюида о скелет. Интенсивность диссипации на "микроуровне" порового пространства распределена достаточно нерегулярным образом. Однако ее средняя величина может быть вычислена из простых соображений. В единице объема пористого тела в единицу времени диссипирует энергия $\eta \overline{V}^2 / K$. При этом природа источника, совершающего работу, не имеет значения, если только скорость фильтрации определяется законом Дарси.

Считая скелет неподвижным и полагая, что масса флюида изменяется только за счет потока флюида через границу, можно получить закон сохранения массы или уравнение неразрывности для флюида в виде:

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\bar{V} = 0. (4)$$

При изотермической фильтрации обычно задают функции $m(p)$, $K(p)$, $\eta(p)$ и $\rho(p)$ и система уравнений является замкнутой, что позволяет моделировать течение однофазного флюида через пористую среду.

Задачи такого рода называются задачами однофазной фильтрации. Течение несжимаемой жидкости через недеформируемый скелет ($\rho = \text{const}, m = \text{const}$) описывается уравнением неразрывности

$$\operatorname{div}\bar{V} = q(t, x), (5.)$$

где $q(t, x)$ – интенсивность источников жидкости; $[q]=\text{с}^{-1}$. Уравнение, связывающее геостатическое давление p с источником

$$-\operatorname{div}\left(\frac{K}{\eta} \operatorname{grad}p\right) = q. (6)$$

Течение неидеального газа через недеформируемый скелет (стационарная фильтрация) газа через пористое тело известно как процесс Джоуля--Томпсона. Изменение температуры в этом процессе называется эффектом Джоуля-Томпсона. Как известно, для идеального газа эффект Джоуля-Томпсона отсутствует, т.е. температура остается неизменной. В случае нестационарной фильтрации и неидеального газа температура постоянна. Фактором, стабилизирующим температуру, является массивный скелет, играющий роль теплового резервуара, если интенсивность теплообмена между газом и скелетом достаточно велика.

Уравнение, описывающее нестационарную изотермическую фильтрацию

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \operatorname{div}(cp\operatorname{grad}p) (7)$$

Двухфазная фильтрация существенно более сложна с математической точки зрения. В этом случае вводят объемные насыщенности фаз: s_1 и s_2 – доли объема порового пространства, занятые, соответственно, первой и второй фазами. Очевидно, $s_1 + s_2 = 1$. Аналогично случаю однофазной фильтрации вводят $\bar{V}_a(x)$ ($a=1,2$) каждой из фаз, так что $\bar{V}_a(x) d\bar{S}$ есть объем фазы a , протекшей через элемент площади $d\bar{S}$ за единицу времени.

Уравнения неразрывности для каждой из фаз

$$\frac{\partial m\rho_1 s_1}{\partial t} + \operatorname{div}\rho_1 \bar{V}_1 = 0, (8)$$

$$\frac{\partial m\rho_2 s_2}{\partial t} + \operatorname{div}\rho_2 \bar{V}_2 = 0.$$

Уравнения движения фаз записывают в виде законов Дарси для каждой из фаз, вводя относительные фазовые проницаемости f_a :

$$\bar{V}_1 = -\frac{K}{\eta_1} f_1 \text{grad} p_1, \bar{V}_2 = -\frac{K}{\eta_2} f_2 \text{grad} p_2. (9)$$

Давления в фазах различны, что обусловлено капиллярными эффектами. Относительные фазовые проницаемости также обусловлены капиллярностью. Считается, что течение каждой из фаз происходит по своей системе связанных каналов, причем более смачивающая фаза занимает более узкие каналы. Несвязанные части каждой из фаз неподвижны. Из этого ясно, что относительные проницаемости зависят от насыщенных s_1 и s_2 . Кроме того, принимается, что существуют предельные насыщенные s_1^* и s_2^* , ниже которых соответственно первая или вторая фазы не образуют связной системы и поэтому неподвижны. Капиллярная разность давлений играет роль лишь на малых пространственных масштабах. Во многих задачах ею пренебрегают, считая $p_1 = p_2 = p$.

Так в модели Баклея—Леверетта рассматривается модель двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей, в которой предполагается:

- капиллярный скачок давления отсутствует, т.е. $p_1 = p_2 = p$;
- обе фазы несжимаемы $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const}$;
- скелет недеформируем $m = m(x)$.

В этом случае уравнения неразрывности принимают вид

$$m \frac{\partial s_1}{\partial t} + \text{div} \bar{V} = 0, (10)$$

$$m \frac{\partial s_2}{\partial t} + \text{div} \bar{V} = 0$$

Суммирование этих соотношений с учетом $s_1 + s_2 = 1$ даёт $\text{div} \bar{V} = 0$, где $\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2$ - суммарная скорость фильтрации.

Векторы всех скоростей фильтрации параллельны $\text{grad} p$, поэтому

$$\bar{V} = -KF(s) \text{grad} p, \text{ где } F(s) = \frac{f_1}{\eta_1} + \frac{f_2}{\eta_2}, \text{ откуда уравнение для давления}$$

$$\text{div}(KF \text{grad} p) = 0, (11)$$

а подстановка значения $F(s)$ в уравнение неразрывности первого компонента $s = s_1$ даёт уравнение для насыщенности первого компонента

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div} f(s) \bar{V} = 0, (12)$$

$$\text{где } f(s) = \frac{f_1}{f_1 + f_2 \varepsilon}, \varepsilon = \frac{\eta_1}{\eta_2}.$$

Последнее уравнение может быть преобразовано к виду

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + f'(s) (\bar{V}, \nabla) s = 0, f'(s) = \frac{\partial f}{\partial s}. (13)$$

Описанная модель носит имя Баклея--Леверетта, а уравнение называется уравнением Баклея--Леверетта.

Характерным элементом фильтрационных задач геофизики является непроницаемая поверхность, на которой нормальная компонента скорости фильтрации обращается в ноль. К

таким моделям относится модель Буссинеска, описывающая эволюцию поверхности раздела воздух-флюид.

Пористая среда ограничивается снизу непроницаемой "подшовой", расположенной при $z=b(x,y)$ и в этой среде рассматривают фильтрацию несжимаемого флюида в поле силы тяжести g . Полагают $z=h(t,x,y)$ -уравнение поверхности, на которой давление равно атмосферному p . При этом пространственный масштаб зоны фильтрации по вертикали много меньше пространственного масштаба в горизонтальной плоскости. В этом случае мы можем считать, что в каждой точке (x,y) по вертикали устанавливается гидростатическое равновесие, т.е.

$$p = p_a + \rho g(h - z) \quad (14)$$

При этом интересна величина скорости фильтрации, проинтегрированная по высоте насыщенной флюидом части пористой среды Q

Уравнение неразрывности имеет вид

$$m \frac{\partial(h - b)}{\partial t} + \nabla Q = 0. \quad (15)$$

Это уравнение описывает эволюцию поверхности раздела воздух-флюид в приближении Буссинеска. Если "подшова" горизонтальна: $b=\text{const}$, то высота уровня флюида $H=h-b$ удовлетворяет уравнению

$$m \frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \left(\frac{K}{\eta} \rho g H \nabla H \right). \quad (16)$$

Одной из важнейших задач геофизики является математическое совместное моделирование фильтрационных и упруго-пластичных процессов, которое заключается в моделировании многокомпонентной, многофазной фильтрации и сорбции в напряженно-деформированных средах. Характерной и малоизученной особенностью таких процессов является существенное влияние напряженного состояния на процессы фильтрации, которые в свою очередь, приводят к перераспределению напряжений и деформаций. Механика насыщенных пористых сред требует привлечения сложного аппарата тензорного анализа. Например, равновесие упругих тел описывается следующим образом. Рассматривают некоторое упругое тело, находящееся под действием внешних сил объемной плотности f_i . При этом частицы тела совершают перемещения $u_i(x)$, где x - координаты частицы в недеформированном состоянии. В рамках геометрически линейной теории упругости деформация тела характеризуется тензором деформации

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (17)$$

След тензора деформации $e = e_{ij}$ есть относительное изменение элемента объема тела при деформировании. В недеформированном состоянии между условно выделенными частями тела отсутствует силовое взаимодействие. При деформировании возникают силы, стремящиеся вернуть тело в недеформированное состояние. Эти силы внутренних упругих напряжений описываются тензором напряжений τ_{ij} , имеющим следующий смысл. Если n_j - вектор единичной внешней нормали к некоторому выделенному объему Ω упругого тела в точке $x \in \partial\Omega$, то вектор $\tau_{ij} n_j ds = \tau_{ij} ds_j$ есть сила, действующая на объем Ω со стороны других частей тела по площадке ds . В равновесии, когда внешние и упругие силы уравновешивают друг друга,

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0. (18)$$

Для того, чтобы деформировать упругое тело из состояния, описываемого полем перемещений $u_i(x)$, в состояние $u_i(x) + \delta u_i(x)$ при постоянной температуре, необходимо совершить работу

$$\delta R = - \int \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i dV = \int \tau_{ij} \delta e_{ij} dV. (19)$$

Эта работа идет на изменение упругой энергии тела (если тепловые эффекты не рассматривать), так что интегрирование проводится по всему объему тела в недеформированном состоянии; U - плотность (относительно недеформированного состояния) упругой энергии (энергия деформации)

$$\delta U = \int \delta U dV = \int \tau_{ij} \delta e_{ij} dV. (20)$$

Из чего вытекает, что

$$\tau_{ij} = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}}. (21)$$

В рамках линейной теории упругости плотность энергии деформации для изотропного тела имеет вид

$$U = \mu e_{ij}^2 + \frac{\lambda}{2} e^2, (22)$$

где μ, λ - коэффициенты Ламе, характеризующие упругие свойства тела.

Закон Гука в этом случае выражается в форме

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e \delta_{ij}. (23)$$

В качестве упругих характеристик изотропного тела используют также модуль всестороннего сжатия $K = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$, где V - удельный объем тела; p - давление; ν и коэффициент Пуассона σ . Эти модули упругости связаны с коэффициентами Ламе соотношениями

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, (24)$$

$$\lambda = \frac{3\sigma}{1 + \sigma} K, \mu = \frac{3(1 - 2\sigma)}{2(1 + \sigma)} K. (25)$$

Коэффициент μ называется также модулем сдвига. Из условий термодинамического равновесия следует, что: $K > 0$, $\mu > 0$, $0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$.

Уравнения равновесия изотропных тел в смещениях получаются подстановкой и имеют вид ($\lambda, \mu = const$)

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + f_i = 0. (26)$$

Механика деформации насыщенных пористых тел также основана на системе некоторых предположений. Рассматривают однородное (в макроскопическом смысле) пористое тело, поры которого заполнены слабосжимаемым флюидом плотности

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{p - p_0}{K_f}\right), (27)$$

где K_f - коэффициент сжимаемости флюида при постоянной температуре.

Под действием внешних сил частицы тела совершают перемещения $u_i(x)$, а частицы флюида перемещения - $v_i(x)$. Тензор деформации скелета

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). (28)$$

Тензор напряжений в пористом теле

$$\tau_{ij} = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}}. (29)$$

Условие равновесия

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0. (30)$$

Работа, совершаемая над системой «пористое тело – флюид» при вариации смещений частиц скелета на δu_i и частиц флюида на δv_i состоит из частей соответствующих совместному перемещению частиц скелета и флюида перемещению флюида относительно скелета. При этом смещения на границах обращаются в 0.

Полная работа

$$\delta R = \int (\tau_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} - p \frac{\partial \delta q_i}{\partial x_i}) dV. (31)$$

Эта работа идет на изменение упругой энергии системы. Пусть задана некоторая функция $U = U(e_{ij}, f)$. Тогда

$$\tau_{ij} = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}}, p = \frac{\partial U}{\partial f}. (32)$$

Физический смысл f состоит в том, что f есть дополнительный объём к некоторому принятому за уровень объёма флюида при $p = 0$. В рамках линейной теории упругости для изотропного насыщенного пористого тела

$$U = \mu e_{ij}^2 + \frac{\nu}{2} e^2 + \frac{\alpha}{2} f^2 - \beta f e, (33)$$

где μ, α, ν, β - некоторые коэффициенты, зависящие от x .

Выражения для тензора напряжений

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \nu e \delta_{ij} - \beta f \delta_{ij}, (34)$$

а для порового давления

$$p = \alpha f - \beta e. (35)$$

Подставляя значение f по определению, тензор напряжений можно получить в виде

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \nu e \delta_{ij} - \zeta p \delta_{ij}, (36)$$

где $\zeta = \frac{\beta}{\alpha}, \lambda = \nu - \zeta\beta = \nu - \frac{\beta^2}{\alpha}$.

Физический смысл упругих модулей пористых тел заключается в физическом смысле феноменологических коэффициентов μ, ν, α, β и их связью с измерениями. Для количественных характеристик рассматривают следующие способы деформирования насыщенных пористых тел: дренажное деформирование происходит при постоянном давлении флюида в порах; не дренажное деформирование имеет место при постоянной массе флюида, содержащейся в пористом теле. В случае дренажного деформирования $p = p_0$ и тензор напряжений имеет вид

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \nu e \delta_{ij} - \zeta p_0 \delta_{ij}, (37)$$

В дальнейшем полагаем $p_0 = 0$. Разлагая произвольную деформацию на сдвиг и всестороннее сжатие, получим модуль сжатия для дренажных условий

$$K_d = \lambda + \frac{2}{3}\mu. (38)$$

При не дренажном деформировании не происходит перетекания флюида через ограничивающую тело поверхность. Подобно телам с "закрытыми порами" в рассматриваемом случае не происходит относительного смещения жидких частиц $q_i = 0$ соответственно $f = 0$. Таким образом поровое давление есть

$$p = -\beta e, (39)$$

а тензор напряжения

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + (\lambda + \zeta\beta)e \delta_{ij}, (40)$$

Модуль объемного сжатия для не дренажных условий

$$K_u = \lambda + \frac{2}{3}\mu + \zeta\beta = K_d + \zeta\beta = K_d + \zeta^2\alpha. (41)$$

Выражение для энергии

$$U = \mu(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e)^2 + \frac{K_d}{2}e^2 + \frac{\alpha}{2}(f - \zeta e)^2. (42)$$

Так как энергия должна иметь минимальное значение при отсутствии деформаций ($e_{ij} = 0$) и избытка флюида ($f = 0$), то должны быть выполнены неравенства

$$\mu > 0, K_u \geq K_d > 0, \alpha > 0.$$

При деформирование пористого тела, насыщенного флюидом, при котором тело подвергается равномерному всестороннему сжатию с постоянным давлением, равным поровому, тензор напряжений одинаков как в скелете (который деформируется однородно), так и во флюиде. Хотя такое деформирование возможно только для тел специальной структуры, по крайней мере имеющих однородный скелет, рассмотрение такого случая представляет интерес для установления качественных соотношений между модулями сжатия скелета K_s (как сплошной среды) и флюида K_f с модулями насыщенного пористого тела. С одной стороны, подобно равномерному всестороннему сжатию однородного скелета тела тензор напряжений имеет вид,

$$\tau_{ij} = K_s e \delta_{ij} = -p \delta_{ij}, \quad (43)$$

где K_s модуль объемного сжатия скелета.

С другой стороны, так как при всестороннем сжатии тензор деформации имеет вид

$$e_{ij} = \frac{e}{3} \delta_{ij}, \quad (44)$$

то тензора напряжений

$$\tau_{ij} = (K_d e - \zeta p) \delta_{ij}, \quad (45)$$

Сравнивая эти выражения для тензора напряжений, нетрудно определить коэффициент рыхлости ζ через определяемые экспериментально упругие объемные модули

$$\zeta = 1 - \frac{K_d}{K_s} < 1.$$

Отсюда, учитывая связь между упругими модулями,

$$\alpha = \frac{K_u - K_d}{(1 - \frac{K_d}{K_s})^2}, \beta = \frac{K_u - K_d}{1 - \frac{K_d}{K_s}}. \quad (46)$$

Масса флюида в некотором элементе объема насыщенного пористого тела, находящемся в недеформированном состоянии, есть $\mu \rho_0 \delta V_0$, в деформированном состоянии $\mu \rho \delta V$. Здесь $\delta V_0, \delta V$ - начальный объем и объем деформированного пористого тела соответственно; ρ_0, ρ - плотность до и после деформирования; пористость m рассматриваемом деформировании не изменяется. С точностью до членов более высокого порядка $\delta V = \delta V_0 (1 + e)$, $\rho = \rho_0 (1 + \frac{p}{K_f})$, где K_f - модуль объемного сжатия флюида.

Таким образом, изменение массы флюида при деформировании есть

$$m \rho_0 \delta V_0 (e + \frac{p}{K_f}). \quad (47)$$

По смыслу величины f изменение массы флюида можно выразить как

$$\rho_0 f \delta V_0 = \rho_0 \frac{p + \beta e}{\alpha} \delta V_0, \quad (48)$$

тогда

$$m\left(e + \frac{p}{K_f}\right) = \frac{p + \beta e}{\alpha}. \quad (49)$$

При равномерном всестороннем сжатии с давлением, равным поровому $p = -K_s e$. Подставляя это соотношение в последнее выражение и учитывая связь между упругими модулями, получаем

$$K_u - K_d = \frac{K_s \zeta^2}{\zeta - m\left(1 - \frac{K_s}{K_f}\right)}. \quad (50)$$

Так как $K_s > 0, \alpha > 0$, то из последнего равенства находим следующую оценку для коэффициента рыхлости $m\left(1 - \frac{K_s}{K_f}\right) < \zeta < 1$.

Комбинируя эти выражения, получаем

$$m = \frac{\left(1 - \frac{K_d}{K_s}\right)\left(1 - \frac{K_s}{K_u}\right)}{\left(1 - \frac{K_s}{K_f}\right)\left(1 - \frac{K_d}{K_u}\right)}. \quad (51)$$

Конкретная фундаментальная задача в рамках данной работы - рассмотрение математической модели Био, описывающей фильтрацию сжимаемых двухкомпонентных флюидов в пористой среде. Она включает балансные уравнения для компонентов флюида с выражениями для потоков массы согласно закону Дарси с учетом гравитационной силы, наряду с уравнениями линейной теории упругости.

Для решения этой задачи необходимо рассмотреть баланс массы флюида. Рассмотрим элемент пористого тела, имеющий в недеформированном состоянии объем δV_0 , насыщенное слабосжимаемым флюидом массы $m_0 \rho_0 \delta V_0$ при давлении $p_0 = 0$. Пусть в деформированном состоянии этот элемент занимает объем δV , давление флюида p . При этом масса флюида плотности ρ , содержащегося в порах, есть $m \rho \delta V$. В дальнейшем нас будет интересовать величина

$$M = \frac{m \rho \delta V}{\delta V_0}, \quad (52)$$

имеющая смысл массы флюида, отнесенной к объему δV_0 , занимаемому рассматриваемым элементом в недеформированном состоянии. Очевидно, функция M зависит от порового давления p и относительного изменения объема при деформировании e . Считая деформации малыми и тело изотропным, разложим в ряд по степеням e и p до членов второго порядка

$$M = M_0 + Ae + Bp, \quad (53)$$

$M_0 = m_0 \rho_0$, $A, B = \text{const}$ - коэффициенты разложения.

В случае не дренажного деформирования рассматриваемая масса постоянна ($M = M_0$). Подставляя в выражение для порового давления при не дренажном деформировании ($f = 0$), имеем $A = B\zeta\alpha$.

Рассматривая дренажное деформирование ($p = 0$), получим

$$M = M_0 + Ae. \quad (54)$$

Масса избыточного флюида на единицу недеформированного объема есть

$$M - M_0 = \rho_0 f = \zeta\rho_0 e. \quad (55)$$

Таким образом, $A = \zeta\rho_0$, $B = \frac{A}{\zeta\alpha} = \frac{\rho_0}{\alpha}$, и $M = M_0 + \rho_0(\zeta e + \frac{p}{\alpha})$. Подставляя сюда выражение для феноменологического коэффициента α через объемные модули упругости K_u, K_d , окончательно получим зависимость рассматриваемой массы M от порового давления и деформации в следующем виде

$$M = M_0 + \rho_0(\zeta e + \frac{\zeta^2 p}{K_u - K_d}). \quad (56)$$

Выражение в скобках есть f .

Баланс массы флюида, заключенного в элементе пористого тела, имеет вид

$$\frac{d}{dt} m\rho\delta V = \delta V_0 \frac{dM}{dt} = -\delta V \operatorname{div} \rho \bar{V}, \quad (57)$$

где \bar{V} - скорость фильтрации.

Ограничиваясь линейной теорией, можно получить уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_0 \bar{V} = 0, \text{ или } \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{V} = 0. \quad (58)$$

Эта система уравнений замыкается уравнением движения флюида в форме закона Дарси. Данные соотношения получены в рамках модели Био, которая описывает фильтрационный процесс и вызываемое им напряженно-деформированное состояние пористой среды. Ввиду того что уравнения упругости квазистатические, эта модель квазистатическая. Характерной особенностью процессов, описываемых моделью Био, является влияние напряженно-деформированного состояния среды на происходящие в ней процессы фильтрации.

Чтобы составить представление о характере процессов, описываемых в рамках модели Био, нужно применить оператор $\frac{\partial}{\partial x_i}$ к уравнению () системы. Тогда, учитывая и полагая

$\lambda, \mu = \text{const}, \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$, получим

$$(2\mu + \lambda)\Delta e = \zeta\Delta p \text{ и } \frac{\partial f}{\partial t} = \chi\Delta f, \quad (59)$$

где Δ - оператор Лапласа с коэффициентом пьезопроводности $\chi = \frac{K}{\eta} \frac{K_u - K_d}{\zeta^2 (1 + \gamma)}$, где

$$\gamma = \frac{1 + \sigma_d}{3(1 - \sigma_d)} \left(\frac{K_u}{K_d} - 1 \right).$$

Таким образом, флюидонасыщенность удовлетворяет параболическому уравнению. Граничные условия ставятся либо на давление, либо на поток флюида. Зная коэффициент пьезопроводности, можно оценить характерные времена процессов, описываемых уравнениями Био.

Нестационарные уравнения Био учитывают нестационарные эффекты, обусловленные инерцией скелета и заполняющего поровое пространство флюида. Модель сплошной среды, в рамках которой можно описать динамику системы "скелет + флюид". (в дальнейшем, для краткости, систему) представляет собой объединение двух взаимопроникающих континуумов. Один континуум служит для описания движений скелета, второй - для описания течения флюида. Идея взаимопроникающих континуумов уже описывалась выше, когда вводилось понятие скорости фильтрации. Один из континуумов, соответствующий скелету, был неподвижен и его роль сводилась к созданию трения. Второй соответствовал фильтрующемуся флюиду. Координаты точек первого континуума свяжем с координатами частиц скелета: $r_1 = r_1(0) + u$, где $r(0)$ - положение частицы в недеформированном состоянии. Ясно, что $\frac{dr_1}{dt} = \frac{du}{dt}$, так что u могут быть сами приняты в качестве обобщенных координат.

Координаты точек второго континуума введем из условия

$$\frac{dr_2}{dt} = \overline{V(t, r_2)}, r_2 = r_2(0) + \int_0^t \overline{V(t', r_2(t'))} dt', (60)$$

где $r_2(0)$ - положение точки в некоторый момент, принятый за начальный. Так же как для первого континуума удобнее в качестве обобщенной координаты рассматривать смещения

$q = r_2 - r_2(0)$, при этом $\frac{dq}{dt} = \overline{V} \cdot q$ не являются смещениями частиц флюида относительно

скелета. В случае однородного пористого тела, где r_f и $r_f(0)$ - положение частицы флюида

в текущий и начальный моменты времени. Для неоднородного пористого тела $\frac{dmr_f}{dt} = \frac{dq}{dt}$.

Кинетическая и "потенциальная" энергии системы, а также ее диссипативная функция могут быть вычислены из следующих соображений. Будем считать, что скорость изменения состояния системы достаточно мала, так что поле скорости флюида относительно скелета может быть представлено в виде

$$w_i(x) = a_{ik}(x) \overline{V_k(x)}. (61)$$

Быстроосциллирующие коэффициенты a_{ik} зависят от координат частицы флюида в поре и определяются геометрией порового пространства, скорость фильтрации $\overline{V_k(x)}$ является медленноменяющейся ("макроскопической") функцией пространственных переменных. Кинетическая энергия единицы объема пористого тела есть

$$T = (1 - m) \frac{\rho_s}{2} \dot{u}_i^2 + \frac{\rho_f}{2} \int (\dot{u}_i + w_i)^2 dV_f. (62)$$

Здесь: ρ, ρ_f - плотности скелета и флюида; u_i, \dot{u}_i - смещения и скорость частиц скелета; интегрирование проводится по объему порового пространства, что подчеркивает индекс f .

С учетом последних соотношений выражение для T принимает вид

$$T = \frac{\rho}{2} \dot{u}_i + \rho_f \dot{u}_i \bar{V}_i + \frac{1}{2} \gamma_{ij} \bar{V}_i \bar{V}_j, (63)$$

где $\rho = m\rho_f + (1 - m)\rho_0$ - средняя плотность насыщенного пористого тела, $\gamma_{ij} = \rho_f \int a_{ki} a_{kj} dV_f$.

Для изотропного тела $\gamma_{ij} = \gamma \delta_{ij}$, так что

$$T = \frac{\rho}{2} \dot{u}_i + \rho_f \dot{u}_i \bar{V}_i + \frac{\gamma}{2} \bar{V}_i^2. (64)$$

Представив скорость фильтрации в виде $\bar{V}_i = \dot{q}_i$ и проинтегрировав по всему объему пористого тела, получим выражение для полной кинетической энергии системы

$$T = \int \left(\frac{\rho}{2} \dot{u}_i^2 + \rho_f \dot{u}_i \dot{q}_i + \frac{\gamma}{2} \dot{q}_i^2 \right) dV. (65)$$

Наряду с кинетической энергией система обладает также "потенциальной" упругой энергией, плотность которой дается формулой. Полная "потенциальная" энергия есть

$$U = \int \left(\mu e_{ij}^2 + \frac{\nu}{2} e^2 + \frac{\alpha}{2} f^2 - \beta f e \right) dV. (66)$$

В последних соотношениях интегрирование проводится по объему в недеформированном состоянии, соответственно, плотности вычисляются относительно этого объема; $\rho, \rho_f, \gamma, \mu, \nu, \alpha, \beta = const$. При смещении частиц флюида относительно скелета с конечной скоростью происходит диссипация энергии. При фильтрации со скоростью \bar{V} интенсивность диссипации энергии в единице объема составляет

$$\frac{\eta \bar{V}_i^2}{K} = \frac{\eta \dot{q}_i^2}{K}.$$

Так как интенсивность диссипации является квадратичной функцией по обобщенным скоростям \dot{q}_i , то диссипативная функция системы имеет вид

$$D = \int \frac{\eta}{2K} \dot{q}_i^2 dV. (67)$$

Отметим, что $T = T(u_i, \dot{q}_i)$, а $u = u(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial q_i}{\partial x_j})$, $D = D(\dot{q}_i)$. Рассматривая u_i, q_i как обобщенные координаты и учитывая сделанное замечание, уравнения Лагранжа могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta T}{\delta \dot{u}_i} = - \frac{\delta U}{\delta u_i}, (68)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_i} = - \frac{\delta U}{\delta q_i} - \frac{\delta D}{\delta \dot{q}_i}.$$

Здесь символ $\frac{\delta}{\delta \varphi}$ обозначает функциональную производную ($\varphi = u_i, q_i, \dot{u}_i, \dot{q}_i$).

Смысл функциональной производной состоит в следующем. Пусть функционал ϕ зависит от скалярной функции φ и ее производных $\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \dots$ (в рассматриваемом случае до первого порядка). Если при "достаточно произвольной" функции $\psi(x)$ возможно представление

$$\phi(\varphi + \varepsilon \psi) - \phi(\varphi) = \varepsilon \int \chi(\varphi, \varphi_i) \psi(x) dx + o(\varepsilon), (69)$$

то функция $\chi(\varphi, \varphi_i)$ есть функциональная производная от $\phi(\varphi, \varphi_i)$: $\chi(\varphi, \varphi_i) = \frac{\delta \phi}{\delta \varphi}$.

Аналогичным образом обстоит дело, если функционал зависит от набора функции и их производных.

Подставляя в последние соотношения конкретный вид функционалов T, U, D получим уравнения движения системы

$$\frac{d}{dt} (\rho \dot{u}_i + \rho_f \dot{q}_i) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_{ij}}, (70)$$

$$\frac{d}{dt} (\rho_f \dot{u}_i + \gamma \dot{q}_i) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\eta}{K} \dot{q}_i.$$

В этих уравнениях производные $\frac{d}{dt}$ имеют различный смысл: в первом уравнении производная вычисляется при фиксированном u_i , т.е. вдоль траектории точки первого континуума; во втором - при фиксированном q_i . В рамках линейной теории $\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial m}{\partial t} = 0, \rho_s, \rho_f = 0$, так что окончательно уравнения движения континуумов примут вид

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, (71)$$

$$\rho_f \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\eta}{K} \bar{V}_i.$$

Здесь мы исключили из уравнений обобщенные координаты q_i точек второго континуума, так как они не имеют физического смысла. Действительно, замена $q_i \rightarrow q_i + \psi_i(x)$ произвольная функция пространственных переменных, удовлетворяющая условию соленидальности $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} = 0$, не меняет уравнений движения системы и соотношений

$$\tau_{ij} = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}} = 2\mu e \delta_{ij} - \zeta p \delta_{ij},$$

$$p = \frac{\partial U}{\partial f} = \alpha f - \beta e,$$

$$f = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i}.$$

Физически это означает произвольность выбора начального положения точек второго континуума, от которого отсчитываются смещения q_i . Другими словами, одну порцию флюида можно заменить на другую не изменив при этом состояние системы "скелет+флюид". Шесть уравнений движения системы содержат семь неизвестных функций u_i, \bar{V}_i, p . Седьмое уравнение для давления получается дифференцированием f по t , что дает

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div} \bar{V} = 0, (72)$$

где, как и раньше, флюидонасыщенность f связана с e и p вторым соотношением.

Уравнения движения континуумов совместно с соотношениями для τ_{ij} и f описывают динамику системы "скелет+флюид" в рамках модели взаимопроникающих континуумов.

В представляемой работе приведены решения конкретной задачи двухфазной фильтрации в пористой среде флюидов с несмешивающимися компонентами газ-вода, описываемые системой дифференциальных уравнений и математическое моделирование напряженно-деформированного состояния насыщенной пористой среды, вызванного фильтрацией жидкости.

3. Миграция углеводородов в реальных геологических регионах

В случае решения конкретной задачи двухфазной фильтрации объемные насыщенности фаз s_1 и s_2 - доли объема порового пространства, занятые, соответственно, первой и второй фазами. $s_1 + s_2 = 1$. Скорости фильтрации - $\bar{V}_l(x) (l=1,2)$ каждой из фаз, так что $\bar{V}_l(x) d\bar{S}$ есть объем фазы a , протекшей через элемент площади $d\bar{S}$ за единицу времени. Уравнения движения фаз записывают в виде законов Дарси для каждой из фаз. Так как $s_1 + s_2 = 1$, то удобнее работать с одной насыщенностью. Пусть первая фаза $s_1 = S$. Тогда

$s_2=1$ -S. Капиллярная разность давлений играет роль лишь на малых пространственных масштабах. В Этих задачах ею можно пренебречь, считая $p_1 = p_2 = p$.

В исходных предпосылках полагалось, что снизу на определенном уровне находится постоянно действующий линейный источник флюидов, создающий градиент порового давления, больший геостатического давления. Разность градиентов заставляет нарастающую массу двухфазной смеси флюидов газ-вода продвигаться по линиям тока, пока разность порового и геостатического давления не станет равной нулю.

Закон Дарси для конкретной задачи, решение которой представляется

$$\vec{V}_l = -\frac{kK_{rl}}{\mu}(\mathbf{grad} P - \rho_l \vec{g}), \quad (73)$$

где \vec{V}_l - скорость фильтрации, $k = k(\vec{r})$ - тензор абсолютной проницаемости, $K_{rl} = K_{rl}(s_l)$ - относительные фазовые проницаемости для l -го компонента, где $l = w, g$, в случае воды или газа, соответственно, $\rho_l(P)$, $\mu_l(P)$ - плотности и вязкости флюидов, \vec{g} - ускорение свободного падения, P - давление, \vec{r} - радиус-вектор.

Система уравнений неразрывности

$$\frac{\partial(m\rho_w s_w)}{\partial t} = \mathbf{div}\left[\frac{kK_{rw}\rho_w}{\mu_w}(\mathbf{grad} P - \rho_w \vec{g}) - q_w\right], \quad (74)$$

$$\frac{\partial(m\rho_g(1-s_w))}{\partial t} = \mathbf{div}\left[\frac{kK_{rg}\rho_g}{\mu_g}(\mathbf{grad} P - \rho_g \vec{g}) - q_g\right],$$

где $m(\vec{r}, p)$ - пористость пласта, q_w, q_g - объемные расходы флюидов на единицу объема в единицу времени, s_w - водонасыщенность, при этом P и s_w - независимые переменные.

Система уравнений замыкалась термодинамическими соотношениями. Вода считалась несжимаемой, а газ - идеальным. Уравнение состояния метана

$$\rho_g = \frac{Mp}{RT}, \quad (75)$$

где T - температура, которая считалась постоянной, M - молекулярная масса метана, так что $\rho_g = cp$, где $c = \text{const}$.

4. Дискретная модель

Для нерегулярных сеток были разработаны вычислительные алгоритмы численного интегрирования уравнений. Алгоритмы были построены методом опорных операторов, т.е. построены согласованные разностные аналоги основных дифференциальных тензорных операторов и на их основе разностные схемы для системы дифференциальных уравнений, описывающих двухфазную фильтрацию несмешивающихся флюидов в пористой среде. Согласование заключалось в тождественной выполнимости для разностных аналогов основных интегральных тождеств. Построенные схемы сохраняют такие важные свойства дифференциальной задачи, как дивергентность, положительность эллиптического оператора, самосопряженность и т.д. Построение разностной аппроксимации системы уравнений двухфазной фильтрации на нерегулярной сетке обусловлено их согласованием со сложной геометрической структурой коллекторов.

Рассмотрим разностную сетку, состоящую из множества ребер, соединяющих пары узлов в стороны треугольных или четырехугольных ячеек, упорядоченных в систему

базисов, ковариантные (исходные) орты каждого из которых направлены вдоль ребер. Будем также рассматривать контравариантный (сопряженный) базис, орты которого являются взаимными по отношению к исходным. Все скалярные функции будем измерять на множестве узлов (включая граничные, где сеточная функция задана, и где обращаются в нуль нормальные компоненты потоков). Значение скалярной функции в базисе берется в центральном узле, образующем базис. Объем ячейки разобьем на базисные объемы. Пусть базис образован ребрами. Тогда компоненты $\text{grad } P$ можно определить. Суммирование выполняется по двум узлам, образующим ребро. Схемы, допускающие преобразования такого типа, назовем полностью консервативными для уравнений фильтрации в предположении сжимаемости флюидов. Для устранения вычислительной неустойчивости возникающей обычно в зоне, где $K(s)=0$, систему уравнений записывают в потоковой форме, т.е. в виде системы алгебраических уравнений, вводя аппроксимируемые специальным образом вверх по потоку доли от полного потока. С этой же целью вводится искусственная диффузия сеточной функции. Тензорность диффузионного коэффициента необходима также для учета геометрической анизотропии расчетного региона.

Уравнения (73-75) аппроксимировались на нерегулярных разностных сетках, общий вид которых применительно к конкретным расчетным областям показан на рис.1.

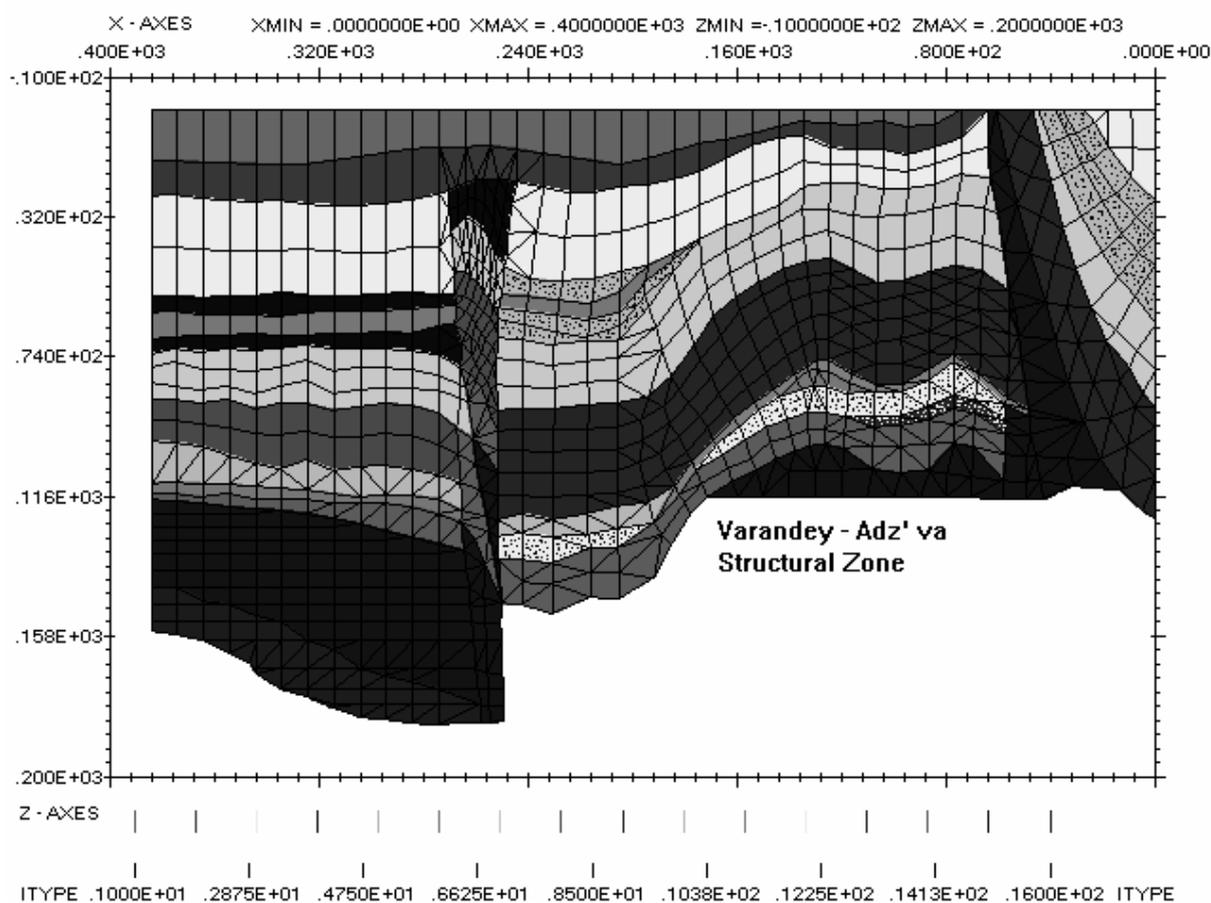


Рис1. Генерация нерегулярной сетки на примере сложно структурированного региона Тимано-Печерья

Как уже отмечалось, использование таких сеток обусловлено сложной геометрической структурой коллекторов.

Разностные аналоги уравнений записываются во всех узлах сетки и имеют вид

$$mVs_t + \sum_{\gamma(w)} \sigma_\gamma \overline{V}_w^\gamma = 0, (76)$$

$$mV(\rho_g(1-s))_t + \sum_{\gamma(w)} \sigma_\gamma (\rho_g \overline{V}_g)^\gamma = 0,$$

где: V - объем, приписываемый узлу (площадь заштрихованной фигуры); s, ρ_g - соответственно, водонасыщенность и плотность газа в узле; суммирование проводится по всем ребрам, выходящим из узла; конструкции $\sigma_\gamma \overline{V}_w^\gamma, \sigma_\gamma (\rho_g \overline{V}_g)^\gamma$ - потоки воды и газа от узла по ребру γ , которые вычисляются на неявном временном слое; $(.)_t$ разностная производная по времени.

Для аппроксимации потоков использовался метод опорных операторов. Входящие в выражение для потоков относительные проницаемости вычислялись по значению водонасыщенности в узле рассматриваемого ребра с максимальным давлением. Такой алгоритм учитывает гиперболические свойства системы и соответствует устойчивой аппроксимации "вверх по потоку".

5.Расчеты типичных прикладных задач

В качестве характерных примеров использования изложенных методов для решения типичных геологических и промысловых задач рассмотрим три модели. Первая из них относится к исследованию процесса миграции углеводородов и образования нефтяных и газовых месторождений в Лено-Вилуйском регионе, профильный разрез которого с указанием коллекторных свойств представлен на рис 2.

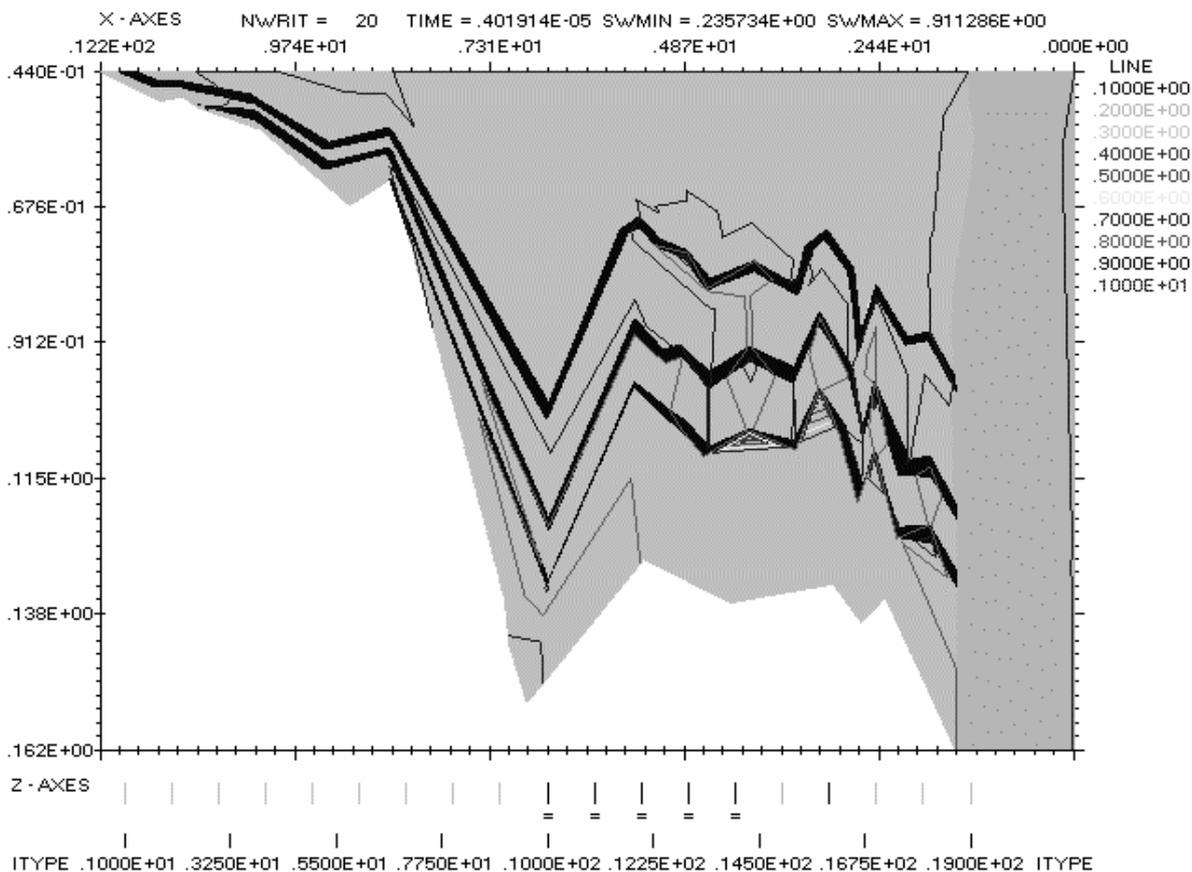


Рис.2. Крупномасштабная миграция углеводородов Лено-Вилуйском регионе

В данном регионе работают два механизма генерации углеводородов --- переработка органического вещества в нижней части осадочного бассейна и термолиз биогенных компонентов осадков в зоне поддвига литосферных плит. В математической постановке задачи первому механизму соответствует распределенный источник газа на нижней границе области от Нижне-Виллюйской до Средне-Виллюйской платформы, т.е. на участке АВ. Второму механизму соответствует зона повышенной трещиноватости, расположенная справа, и дополнительный источник газа в этой зоне. В данной задаче в качестве начальных данных заданы водонасыщенность $s=0.9$ и равновесное распределение давления $p = p_a + \rho_w g z$, где $p_a=10^5$ Па - атмосферное давление, величина z отсчитывается от горизонтальной поверхности. На границах ставились условия непротекания для нормальных компонент потоков $(\rho_w \overline{V_w})_n = (\rho_g \overline{V_g})_n = 0$. Область геологического региона моделируется тремя тонкими горизонтальными пропластками с пониженной проницаемостью: К=0.0001 Дарси, $m=0.1$. Область справа - вертикально расположенная "труба" с повышенной проницаемостью: К=1 Дарси, $m=0.1$. Область выше среднего пропластка - сложнокомпозитный регион с небольшой вариацией проницаемости и пористости: К=0.07 ...0.1 Дарси, $m=0.1$...0.125. Наконец, параметры области ниже среднего пропластка: К=0.05 Дарси, $m=0.15$.

Рассматривались два варианта пространственного распределения интенсивности источника: равномерно распределенный по всей границе АВ источник, выделяющий 4.2×10^{16} м³ газа за 70 млн лет; по границе АВ выделяется 20% этого объема газа, остальное количество газа выделяется под зоной повышенной трещиноватости ("трубы").

На рис.3 показано распределение водонасыщенности s в один из моментов времени. Из рисунка видно, что процесс миграции газа протекает достаточно сложно. Можно отметить некоторые характерные эффекты, допускающие естественную геологическую интерпретацию: выделяющийся снизу газ, поднимаясь, упирается в слабопроницаемые покрывки и концентрируется под ними.

Третья рассмотренная задача также относится к проблеме моделирования быстрых флюидодинамических процессов, протекающих в осадочных бассейнах. Особенность рассматриваемой здесь Варандей-Адзвинской структурной зоны, состоит в том, что на начальном этапе формирования осадочно-породного бассейна большую роль играла рифовая зона, которая была заложена в рифе на пассивной окраине, принадлежащей к Восточно-Европейскому континенту. Именно с этой древней рифовой зоной связано образование значительных месторождений нефти и газа. Древний риф образует сильнопроницаемую вертикальную зону, которая служит проводящим каналом для всех флюидов. Механизм, который прокачивает флюиды через этот прогиб, связан с автоколебаниями коровых волноводов. Именно в нем медленные процессы, происходящие в волноводе, трансформируются в импульсные движения флюидов. Наиболее вероятной причиной образования импульсов являются сейсмические сотрясения, которые образуют кластеры в пористой среде. В данной работе этот механизм рассматривается применительно к Варандей-Адзвинской структурной зоне. Эта зона имеет длину 70 км при глубине около 5 км и поперечном размере 20 км. Одним из основных процессов, определяющих формирование залежей углеводородов, является двухфазная фильтрация флюидов (гидротермальных вод, газоконденсата). Быстрые прорывы описываются уравнениями изотермической фильтрации двухфазного флюида. Эти уравнения дополняются уравнением состояния для флюидных фаз и законом Дарси для них. Краевая задача о быстрых прорывах решалась на нерегулярной расчетной сетке. Варандей-Адзвинская структурная зона аппроксимировалась некоторым телом с простой геометрией, на которой была задана сетка, с достаточной точностью отражающая структуру этого района и его литологические и фильтрационные свойства. Эта структура была представлена породами со средней проницаемостью $K=10^{-13} - 10^{-14}$ м² и пористостью $m=0.1$, в которых располагались почти горизонтальные литологические экраны

в виде плохо проницаемых слоев (глинистых пропластов с $K=10^{-16} \text{ м}^2$). Начальная стадия образования газовых месторождений в Варандей-Адзвинской структурной зоне - 350 лет. Первоначально среда была насыщена только водой. В нижней части области, на ее границе, задавался ступенчатый во времени флюидный поток, содержащий газовую фазу. За период примерно в 400 лет газофлюидный импульс достигает поверхностных слоев. Задавался также более слабый импульс. Он двигался в 7 раз медленнее. Если у поверхности слоев есть покрывки и ловушки, то образуются газовые месторождения. Если их нет, то флюидный импульс рассеивается в атмосфере.

Такая схема флюидодинамических процессов использована для исследования ряда регионов. Соответствующая модель описывает процесс образования нефтегазовых месторождений в зонах коллизии литосферных плит. Результаты численных расчетов в рамках этой модели, отражающие последовательные этапы продвижения газофлюидного фронта, позволили описать процессы образования осадочных бассейнов. Как известно, в теории органического происхождения нефти есть принципиальные трудности. Согласно этой теории, углеводороды при соответствующих термодинамических условиях образуются из органического вещества, равномерно рассеянного по всему осадочному покрову. Однако неясно, каким образом рассеянные углеводороды концентрируются в месторождениях, занимающих относительно небольшие объемы. Рассмотренная модель позволяет прояснить наиболее слабое звено в этой теории - механизм движения флюидов, с помощью которого эта концентрация происходит. Существующие теории (например, тепловой конвекции) не в состоянии это объяснить, поскольку энергия этих процессов слишком мала.

На Рис.3 показаны результаты исследований решений задачи, где наглядно проявилась присущая изучаемой среде физическая неустойчивость Релэй-Тейлоровского типа, соответствующая математической нелинейной модели, которая обладает гиперболическими свойствами. Колебательный спектр дает представление ⁿ развивающихся асимптотических колебательных процессах в таких средах. Очевидно, что они носят характер градиентных катастроф.

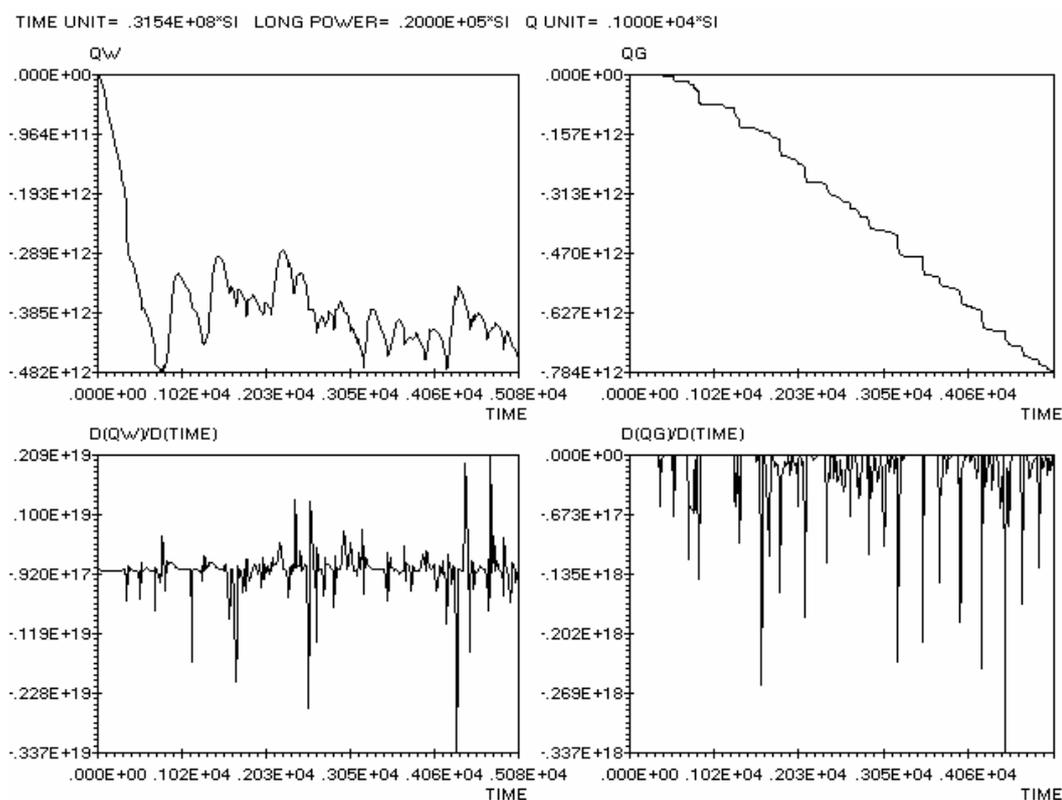


Рис.3. Динамические фрактальные течения в пористой среде на примере Лено-Виллойского региона

На Рис.4 показаны возможности генерации нерегулярных сеток для аппроксимации реального региона Тимано-Печерья расчетной сеткой. На рис.4 показано исследование пространственного распределения давлений в процессе крупномасштабной миграции углеводородов Тимано-Печерья.

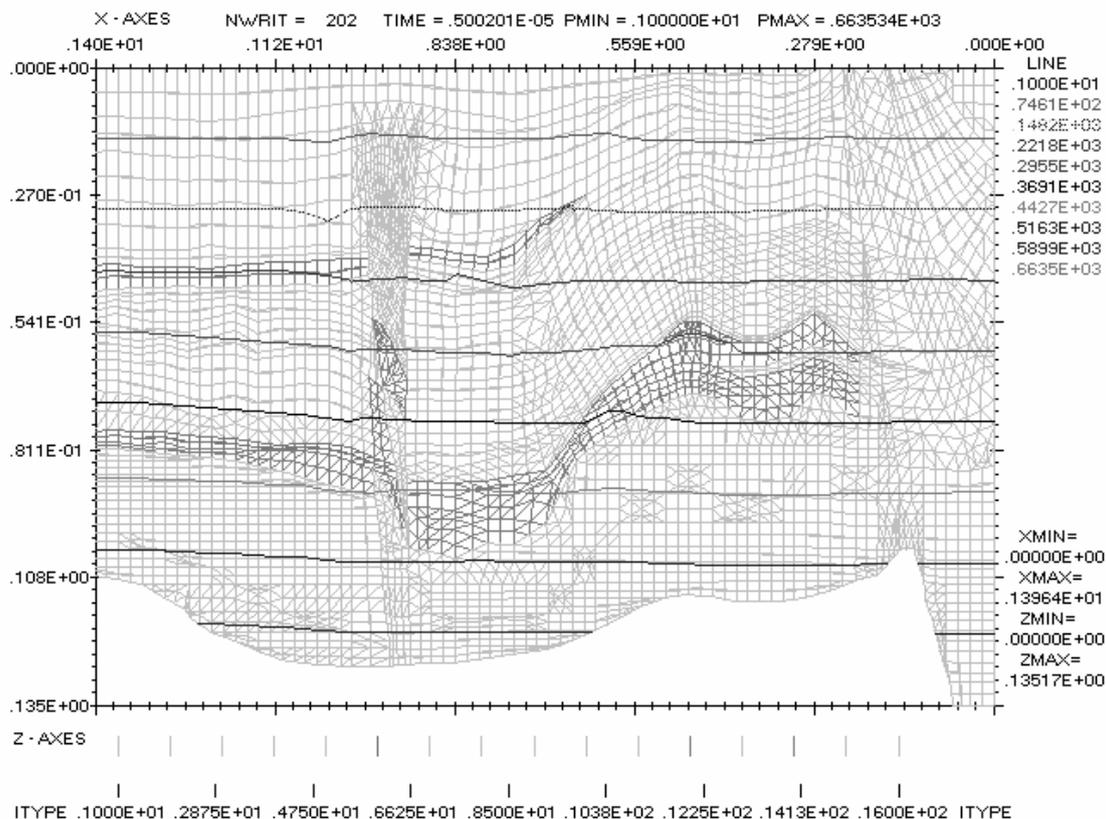


Рис.4. Пространственное распределение давлений в процессе крупномасштабной миграции углеводородов Тимано-Печерья

Литература

1. Казакевич Г.И., Ключкова Л.В., Лобковский Л.И., Минервина Е.А., Пергамент А.Х., Повещенко Ю.А., Самарская Е.А., Соловьев М.С. Метод опорных операторов на нерегулярных сетках в компьютерной технологии прогнозирования при нефти - и газодобыче//М.,1997, препринт ИПМ им. М.В.Келдыша №23.
2. Казакевич Г.И., Ключкова Л.В., Минервина Е.А., Повещенко Ю.А., Самарская Е.А., Соловьев М.С., Тишкин В.Ф. Процессы миграции углеводородов в реальных геологических регионах//М.,Математическое моделирование, 1998, т.10, №6.
3. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Самарская Е.А., Тишкин В.Ф. Методы математического моделирования окружающей среды//М.,Наука, 2000г.

Статья получена: 2009-04-17