УДК 00A71, 93A30

Метод интегродифференциальных неравенств для решения модельных задач динамики гравитирующего газа

Т.Чилачава[1], Н.Кереселидзе[2]

[1]Сухумский гос. университет, temo_chilachava@yahoo.com
[2]Грузинский университет им. св. Андрея Первозванного, tvn@caucasus.net

Аннотация

В данной работе развит эффективный метод определения движения детонационной волны в совершенном газе с учетом гравитационного поля, основанный на двусторонней оценке ее радиуса движения и момента инерции области возмущенного движения газа, использующей интегральные неравенства и соотношения. Для одномерных нестационарных сферически-симметричных адиабатических течений гравитирующего совершенного газа, на основании выведенных уравнений движения среды, уравнений энергии и Лагранжа-Якоби (вириала), получена система интегродифференциальных неравенств для радиуса движения детонационной волны и момента инерции области возмущенного движения. В практически важном случае движения детонационной волны в покоящемся гравитирующем совершенном газе на основании неравенств Гёльдера и Иенсена система неравенств упрощена и полностью представлена в конечном виде. В качестве примеров исследованы соответствующие автомодельные задачи: о движении детонационной волны по равновесному состоянию неоднородного гравитирующего газа; о движении детонационной волны при параболическом или эллиптическом сжатии гравитирующего газа при нулевом давлении (пыли). Анализ полученных результатов показывает, что при больших значений энерговыделений на поверхности сильного разрыва точность оценок значительно улучшается.

Введение

Математическое моделирование астрофизических процессов является одной из актуальных проблем прикладной математики [1 - 15].

Многие проблемы астрофизики требуют для своего решения исследования динамики газовых тел, взаимодействующих с гравитационным полем. Очевидно, что в основу концепций для исследования небесных явлений необходимо положить постановки и решения ряда динамических задач о движениях гравитирующего газа, которые можно рассматривать как математические модели, охватывающие существенные особенности движения и эволюции звезд и туманностей.

Для построения и исследования таких моделей необходимо использовать апробированные методы, аппарат и представления современной теоретической газовой динамики – аэродинамики – и применительно к проблемам астрофизики поставить и разрешить соответствующие механические задачи [1, 4].

Согласно данным многочисленных наблюдений вспышки новых и Сверхновых звезд представляют собой неустановившиеся движения больших масс газа, сопровождающиеся бурным возрастанием излучаемой энергии [2, 3, 5].

Л.И. Седовым даны постановка ряда автомодельных сферически-симметричных задач и примеры точных решений уравнений неустановившегося адиабатического движения газа с учетом гравитационных сил, которые можно рассматривать как схематические модели, отражающие некоторые существенные черты действительных явлений звездных вспышек [1].

Основным существенным и практически важным параметром в этих задачах является закон движения ударной или детонационной волны, возникающей в результате взрыва. Однако классическая формулировка задач на языке дифференциальных уравнений обычно предполагает предварительное полное локальное определение свойств течения гравитирующего газа.

В связи с этим ясно, что важное значение имеет непосредственное приближенное определение искомой интегральной характеристики задачи путем установления системы неравенств, позволяющих получить для нее двусторонние оценки. Во многих случаях эти оценки являются и достаточными для ее решения. Причем небольшое снижение точности оценок в отсутствии гравитации позволяет полностью выразить ответ в элементарных функциях [16, 17].

В данной работе развит эффективный метод определения движения детонационной волны в совершенном газе с учетом гравитационного поля, основанный на двусторонней оценке ее радиуса движения и момента инерции области возмущенного движения газа, использующей интегральные неравенства и соотношения. Для одномерных нестационарных сферически-симметричных адиабатических течений гравитирующего совершенного газа, на основании выведенных уравнений движения среды, уравнений энергии и Лагранжа-Якоби (вириала), получена система интегродифференциальных неравенств для радиуса движения детонационной волны и момента инерции области возмущенного движения. В практически важном случае движения детонационной волны в покоящемся гравитирующем совершенном газе на основании неравенств Гёльдера и Иенсена система неравенств упрощена и полностью представлена в конечном виде. В качестве примеров исследованы соответствующие автомодельные задачи: о движении детонационной волны по равновесному состоянию неоднородного гравитирующего газа; о движении детонационной волны при параболическом или эллиптическом сжатии гравитирующего газа при нулевом давлении (пыли). Анализ полученных результатов показывает, что при больших значений энерговыделений на поверхности сильного разрыва точность оценок значительно улучшается.

1.Уравнения и граничные условия

Будем использовать уравнения адиабатического сферически-симметричного движения гравитирующего газа в лагранжевой форме [13]:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + 4\pi r^2 \frac{\partial p}{\partial m} + \frac{km}{r^2} = 0, \qquad p = (\gamma - 1) f(m) \rho^{\gamma}, \tag{1. 1}$$

$$\rho = [4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial m}]^{-1},$$

здесь m – масса шара радиуса $r(m,t)$, k – гравитационная постоянная, γ - показатель адиабаты, функция $f(m)$ связана с распределением энтропии по лагранжевой координате m. Функция $r = r(m,t)$ определяет закон движения среды, $\frac{\partial r}{\partial t}$ - скорость движения среды, $p(m,t)$ – давление среды, $\rho(m,t)$ – плотность среды.

Первое уравнение системы (1.1) есть уравнение движения среды, второе – уравнение адиабатичности, третье – уравнение неразрывности массы, $r(m,t)$, $p(m,t)$, $\rho(m,t)$ – искомые функции.

Лагранжевая форма записи более удобна, в частности, в задачах, где необходимо также определение движущейся поверхности сильного разрыва (ударная или детонационная волна).

Интегральное уравнение энергии для слоя газа, заключенного между поверхностями $m=0$ и $m=M(t)$ имеет вид:

$$T+U+V=E_0+\int_0^t [\dot{M}(\frac{1}{2}(\frac{\partial r}{\partial t})^2+\frac{p}{(\gamma-1)\rho}-\frac{kM}{R}+Q)-4\pi R^2\frac{\partial r}{\partial t}p]_1\,d\tau \qquad (1.2)$$

$$T=\frac{1}{2}\int_0^M (\frac{\partial r}{\partial t})^2\,dm\,,\qquad U=\frac{1}{(\gamma_2-1)}\int_0^M \frac{p}{\rho}\,dm\,,\qquad V=-k\int_0^M \frac{mdm}{r}\,,\qquad \dot{M}\equiv\frac{dM(t)}{dt}\,,$$

где T,U,V – кинетическая, внутренняя и потенциальная (гравитационная) энергии газа, Q – энергия, выделяющаяся на поверхности $m=M(t)$ при сгорании единицы массы газа, E_0 – энергия взрыва, $m=M(t)$ – закон движения ударной ($Q=0$) или детонационной ($Q\neq 0$) волны по массе, $R(t)=r(M(t),t)$ – радиус ударной или детонационной волны. Индексами 1,2 обозначены соответственно состояния газа перед и за поверхностью сильного разрыва.

Граничные условия на разрыве $r=R(t)$ в эйлеровых координатах имеют вид:

$$[\rho(\dot{R}-\frac{\partial r}{\partial t})]_1^2=0\,,\qquad [p+\rho(\frac{\partial r}{\partial t}-\dot{R})^2]_1^2=0\,, \qquad (1.3)$$

$$[\frac{1}{2}(\frac{\partial r}{\partial t}-\dot{R})^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}]_1^2=Q\,,\qquad [\varphi]_1^2\equiv\varphi_2-\varphi_1$$

Граничные условия на поверхности разрыва $m=M(t)$ в лагранжевых координатах имеют следующий вид:

$$[r]_1^2=0,\quad \left[\frac{\partial r}{\partial t}\dot{M}-4\pi r^2 p\right]_1^2=0$$

$$\left[\dot{M}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2+\frac{p}{(\gamma-1)\rho}-\frac{kM}{R}\right)-4\pi r^2 p\frac{\partial r}{\partial t}\right]_1^2=Q\dot{M} \qquad (1.4)$$

Условия на разрыве (1.3), (1.4), разрешенные относительно параметров газа за детонационной волной, имеют вид:

$$\rho_2=\frac{\gamma_2+1}{\gamma_2-1}\rho_1\left[1+\frac{1}{\gamma_2-1}\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{a_1^2}{\left(\dot{R}-\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_1\right)^2}+1-g\right)\right]^{-1},\quad a_1{}^2=\frac{\gamma_1 p_1}{\rho_1} \qquad (1.5)$$

$$p_2=\frac{1}{\gamma_2+1}\left[p_1+\rho_1\left(\dot{R}-\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_1\right)^2+\rho_1\left(\dot{R}-\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_1\right)^2 g\right]$$

$$\dot{R}-\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_2=\frac{1}{\gamma_2+1}\left(\dot{R}-\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_1\right)\left[\gamma_2+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{a_1^2}{\left(\dot{R}-\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_1\right)^2}-g\right]$$

$$g \equiv \left[\left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{a_1^2}{\left(\overset{\bullet}{R} - \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)_1 \right)^2} \right)^2 + \frac{2(\gamma_2 + 1)(\gamma_1 - \gamma_2) a_1^2}{\gamma_1 (\gamma_1 - 1) \left(\overset{\bullet}{R} - \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)_1 \right)^2} - \frac{2(\gamma_2^2 - 1) Q}{\left(\overset{\bullet}{R} - \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)_1 \right)^2} \right]^{1/2}$$

При этом, естественно, надо учитывать непрерывность эйлеровых и лагранжевых координат.

$$[r]_1^2 = 0, \qquad [m]_1^2 = 0 \tag{1.6}$$

Таким образом, мы получим начально-краевую задачу для нелинейной, неоднородной системы уравнений (1.1) с неизвестными функциями $r(m,t)$, $p(m,t)$, $\rho(m,t)$.

Начальные условия ($t = t_0$, фоновое решение) определяют начальное состояние гравитирующего газового шара и являются точным решением $r_1(m,t)$, $p_1(m,t)$, $\rho_1(m,t)$ системы уравнений (1.1) .

Таким образом, мы рассматриваем начально-краевую задачу в области Ω:

$$\Omega = \{ t \in (t_0, t_*) \ , m \in (0, M(t)) \} ,$$

где t_0 - момент взрыва, t_* - момент времени, когда детонационная волна выходит на поверхность тела (когда $t_0 \ge 0, t_* > 0$) или момент гравитационного коллапса (когда $t_0 < 0, t_* = 0$).

Граничные условия на внешней неизвестной границе $m = M(t)$ имеют вид (1.4),(1.5), а в центре симметрии имеет место следующее

$$r = 0, \qquad m = 0 \tag{1.7}$$

2. Интегральные уравнения энергии и Лагранжа-Якоби

Из уравнений движения среды (1.1) и граничных условий на сильном разрыве (1.4) можно получить интегральное уравнение энергии, описывающее один из универсальных законов ньютоновской механики, закон сохранения энергии (первый закон термодинамики).

Уравнение движения (1.1) умножим на $\frac{\partial r}{\partial t}$

$$\frac{\partial r}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + 4\pi r^2 \frac{\partial p}{\partial m} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{km}{r^2} \frac{\partial r}{\partial t} = 0$$

и проинтегрируем по dm на отрезке $[0, M(t)]$

$$\int_0^{M(t)} \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} dm + \int_0^{M(t)} 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial m} dm + \int_0^{M(t)} \frac{km}{r^2} \frac{\partial r}{\partial t} dm = 0 \tag{2.1}$$

$$\int_0^{M(t)} \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} dm + 4\pi \int_0^{M(t)} r^2 \frac{\partial r}{\partial t} dp - \int_0^{M(t)} km \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \right) dm = 0$$

Введем обозначения. Первый интеграл в (2.1) обозначим I_1, второй - I_2, третий - I_3.

$$I_1 \equiv \frac{1}{2} \int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm$$

Воспользуемся формулой:

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(t,x)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}dx + \dot{b}(t)f(t,b(t)) - \dot{a}(t)f(t,a(t))$$

Тогда получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{M(t)}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 dm = \frac{1}{2}\int_0^{M(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 dm + \frac{1}{2}\dot{M}(t)\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\Big|_2$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{M(t)}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 dm - \frac{1}{2}\dot{M}(t)\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\Big|_2 \qquad (2.2)$$

Интеграл I_2 можно преобразовать следующим образом

$$I_2 = 4\pi\int_0^{M(t)} r^2\frac{\partial r}{\partial t}dp = 4\pi r^2\frac{\partial r}{\partial t}p\Big|_0^{M(t)} - \int_0^{M(t)} p\frac{\partial}{\partial m}\left[4\pi r^2\frac{\partial r}{\partial t}\right]dm \qquad (2.3)$$

Имеет место простая лемма.

Лемма. Если функция $r = r(m,t)$ обладает непрерывной производной второго порядка, тогда имеет место соотношение

$$\frac{\partial}{\partial m}\left(r^2\frac{\partial r}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(r^2\frac{\partial r}{\partial m}\right) \qquad (2.4)$$

Доказательство. Рассмотрим левую часть (2.4) и продифференцируем

$$\frac{\partial}{\partial m}\left(r^2\frac{\partial r}{\partial t}\right) = 2r\frac{\partial r}{\partial m}\frac{\partial r}{\partial t} + r^2\frac{\partial^2 r}{\partial m\partial t} \qquad (2.5)$$

аналогично продифференцируем и правую часть, тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(r^2\frac{\partial r}{\partial m}\right) = 2r\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial m} + r^2\frac{\partial^2 r}{\partial t\partial m} \qquad (2.6)$$

Сравнивая (2.5), (2.6), согласно теоремы Шварца получим доказательство леммы.

Согласно леммы, из (2.3) получим

$$I_2 = 4\pi r^2\frac{\partial r}{\partial t}p\Big|_2 - \int_0^{M(t)} p\frac{\partial}{\partial t}\left[4\pi r^2\frac{\partial r}{\partial m}\right]dm = 4\pi r^2\frac{\partial r}{\partial t}p\Big|_2 - \int_0^{M(t)} p\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)dm$$

$$I_2 = 4\pi r^2\frac{\partial r}{\partial t}p\Big|_2 - \int_0^{M(t)} p\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)dm$$

Введем обозначение:

$$I_4 \equiv \int_0^{M(t)} p\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)dm$$

$$p\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t};$$

Уравнение адиабатичности (1.1) $p = (\gamma_2 - 1)f(m)\rho^{\gamma_2}$ продифференцируем по времени t

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (\gamma_2 - 1)f(m)\gamma_2\rho^{\gamma_2 - 1}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{p}{\rho}\gamma_2\frac{\partial \rho}{\partial t};$$

$$-\frac{p}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho}\right)-\frac{1}{\rho}\left(\frac{p}{\rho}\right)\gamma_2\frac{\partial \rho}{\partial t}\quad ,\qquad \frac{p}{\rho^2}(\gamma_2-1)\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

$$I_4=-\int_0^{M(t)}\frac{p}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t}dm=-\frac{1}{\gamma_2-1}\int_0^{M(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho}\right)dm\,,\qquad I_2=4\pi r^2\frac{\partial r}{\partial t}p\bigg|_2+\frac{1}{\gamma_2-1}\int_0^{M(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho}\right)dm,$$

$$I_3=-\int_0^{M(t)}km\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\right)dm=-k\int_0^{M(t)}m\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\right)dm=-k\left[\frac{d}{dt}\int_0^{M(t)}\frac{m}{r}dm-\dot{M}\frac{M}{R}\right]=$$

$$=\frac{kM}{R}\dot{M}-k\frac{d}{dt}\int_0^{M(t)}\frac{m}{r}dm$$

$$V_1\equiv\int_0^{M(t)}\frac{m}{r}dm\,,\qquad I_1+I_2+I_3=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{M(t)}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2dm-\frac{1}{2}\dot{M}(t)\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\bigg|_2+4\pi r^2\frac{\partial r}{\partial t}p\bigg|_2+\frac{1}{\gamma_2-1}\int_0^{M(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho}\right)dm+\frac{kM}{R}\dot{M}-k\frac{d}{dt}\int_0^{M}\frac{m}{r}dm=0$$

$$\int_0^{M(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho}\right)dm=\frac{d}{dt}\int_0^{M(t)}\frac{p}{\rho}dm-\frac{p}{\rho}\dot{M}\bigg|_2$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{M(t)}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2dm-\frac{1}{2}\dot{M}(t)\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\bigg|_2+4\pi r^2\frac{\partial r}{\partial t}p\bigg|_2+\frac{1}{\gamma_2-1}\frac{d}{dt}\int_0^{M(t)}\frac{p}{\rho}dm-k\frac{d}{dt}\int_0^{M}\frac{m}{r}dm+$$

$$+\frac{kM}{R}\dot{M}\quad-\frac{1}{\gamma_2-1}\frac{p}{\rho}\dot{M}\;\Big|_2=0$$

Последнее соотношение умножим на $d\tau$ и проинтегрируем на отрезке $[0,t]$

$$T+U-kV-\int_0^t\left\{\dot{M}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2+\frac{p}{(\gamma-1)\rho}-\frac{kM}{R}\right]-4\pi r^2\frac{\partial r}{\partial t}p\right\}_2d\tau=E_0\,,$$

где E_0 энергия взрыва.

Окончательно, учет граничных условий (1.4) даст интегральное уравнение энергии

$$E \equiv T + U - kV_1 = E_0 + \int_0^t \left\{ \dot{M} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} - \frac{kM}{R} + Q \right] - 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} p \right\}_1 d\tau \, , \qquad (2.7)$$

где $V \equiv -kV_1$.

Из уравнений движения (1.1) также можно вывести интегральное уравнение Лагранжа-Якоби, в небесной механике известное как уравнение вириала.

Уравнение движения (1.1) умножим на $r(m,t)$ и проинтегрируем $\int_0^{M(t)} dm$

$$\int_0^{M(t)} r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} dm + \int_0^{M(t)} 4\pi r^3 \frac{\partial p}{\partial m} dm + \int_0^{M(t)} \frac{km}{r} dm = 0 \qquad (2.8)$$

Первый интеграл в последнем равенстве обозначим через I_5, а второй - I_6.

$$I_6 = 4\pi \int_0^{M(t)} r^3 dp = 4\pi r^3 p \Big|_0^{M(t)} - \int_0^{M(t)} p \frac{\partial (4\pi r^3)}{\partial m} dm = 4\pi r^3 p \Big|_2 - 3 \int_0^{M(t)} p \left(4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial m} \right) dm =$$

$$= 4\pi R^3 p \Big|_2 - 3 \int_0^{M(t)} \frac{p}{\rho} dm = 4\pi R^3 p \Big|_2 - 3(\gamma_2 - 1) \frac{1}{\gamma_2 - 1} \int_0^{M(t)} \frac{p}{\rho} dm$$

Так как $U = \frac{1}{\gamma_2 - 1} \int_0^{M(t)} \frac{p}{\rho} dm$, получим

$$I_6 = 4\pi R^3 p \big|_2 - 3(\gamma_2 - 1)U \qquad (2.9)$$

$$I_5 = \int_0^{M(t)} r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} dm, \qquad r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(r \frac{\partial r}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2$$

$$I_5 = \int_0^{M(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(r \frac{\partial r}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right] dm = \int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(r \frac{\partial r}{\partial t} \right) dm - 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{M(t)} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm$$

Так как $T = \frac{1}{2} \int_0^{M(t)} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm,$ получим

$$I_5 = \int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(r \frac{\partial r}{\partial t} \right) dm - 2T$$

Рассмотрим интеграл $\int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(r \frac{\partial r}{\partial t} \right) dm$

$$\int_0^{M(t)} \frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial r}{\partial t}\right) dm = \frac{d}{dt}\left[\int_0^{M(t)} r\frac{\partial r}{\partial t}dm\right] - \dot{M}r\frac{\partial r}{\partial t}\bigg|_2 = \frac{d}{dt}\int_0^{M(t)} r\frac{\partial r}{\partial t}dm - \dot{M}R\frac{\partial r}{\partial t}\Big|_2$$

$$\int_0^{M(t)} r\frac{\partial r}{\partial t}dm = \frac{1}{2}\int_0^{M(t)}\frac{\partial r^2}{\partial t}dm = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{M(t)} r^2 dm - \frac{1}{2}\dot{M}r^2\Big|_2$$

$$I_5 = \frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\int_0^{M(t)} r^2 dm - \dot{M}R^2\right] - \dot{M}R\frac{\partial r}{\partial t}\Big|_2 - 2T \qquad (2.10)$$

Введем обозначение

$$I(t) \equiv \int_0^{M(t)} r^2(m,t)dm, \qquad (2.11)$$

где $I(t)$ есть момент инерции возмущенной области движения гравитирующего газа.

Подставляя найденные значения (2.9), (2.10) в (2.8), с учетом граничных условий (1.4) получим интегральное уравнение Лагранжа-Якоби

$$\Psi \equiv 2T + 3(\gamma_2 - 1)U - kV_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{I}(t) - \dot{M}R^2\right) + R\left(4\pi R^2 p - \dot{r}\dot{M}\right)_1 \qquad (2.12)$$

3. Метод интегродифференциальных неравенств для гравитирующего газа

Смысл предлагаемого нами для гравитирующего совершенного газа метода интегродифференциальных неравенств состоит в следующем: не решая систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, для главной интегральной характеристики задачи (закон движения (радиус) поверхности сильного разрыва (ударная или детонационная волна)) получить двусторонние оценки.

Часто, знание этой интегральной характеристики достаточно для решения практически важных задач.

Метод интегродифференциальных неравенств основан на оценке кинетической, внутренней и гравитационной энергий гравитирующего совершенного газа, полученной из интегральных уравнений энергии и Лагранжа-Якоби при использовании интегральных неравенств Гёльдера и Иенсена.

Оценим внутреннюю энергию

$$U = \frac{1}{\gamma_2 - 1}\int_0^{M(t)}\frac{p}{\rho}dm = \int_0^{M(t)} f(m)\rho^{\gamma_2 - 1}dm, \qquad p = (\gamma_2 - 1)f(m)\rho^{\gamma_2}$$

$$U = \int_0^{M(t)} f(m)\left(4\pi r^2\frac{\partial r}{\partial m}\right)^{1-\gamma_2} dm = \int_0^{M(t)} f(m)\left(\frac{4\pi}{3}\frac{\partial r^3}{\partial m}\right)^{1-\gamma_2} dm$$

$$I=\int_0^{M(t)} f(m)\left(\frac{\partial r^3}{\partial m}\right)^{1-\gamma_2} dm=\int_0^{M(t)}\left[f^{\frac{1}{\gamma_2}}(m)\left(\frac{\partial r^3}{\partial m}\right)^{\frac{1-\gamma_2}{\gamma_2}}\right]^{\gamma_2} dm$$

$$d\equiv f^{\frac{1}{\gamma_2}}(m)\left(\frac{\partial r^3}{\partial m}\right)^{\frac{1-\gamma_2}{\gamma_2}},\quad \alpha=\gamma_2,\quad \beta=\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1},\ h\equiv\left(\frac{\partial r^3}{\partial m}\right)^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}},\quad \alpha^{-1}+\beta^{-1}=\frac{1}{\gamma_2}+\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}=1$$

$$\left(\int_0^{M(t)}\left[f^{\frac{1}{\gamma_2}}(m)\left(\frac{\partial r^3}{\partial m}\right)^{\frac{1-\gamma_2}{\gamma_2}}\right]^{\gamma_2} dm\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}\cdot\left(\int_0^{M(t)}\left[\left(\frac{\partial r^3}{\partial m}\right)^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}}\right]^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1}} dm\right)^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}}\geq$$

$$\geq\int_0^{M(t)} f^{\frac{1}{\gamma_2}}(m)\left(\frac{\partial r^3}{\partial m}\right)^{\frac{1-\gamma_2}{\gamma_2}}\left(\frac{\partial r^3}{\partial m}\right)^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}} dm$$

$$\left(\int_0^{M(t)}\left[f^{\frac{1}{\gamma_2}}(m)\left(\frac{\partial r^3}{\partial m}\right)^{\frac{1-\gamma_2}{\gamma_2}}\right]^{\gamma_2} dm\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}\cdot\left(\int_0^{M(t)}\frac{\partial r^3}{\partial m} dm\right)^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}}\geq\int_0^{M(t)} f^{\frac{1}{\gamma_2}}(m)dm$$

$$\left(\int_0^{M(t)} f(m)\left(\frac{\partial r^3}{\partial m}\right)^{1-\gamma_2} dm\right)^{1/\gamma_2}\cdot R^{\frac{3(y_2-1)}{\gamma_2}}\geq\int_0^{M(t)} f^{1/\gamma_2}(m)dm$$

$$I=\int_0^{M(t)} f(m)\left(\frac{\partial r^3}{\partial m}\right)^{1-y_2} dm\geq R^{3(1-y_2)}\left(\int_0^{M(t)} f^{\frac{1}{\gamma_2}}(m)dm\right)^{\gamma_2}$$

$$U\geq\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{y_2-1} R^{3(1-\gamma_2)}\left(\int_0^{M(t)} f^{1/y_2}(m)dm\right)^{y_2}\equiv U\_ \tag{3.1}$$

Легко получить оценку сверху для кинетической энергии

$$T(t)\leq T_+(t)\equiv\frac{1}{2}\dot{R}^2 M(t) \tag{3.2}$$

Для получения оценки снизу для кинетической энергии $T(t)$ используем неравенство Гёльдера [18]:

Если $\alpha^{-1}+\beta^{-1}=1$, тогда

$$\left(\int_a^b h^\alpha(x)dx\right)^{1/\alpha}\left(\int_a^b g^\beta(x)dx\right)^{1/\beta} \geq \int_a^b h(x)g(x)dx \qquad (3.3)$$

Дифференцируя по времени момент инерции области возмущенного движения газа (2.11) получим

$$\dot I = \int_0^{M(t)} 2r\frac{\partial r}{\partial t}dm + \dot M R^2, \qquad \frac{1}{2}\left(\dot I - \dot M R^2\right) = \int_0^{M(t)} r\frac{\partial r}{\partial t}dm$$

Тогда взяв в (3.3) $h \equiv \dfrac{\partial r}{\partial t}$, $g \equiv r$, $\alpha = \beta = 2$, $a = 0$, $b = M(t)$, получим:

$$\int_0^{M(t)}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 dm \cdot \int_0^{M(t)} r^2 dm \geq \left(\int_0^{M(t)} r\frac{\partial r}{\partial t}dm\right)^2, \quad 2T\cdot I \geq \frac{1}{4}\left(\dot I - \dot M R^2\right)^2$$

$$T \geq \frac{1}{8I}\left(\dot I - \dot M R^2\right)^2 \equiv T_-, \qquad (3.4)$$

что является оценкой снизу для кинетической энергии.

Покажем, что для функции V_1, входящей в выражение для гравитационной энергии ($V \equiv -kV_1$) верна оценка

$$V_1 \geq \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2}\frac{M^{5/2}}{I^{1/2}} \equiv V_-, \quad I = \int_0^{M(t)} r^2 dm$$

В неравенстве Гёльдера (3.3) возьмем

$$\alpha = 3/2, \qquad \beta = 3, \qquad h \equiv \left(\frac{m}{r}\right)^{2/3}, \qquad g \equiv r^{2/3}$$

Тогда

$$\left(\int_0^{M(t)}\left(\left(\frac{m}{r}\right)^{2/3}\right)^{3/2} dm\right)^{2/3} \cdot \left(\int_0^{M(t)}\left(r^{2/3}\right)^3 dm\right)^{1/3} \geq \int_0^{M(t)} m^{2/3} dm$$

$$\left(\int_0^{M(t)}\frac{m}{r}dm\right)^{2/3} \cdot \left(\int_0^{M(t)} r^2 dm\right)^{1/3} \geq \int_0^{M(t)} m^{2/3}dm, \quad V_1^{2/3}\cdot I^{1/3} \geq \frac{3}{5}M^{5/3}$$

Откуда получим

$$V_1\cdot I^{1/2} \geq \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} M^{5/2},$$

или окончательно

$$V_1 \geq \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2}\frac{M^{5/2}}{I^{1/2}} \qquad (3.5)$$

С учетом того, что удельная энтропия с течением времени может расти на ударных волнах, которые могут двигаться за передней детонационной волной, из (1.5) получим

$$f \geq \frac{\left(\gamma_2 + \frac{\gamma_2 a_1^2}{\gamma_1 D^2} - g\right)^{\gamma_2}\left(1 + \frac{a_1^2}{\gamma_1 D^2} + g\right) D^2}{(\gamma_2 - 1)(\gamma_2 + 1)^{\gamma_2+1}\rho_1^{\gamma_2-1}} \tag{3.6}$$

$$a_1^2 \equiv \gamma_1 p_1 / \rho_1, \qquad D \equiv \dot{R} - (\frac{\partial r}{\partial t})_1$$

$$g\left(\frac{a_1^2}{D^2}, \frac{2(\gamma_2^2 - 1)Q}{D^2}\right) \equiv \sqrt{\left(1 - \frac{\gamma_2 a_1^2}{\gamma_1 D^2}\right)^2 + \frac{2(\gamma_2+1)(\gamma_1-\gamma_2)a_1^2}{\gamma_1(\gamma_1-1)D^2} - \frac{2(\gamma_2^2-1)Q}{D^2}}$$

Использование (3.1), (3.4), (3.6) вместе с (1.2), (2.11), (2.12) дает достаточно удовлетворительную систему интегродифференциальных неравенств, содержащих $R(t)$ и $I(t)$ в случае отсутствия гравитации ($k = 0$) и детонации ($Q = 0$) .

Наличие гравитации существенно осложняет задачу из-за отрицательности гравитационной потенциальной энергии V.

Для эффективного использования системы неравенств, необходимо оценить величину V_1 сверху.

Лемма. При $\gamma_2 > 4/3$ имеет место неравенство

$$U \geq G V_1^{4(\gamma_2-1)}\left(V_1 - \frac{M^2}{2R}\right)^{1-\gamma_2}, \quad G \equiv \frac{1}{(8\pi)^{\gamma_2-1}}\left\{\int_0^{M(t)}\left[\frac{m^{2(\gamma_2-1)}}{f(m)}\right]^{1/(3\gamma_2-4)} dm\right\}^{4-3\gamma_2} \tag{3.7}$$

Доказательство.

$$V_1 = \int_0^{M(t)} \frac{m\,dm}{r} = \int_0^{M(t)} \frac{dm^2}{2r} = \frac{m^2}{2r}\Big|_0^M - \int_0^M \frac{m^2}{2} dr^{-1} = \frac{M^2}{2R} + \int_0^M \frac{\frac{\partial r}{\partial m} m^2}{2r^2} dm, \; V_1 - \frac{M^2}{2R} = \frac{1}{2}\int_0^M \frac{\frac{\partial r}{\partial m} m^2}{r^2} dm$$

Неравенство (3.7) перепишется в виде

$$\int_0^M f(m)\frac{dm}{(4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial m})^{\gamma_2-1}} \geq \frac{1}{(8\pi)^{\gamma_2-1}}\left\{\int_0^M\left[\frac{m^{2(\gamma_2-1)}}{f(m)}\right]^{\frac{1}{3\gamma_2-4}} dm\right\}^{4-3\gamma_2}\left(\int_0^M \frac{m\,dm}{r}\right)^{4(\gamma_2-1)}\left(\frac{1}{2}\int_0^M \frac{\frac{\partial r}{\partial m} m^2 dm}{r^2}\right)^{1-\gamma_2}$$

$$\int_0^M f(m)\frac{dm}{(r^2 \frac{\partial r}{\partial m})^{\gamma_2-1}}\left\{\int_0^M\left[\frac{m^{2(\gamma_2-1)}}{f(m)}\right]^{\frac{1}{3\gamma_2-4}} dm\right\}^{3\gamma_2-4}\left(\int_0^M \frac{\frac{\partial r}{\partial m} m^2 dm}{r^2}\right)^{\gamma_2-1} \geq \left(\int_0^M \frac{m\,dm}{r}\right)^{4(\gamma_2-1)}$$

$$\int_0^M f(m)\frac{dm}{(r^2 \frac{\partial r}{\partial m})^{\gamma_2-1}}\left(\int_0^M \frac{\frac{\partial r}{\partial m} m^2 dm}{r^2}\right)^{\gamma_2-1} = \int_0^M\left(\frac{f^{1/\gamma_2}(m)}{(r^2\frac{\partial r}{\partial m})^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}}}\right)^{\gamma_2} dm\left(\int_0^M\left[\left(\frac{m^2 \frac{\partial r}{\partial m}}{r^2}\right)^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}}\right]^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1}} dm\right)^{\gamma_2-1} \geq$$

$$\left(\int_0^M \left(\frac{f^{1/\gamma_2}(m)}{\left(r^2 \dfrac{\partial r}{\partial m}\right)^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}}}\right)\left(\frac{m^2 \dfrac{\partial r}{\partial m}}{r^2}\right)^{\gamma_2-1/\gamma_2} dm\right)^{\gamma_2} = \left(\int_0^M \left(\frac{f(m)m^{2(\gamma_2-1)}}{r^{4(\gamma_2-1)}}\right)^{1/\gamma_2} dm\right)^{\gamma_2}$$

Таким образом, нужно показать, что при $\gamma_2 > 4/3$ имеет место неравенство

$$\left(\int_0^M \left(\frac{f(m)m^{2(\gamma_2-1)}}{r^{4(\gamma_2-1)}}\right)^{1/\gamma_2} dm\right)^{\gamma_2} \left\{\int_0^M \left[\frac{m^{2(\gamma_2-1)}}{f(m)}\right]^{\frac{1}{3\gamma_2-4}} dm\right\}^{3\gamma_2-4} \geq \left(\int_0^M \frac{mdm}{r}\right)^{4(\gamma_2-1)}$$

или

$$\left(\int_0^M \left(\frac{f(m)^{1/4(\gamma_2-1)} m^{1/2}}{r}\right)^{\frac{4(\gamma_2-1)}{\gamma_2}} dm\right)^{\frac{\gamma_2}{4(\gamma_2-1)}} \left\{\int_0^M \left[\frac{m^{1/2}}{f^{\frac{1}{4(\gamma_2-1)}}(m)}\right]^{\frac{4(\gamma_2-1)}{3\gamma_2-4}} dm\right\}^{\frac{3\gamma_2-4}{4(\gamma_2-1)}} \geq \int_0^M \frac{mdm}{r} \tag{3.8}$$

Но (3.8) справедливо в силу неравенства Гёльдера (3.3), так как

$$\alpha = \frac{4(\gamma_2-1)}{\gamma_2} > 1, \text{ при } \gamma_2 > 4/3,$$

что выполнено в силу условия леммы, а

$$\beta = \frac{4(\gamma_2-1)}{3\gamma_2-4} > 1, \text{ так как } \gamma_2 > 0.$$

Таким образом, лемма доказана.

Неравенства (3.5),(3.7) дают алгебраическое неравенство, приводящее к двусторонней оценке V_1

$$\max\left(V_-, \frac{M^2}{2R}\right) < V_1 < V_+ \tag{3.9}$$

При $\gamma_2 = 4/3$ в оценке (3.7)

$$G = \left[ess \max_{[0,M]} \frac{(8\pi)^{1/3} m^{2/3}}{f(m)} \right]^{-1} \tag{3.10}$$

Если используем интегральные уравнения (2.7), (2.12) и оценки (3.1)–(3.10), получим:

В случае $4/3 \leq \gamma_2 \leq 5/3$,

$$\Psi \geq 3(\gamma_2-1)E + (5-3\gamma_2)T_- + (3\gamma_2-4)kV_-,$$

$$\Psi \leq 2E + (3\gamma_2-5)U_- + kV_+ \tag{3.11}$$

при $\gamma_2 > 5/3$

$$\Psi \geq 2E + (3\gamma_2 - 5)U_- + kV_- \qquad (3.12)$$

$\Psi \leq 3(\gamma_2 - 1)E + (5 - 3\gamma_2)T_- + (3\gamma_2 - 4)kV_+$,

здесь U_- максимальная из нижних оценок U, а V_-, V_+ - нижняя и верхняя оценки для V_1.

При $\gamma_2 = 5/3$ нахождение оценок V_-, V_+ возможно решением квадратного неравенства

$$V_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4GE}}{2G}, \qquad 1 + 4GE \geq 0 .$$

В практически важном случае движения детонационной волны в покоящемся газе ($(\frac{\partial r}{\partial t})_1 = 0$) с целью упрощения полученных неравенств дадим оценку F, которая будет представлена в конечном виде.

Введем обозначения

$$\Phi(x, y) \equiv \left[\gamma_2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}x^{\gamma_2} - g(x^{\gamma_2}, y^{\gamma_2})\right]\left[1 + \frac{x^{\gamma_2}}{\gamma_1} + g\left(x^{\gamma_2}, y^{\gamma_2}\right)\right]^{1/\gamma_2} \qquad (3.13)$$

$$x \equiv \left(\frac{a_1}{D}\right)^{2/\gamma_2}, \qquad y = \left[\frac{2(\gamma_2{}^2 - 1)Q}{D^2}\right]^{1/\gamma_2}$$

Лемма. При $\gamma_1 \geq \gamma_2$ функция $\Phi(x, y)$ выпукла.

Доказательство. Можно показать, что при $\gamma_1 \geq \gamma_2$ справедлива система

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} > 0 \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} > 0 \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \end{cases}$$

поэтому функция $\Phi(x, y)$, при $\gamma_1 \geq \gamma_2$ выпукла.

Используя (3.6), а также выпуклость $\Phi(x, y)$, из неравенства Иенсена [18]

$$\int_a^b \varphi(d, h)\mu dx \geq \int_a^b \mu dx \varphi\left(\frac{\int_a^b d\mu dx}{\int_a^b \mu dx}, \frac{\int_a^b h\mu dx}{\int_a^b \mu dx}\right)$$

при выполнении

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial d^2} > 0 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial h^2} > 0 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial d^2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial h^2} - \left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial d \partial h}\right)^2 > 0 \end{cases}$$

получим следующую оценку

$$F \geq \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\gamma_2 - 1} \frac{Z^{\gamma_2}\left[\gamma_2 + \dfrac{\gamma_2 X^{\gamma_2}}{\gamma_1} - g(X^{\gamma_2}, Y^{\gamma_2})\right]^{\gamma_2}\left[1 + \dfrac{X^{\gamma_2}}{\gamma_1} + g\left(X^{\gamma_2}, Y^{\gamma_2}\right)\right]}{(\gamma_2 - 1)(\gamma_2 + 1)^{\gamma_2 + 1}} \tag{3.14}$$

$$Z \equiv 4\pi \int_0^R \dot{R}^{2/\gamma_2} \rho_1^{1/\gamma_2} r^2 dr \geq \frac{W^{(\gamma_2+2)/\gamma_2}}{t^{2/\gamma_2}}, \qquad W \equiv (4\pi)^{\gamma_2/(\gamma_2+2)} \int_0^R \rho_1^{1/(\gamma_2+2)} r^{2\gamma_2/(\gamma_2+2)} dr$$

$$X \equiv \frac{4\pi}{Z}\int_0^R a_1^{2/\gamma_2} \rho_1^{1/\gamma_2} r^2 dr, \qquad Y \equiv \frac{4\pi}{Z}\int_0^R [2(\gamma_2{}^2 - 1)Q]^{\frac{1}{\gamma_2}} \rho_1^{\frac{1}{\gamma_2}} r^2 dr$$

Оценка Z может быть использована в силу монотонности правой части (3.14).

4. Оценка закона движения детонационной волны в гравитирующем газе

Применим развитый выше метод интегральных неравенств к анализу ряда автомодельных задач динамики гравитирующего газа.

4.1. Рассмотрим задачу о движении детонационной волны по равновесному состоянию гравитирующего газа, причем в центре симметрии не происходит выделения энергии (в (1.2) $E_0 = 0$). В случае равновесия газа точное решение уравнений (1.1) перед детонационной волной имеет следующий вид:

$$r = \frac{m}{4\pi A}, p = \frac{2\pi A^2 k}{r^2}, \rho = \frac{A}{r^2}, \tag{4.1}$$

где A - соответствующая размерная постоянная.

Замечание. Детонационные волны (с условием Чепмена - Жуге) в автомодельном движении самогравитирующего газа можно ввести согласно теории размерности только при $\omega = 2$ **в** точном решении системы (1.1)

$$r = \left[\frac{(3-\omega)m}{4\pi A}\right]^{1/(3-\omega)}, \quad p = \frac{k(3-\omega)}{8\pi(\omega - 1)}\left(\frac{4\pi A}{3-\omega}\right)^2 r^{2-2\omega}, \quad \rho = \frac{A}{r^\omega},$$

так как при $\omega \neq 2$ величины A, k, Q имеют независимые размерности и задача становится неавтомодельной.

В силу автомодельности рассматриваемой задачи (4.1) при $\omega = 2$ (только две, например, A, k размерные постоянные с независимыми размерностями) получим

$$R(t) = \sqrt{Ak}R_1 t, I(t) = A^2\sqrt{A}k\sqrt{k}I_1 t^3 \quad , \qquad Q = Q_1 Ak \tag{4.2}$$

Для определенности, положим $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 5/3$, а все величины далее будем считать безразмерными. Тогда из (1.2), (1.4), (2.7), (4.1), (4.2) следует:

$$E = 4\pi(Q_1 - \pi)R_1, \qquad \Psi = 3I_1 - 4\pi R_1^3 + 8\pi^2 R_1 \tag{4.3}$$

Тогда из определения G (3.7), используя (4.1), (4.2) получим:

$$G \cong \frac{0{,}00108}{\pi^3} HR_1, \tag{4.4}$$

$$H\left(R_1^2, Q_1\right) \equiv \left[\frac{5}{3} + \frac{10\pi}{3R_1^2} - \sqrt{\left(1 - \frac{10\pi}{3R_1^2}\right)^2 - \frac{32Q_1}{9R_1^2}}\right]^{5/3} \cdot \left[1 + \frac{2\pi}{R_1^2} + \sqrt{\left(1 - \frac{10\pi}{3R_1^2}\right)^2 - \frac{32Q_1}{9R_1^2}}\right]$$

Наконец, из системы (3.11) при использовании (4.1) – (4.4) для R_1 и I_1 получим систему неравенств, содержащих задаваемый при постановке задачи параметр Q_1

$$\Lambda + \mathrm{B} \le 2R_1(3Q_1 - 4\pi) + 4R_1^3 + \frac{5}{4}K \tag{4.5}$$

$$\frac{4\pi}{15}\left[R_1^3 + 4(Q_1 - 3\pi)R_1 + \Lambda + \mathrm{B}\right] \le I_1 \le \frac{\pi}{3}[4R_1^3 + 8R_1(Q_1 - 2\pi) + K]$$

$$\mathrm{B} \equiv \sqrt{(R_1^3 + 4(Q_1 - 3\pi)R_1 + \Lambda)^2 + 15R_1^6}\ , \ \ \mathrm{K} \equiv \frac{\left[1 + \sqrt{1 + 4GE}\right]\pi^2}{0{,}00216R_1 H}, \qquad \Lambda \equiv 0{,}343R_1^3 H$$

В случае $\gamma = 4/3$ оценки несколько улучшаются в силу отсутствия необходимости решать нелинейное неравенство (3.7) для V_1. Наконец, из (3.11) при использовании (1.4), (2.7), (2.12), (3.10), (4.1), (4.2) можно получить для R_1 и I_1 систему трансцендентных уравнений, содержащих задаваемый при постановке задачи произвольный
параметр $Q_1 \ge 0$

$$4R_1^2 + 6Q_1 + 31{,}16\pi \ge 1{,}745H_1 R_1^2 + N \tag{4.6}$$

$$\frac{4\pi R_1}{15}(R_1^2 + 4Q_1 + N) \le I_1 \le \frac{\pi R_1}{3}(4R_1^2 + 8Q_1 + 24{,}93\pi - 1{,}396H_1 R_1^2)$$

$$N \equiv \sqrt{(R_1^2 + 4Q_1)^2 + 15R_1^4}$$

$$\mathrm{H}_1(R_1^2, Q_1) \equiv \left[\frac{4}{3} + \frac{8\pi}{3R_1^2} - \sqrt{\left(1 - \frac{8\pi}{3R_1^2}\right)^2 - \frac{14Q_1}{9R_1^2}}\right]^{4/3} \left[1 + \frac{2\pi}{R_1^2} + \sqrt{\left(1 - \frac{8\pi}{3R_1^2}\right)^2 - \frac{14Q_1}{9R_1^2}}\right]$$

В таблице 1 для некоторых значений Q_1 приведены численные решения систем неравенств (4.5), (4.6). Через $\Delta_{\pm}$ обозначены средние относительные погрешности, R_{1-}, R_{1+}, I_{1-}, I_{1+} - соответственно нижние и верхние оценки для R_1, I_1.

γ	Q_1	R_{1-}	R_{1+}	I_{1-}	I_{1+}	$\Delta_{\pm}\%(R_1)$	$\Delta_{\pm}\%(I_1)$
$5/3$	0	3,236	8,26	_	_	43,7	_
	π	5,31	10,31	707,5	4996,7	32	75
	$4\pi/3$	5,7	9,9	_	_	26,7	_
	2π	6,37	10,5	1335	5483	24,5	60,8
	30π	18,86	23,6	42563	69518	11,16	24
	126	21,65	26,65	–	–	10,17	–
	50π	24,068	29,122	–	–	9,5	–
	100π	33,73	39,484	–	–	7,85	–
	504	42,58	49	–	–	7	–
	1000	59,8036	67,9252	–	–	5,98	–
	5000	133,412	149,4752	–	–	5,68	–
	10000	188,6174	210,937	–	–	5,58	–
$4/3$	0	2,895	6,87	–	–	40,6	–
	π	4,204	6,39	370	1179	20,6	52,2
	2π	4,853	6,63	618,3	1404	15,4	38,8
	30π	12,76	14,53	14647,9	19431,6	6,5	14

Таблица 1.

Анализ полученных результатов показывает, что при больших значений Q_1 точность оценок значительно улучшается.

4.2. Рассмотрим автомодельную задачу о движении детонационной волны при параболическом сжатии газа с нулевым давлением (пыль). Мы будем подразумевать, что в центре симметрии энергия не выделяется, т.е. $E_0 = 0$.

В частном случае, когда за детонационной волной формируется состояние равновесия, т.е. $\frac{\partial r}{\partial t} = 0$, данная задача имеет точное решение [19].

Пусть начальное движение газа определяется размерной постоянной k и величиной q размерности квадрата скорости. В этом случае точное решение системы уравнений (1.1) перед детонационной волной имеет вид:

$$r = \frac{km}{q}\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}(\xi_0 - \xi)^{2/3}, \qquad \rho = \frac{1}{6\pi k(t_\circ(m) - t)(3t_\circ(m) - t)}, p = 0 \tag{4.7}$$

$$\xi = \frac{q^{3/2}t}{km}, \qquad t_\circ(m) = \frac{k\xi_\circ m}{q^{3/2}},$$

где ξ_0 некоторая безразмерная произвольная постоянная.

В силу автомодельности задачи (4.7) имеем:

$$R(t) = \sqrt{q}R_1 t, \qquad I = (q^2\sqrt{q}/k)I_1 t^3, \qquad Q = Q_1 q \tag{4.8}$$

Положим $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 4/3$ и в силу наличия произвола в выборе параметра ξ_0 (переопределение q) наложим связь

$$\xi_0 = \xi_1 + \sqrt{2}/3, \tag{4.9}$$

где ξ_1 - значение параметра ξ на детонационной волне.

Выполнение условия $Q_1 > 0{,}26$ обеспечивает неравенство $G \geq 1$, которое необходимо для получения оценки V_1.

Наконец, используя систему (3.11), а также (1.4), (2.7), (2.12), (3.10),(4.7)-(4.9) получим систему неравеств для R_1 и I_1, содержащих задаваемый при постановке задачи параметр Q_1, причем $R_1 = 1/\xi_1$:

$$4R_1^3 - \sqrt{2}R_1^2 + (6Q_1 + 5{,}29)R_1 \geq 1{,}745L + R_1 S \tag{4.10}$$

$$\frac{R_1}{15}(4Q_1 + R_1^2 - 4\cdot\sqrt{2}R_1 + S) \leq I_1 \leq \frac{1}{3}(R_1^3 - \sqrt{2}R_1^2 + 2Q_1R_1 + 1{,}058R_1 - 0{,}349L)$$

$$L \equiv \left[\frac{4}{3} - \sqrt{1 - \frac{14Q_1}{9(R_1+\sqrt{2})^2}}\right]^{4/3}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{14Q_1}{9(R_1+\sqrt{2})^2}}\right]\cdot(\sqrt{2} + R_1)^{7/3}R_1^{2/3}$$

$$S \equiv \sqrt{(4Q_1 + R_1^2 - 4\cdot\sqrt{2}R_1)^2 + 15R_1^4}$$

Численное решение системы неравенств (4.10) даны в таблице 2 , где точному решению соответствует $Q_1 = 0{,}5$, $R_1 \approx 0{,}3536$, $I_1 \approx 0{,}0148$:

Q_1	R_{1-}	R_{1+}	I_{1-}	I_{1+}	$\Delta_+\%(R_1)$	$\Delta_-\%(R_1)$	$\Delta_\pm\%(R_1)$	$\Delta_+\%(I_1)$	$\Delta_-\%(I_1)$	$\Delta_\pm\%(I_1)$
0,3	0,15	0,5	0,01	0,09	–	–	54	–	–	80
0,5	0,2	0,48	0,01397	0,024	35,7	43,4	41	62,1	5,6	26
10	2,53	3,89	12,25	20,13	–	–	21	–	–	24,3

Таблица 2.

Следует отметить, что неравенство

$$R_1 \geq \frac{\sqrt{14Q_1}}{3} - \sqrt{2},$$

связанное с условием Чепмена-Жуге дает нижнюю оценку для R_1 лишь, при $Q_1 > 9/7$. Оценки значительно улучшаются при больших значениях параметра Q_1.

4.3. Рассмотрим автомодельную задачу о движении детонационной волны при эллиптическом сжатии газа с нулевым давлением.

Эта задача имеет непосредственное отношение к другой важной задаче, связанной с поглощением и выделением энергии (задача о перестройке положения равновесия), решение которой в рамках общей теории относительности дано в работе [19]. При этом там предполагается, что после прохождения в результате фазовых превращений сильной волны разрежения за ней проходит необходимая для поддержания состояния равновесия газа детонационная волна с подходящей величиной выделения энергии на единицу массы $Q(\gamma \leq 9/4)$.

Здесь мы рассмотрим более общую задачу о движении детонационной волны, не специализируя величину Q. При этом ясно, что в области за детонационой волной может реализоваться как состояние разлета, так и последующего сжатия газа.

Покажем, что в случае $Q = 0$ реализуется разлет газа в области за ударной волной.

Пусть начальное движение газа определяется размерной постоянной k и величиной q размерности квадрата скорости. Точное решение системы (1.1), соответствующее эллиптическому сжатию пыли перед детонационной волной имеет вид:

$$r = \frac{km}{2q}(1-\cos\eta), \qquad p = 0, \quad \rho = \frac{2q^3}{\pi k^3 m^2 (1-\cos\eta)[2(1-\cos\eta) + (\pi-\eta)\sin\eta]}, \tag{4.11}$$

$$t = \frac{km(\pi - \eta + \sin\eta)}{2q\sqrt{2q}}, \quad \eta \in (0, \pi)$$

В рассматриваемой задаче только две постоянные k, q имеют независимые размерности, поэтому задача автомодельна, в силу чего имеет место (4.8).

Положим $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 5/3$ и все величины в дальнейшем будем считать безразмерными.

Из (1.4), (4.8), (4.11) можно получить

$$R_1 = \frac{\sqrt{2}(1-\cos\eta_1)}{\pi - \eta_1 + \sin\eta_1}, \tag{4.12}$$

где η_1 - значение параметра η на детонационной волне.

Из (1.2), (1.4), (2.7), используя (4.8), (4.11) получим

$$E = \frac{2\sqrt{2}(Q_1 - 1)}{\pi - \eta_1 + \sin\eta_1}, \qquad \Psi = 3I_1 + \frac{4\sqrt{2}[(\pi-\eta_1)\sin\eta_1 + 2\cos\eta_1(1-\cos\eta_1)]}{(\pi - \eta_1 + \sin\eta_1)^3} \tag{4.13}$$

Из определения G (3.7), а также (3.6), (4.8), (4.11) найдем

$$G = 0{,}0122\frac{[2(1-\cos\eta_1) + (\pi-\eta_1)\sin\eta_1]^{8/3}}{(1-\cos\eta_1)^{4/3}(\pi - \eta_1 + \sin\eta_1)} H_3(\eta_1),$$

$$H_3(\eta_1) \equiv \left(\frac{5}{3} - \sqrt{1 - \frac{16Q_1(\pi-\eta_1+\sin\eta_1)^2(1-\cos\eta_1)^2}{9[2(1-\cos\eta_1)+(\pi-\eta_1)\sin\eta_1]^2}}\right)^{5/3}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{16Q_1(\pi-\eta_1+\sin\eta_1)^2(1-\cos\eta_1)^2}{9[2(1-\cos\eta_1)+(\pi-\eta_1)\sin\eta_1]^2}}\right)$$

Использование (3.1),(3.6), а также (4.8), (4.11),(4.12) дает

$$U_{-} = 0{,}48459\frac{[2(1-\cos\eta_1)+(\pi-\eta_1)\sin\eta_1]^{8/3}}{(1-\cos\eta_1)^{10/3}(\pi-\eta_1+\sin\eta_1)^3}H_3(\eta_1) \tag{4.14}$$

При помощи (3.4),(1.4), (4.8), (4.11),(4.12) можно получить для кинетической энергии следующую оценку

$$T_{-} = \frac{\left[3I_1 - \dfrac{4\sqrt{2}(1-\cos\eta_1)^2}{(\pi-\eta_1+\sin\eta_1)^3}\right]^2}{8I_1} \tag{4.15}$$

Из определения $H_3(\eta_1)$ легко заметить, что неравенство, связанное с условием Чепмена-Жуге имеет вид

$$\frac{2(1-\cos\eta_1)+(\pi-\eta_1)\sin\eta_1}{(1-\cos\eta_1)(\pi-\eta_1+\sin\eta_1)} \geq \frac{4\sqrt{Q_1}}{3} \tag{4.16}$$

Наконец, из соотношений (1.2), (2.12), (3.11) получим для η_1 и I_1 систему неравенств, содержащих задаваемый при постановке задачи параметр Q_1.

$$\begin{cases} \Psi \leq 2E + \dfrac{1+\sqrt{1+4GE}}{2G} \\ \Psi - E \geq T_{-} + U_{-} \\ 1+4GE \geq 0 \end{cases} \tag{4.17}$$

Как показано в работе [19] за детонационной волной, при специальном ограничении на $Q(q)$, реализуется статическое решение ($\left(\dfrac{\partial r}{\partial t}\right)_2 = 0$), причем параметр η_1 принимает универсальное значение $1{,}77$ для любого значения показателя адиабаты γ.

Система (4.17) выведена без учета реализации положения равновесия газа за детонационной волной и верна для общего вида зависимости $Q(q)$ (т.е. не накладывается дополнительное ограничение на Q_1).

Например, при $Q_1 = 7/12$, что отвечает статическому решению (см. [19]), решение системы неравенств (4.17) дает следующую оценку для параметра η_1

$$1{,}56 \leq \eta_1 \leq 2{,}13,$$

при этом относительная погрешность оценки составляет $\Delta_{\pm} \cong 15{,}4\%$, а относительные погрешности нижней и верхней оценки соответственно равны $\Delta_{-} \cong 11{,}9\%, \Delta_{+} \cong 20{,}3\%$.

Следует также особо отметить, что неравенство (4.16) начинает играть роль лишь при $Q_1 > 1{,}085$. Можно также заметить, учитывая (3.11), что при $-\dfrac{1}{4G} \leq E \leq 0$ к системе (4.17) добавляется неравенство

$$\Psi \geq 2E + \frac{1-\sqrt{1+4GE}}{2G} \tag{4.18}$$

Система (4.17) позволяет (при заданном Q_1) найти двустроннюю оценку параметра η_1, а учитывая (4.12) – оценку безразмерного радиуса детонационной волны.

Рассмотрим, аналогичную предыдущей, автомодельную задачу об эллиптическом сжатии пыли с образованием ударной волны, т.е. без выделения энергии на разрыве ($Q = 0$). Определяющими размерными постоянными будут гравитационная постоянная k и q - размерности квадрата скорости. Перед ударной волной имеет место распределение (4.11).

В силу автомодельности задачи будет выполнено (4.8) с $Q_1 = 0$. Имеет место также (4.12), где η_1 - значение параметра η на ударной волне.

Использование условий (1.5), (4.8), (4.11), (4.12) позволяет определить скорость газа непосредственно за ударной волной.

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_2 = \frac{\sqrt{2}}{\gamma+1}\cdot\frac{4(1-\cos\eta_1)-\sin\eta_1[(\gamma-1)(\pi-\eta_1)+(\gamma+1)\sin\eta_1]}{(1-\cos\eta_1)(\pi-\eta_1+\sin\eta_1)} \qquad (4.19)$$

Пусть $\gamma = 5/3$. Тогда из соотношения (4.19) следует, что при

$$1{,}74 \le \eta_1 \le \pi\,, \quad \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_2 > 0\,, \qquad (4.20)$$

что соответствует разлету газа.

Решение системы (4.17), с учетом (4.18) дает при $Q_1 = 0$ следующую оценку для параметра η_1

$$1{,}74 \le \eta_1 \le 2{,}34\ , \qquad (4.21)$$

при этом средняя относительная погрешность оценки равна $\Delta_{\pm} \cong 14{,}7\%$.

Сравнивая (4.20), (4.21) неравенства можно заключить, что всегда будет выполняться неравенство $\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_2 > 0$, т.е. ударная волна будет увлекать за собой газ и положение равновесия за ударной волной не будет реализовываться.

Литература

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Наука, 1981, 448 стр.
2. Бете Г.А. Теория Сверхновых. Ядерная астрофизика. М., Мир, 1986, стр. 418 – 445.
3. Colgate S., White R. The hydrodynamic behaviour of supernovae explosiouns. Astrophys. Journal, 1966, v. 143, 3, p. 626 – 681.
4. Chilachava T.I., Ziziguri C.D. Mathematical Modeling , Tbilisi, 2008, 440 p. (georgian).
5. Arnett W. D. A possible model of supernovae: Detonation of C^{12}. Astropys. And Space Sci., 1969, v. 5, № 2, p. 180 - 212.
6. Иванова Л. Н., Имшенник В. С., Чечеткин В. М. Термоядерный взрыв вырожденного углеродного ядра звезды.М.,1975, 63 стр.(Препринт Ин-та прикл.матем.АН СССР, №31).
7. Голубятников А. Н. К образованию однородного разлета гравитирующего газа при наличии градиента давления. Известия РАН, МЖГ, 1998, № 4, стр. 176 – 182.
8. Golubyatnikov A., Chushkin S. Abaut strong relativistic explosion with variable density. Aeromechanic and gas dynamics. 2002, № 2.
9. Nadyozhin D.K. The collapse of iron-oxygen start: physical and mathematical formulation of the problem and computational method Astrophys. and Space Sci. 1977. v. 49. N 2. p. 399 - 425.
10. Domogatsky G.V., Eramzhyan R.A., Nadyozhin D.K.Production of the light elements due to neutrinos emitted by collapsing stellar cores. Astrophys. And Space Sci . 1978, v. 58, №2, p. 273-299.
11. Голубятников А.Н., Чилачава Т.И. О распространении детонационной взрывной волны в гравитирующем шаре с последующим разлетом в пустоту. Изв. АН СССР, МЖГ, 1986, № 4, стр. 187 – 191.
12. Голубятников А.Н., Чилачава Т.И. О центральном взрыве вращающегося гравитирующего тела. Доклады АН СССР, 1983, т. 273, № 4, с. 825 – 829.
13. Чилачава Т.И. О центральном взрыве в неоднородном шаре, находящемся в равновесии в собственном гравитационном поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1988, № 3, стр. 179 – 184.
14. Chilachava T.I. On the asymptotic method of solution of one class of nonlinear mixed problems of mathematical physics. Bulletin of Georgian Academy of Sciences.1998, v. 157, № 3, p. 373 - 377.
15. Chilachava T.I. On the asymptotic method of solution of one class of astrophysic problems. Applied Mathematics and Informatic. 1999, v. 4, № 2, p. 54 - 66.
16. Голубятников А.Н. Интегральные неравенства в задачах газовой динамики. – В кн.: Некоторые вопросы механики сплошних сред. М. : Изд-во МГУ, 1978, стр. 213 - 228.
17. Голубятников А.Н., Чилачава Т.И. Об оценках движения детонационных волн в гравитирующем газе. Известия АН СССР, МЖГ, 1984, № 2, стр. 140 – 145.
18. Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: Изд-во Иностр. Лит., 1948, 456 стр.
19. Голубятников А. Н. О сферически – симметричном движении гравитируюшего газа при наличии сильной ударной волны. Доклады АН СССР, 1976, т. 227, № 5., стр. 167-170.

Статья получена: 2009-04-27