Математические модели влияния торцевых потерь на сжатие и нагрев плазмы в тета-пинче

П.П.Волосевич[1], М.А.Корнилина[1], Е.И.Леванов[1], Г.В.Меладзе[2]

[1]Институт математического моделирования РАН
[2]Грузинский университет им. св. Андрея Первозванного, h_meladze@hotmail.com

Аннотация

В настоящей работе исследуется некоторые аспекты влияния торцевых потерь на сжатие и нагрев плазмы в тета-пинче. Математическая модель задачи о тета-пинче строится в квазилагранжевых координатах. Анализ качественного характера влияния объемных потерь массы на течение газа проводится с помощью автомодельных решении, а также с помощью приближенных энергетических оценок.

1. Введение

Настоящая работа является результатом участия авторов в совместных исследованиях, которые проводились ученными института прикладной математики им.М.В.Кельдыша, института математического моделирования РАН, Тбилисского гос.университета и Сухумского физика-технического института, которые проводились под руководством академика А.А.Самарского. Основные результаты этой работы опубликованы в препринте института прикладной математики им. М.В.Кельдыша [1]. Там же приводятся результаты численных расчетов.

В работах [2]-[4] с помощью вычислительного эксперимента исследовалась динамика сжатия и нагрева плазмы в тета-пинче с учетом концевых потерь энергии за счет продольной электронной теплопроводности и стоков массы через торцы плазменного шнура. Процессы, происходящие в плазме, рассматривались в одножидкостном двухтемпературном магнито-гидродинамическом приближении в предположении осевой симметрии. Торцевые потери моделировались обемными стоками массы и энергии с мощностью, зависящей от температуры и плотности.

В настоящей работе, в отличие от [3]-[4], рассматриваются различные способы (различные модели) учета потерь массы через торцы плазменного шнура. В одной из моделей предполагается, что улетевшие из элемента течения частицы несут собой энергию. Такое предположение используется, например, в случае, когда изменение массы в элементе течения связано с её переносом продуктами термоядерных реакции [5]. В другой модели учитывается, что улетающие из рассматириваемой области частицы имеют соответствующую энергию и, кроме того, совершают работу против сил давления. Поэтому частицы уносят собой энталпию. Такое предположение используется в работах [3]-[4].

Задача о тета-пинче рассматривается в т.н. квазилагранжевых координатах [6]-[8]. Для численного решения использовалась полностью консервативная разностная схема [6]-[10].

2. Постановка задачи

Процесс сжатия и нагрева плазменного шнура осевым магнитным полем (θ-пинч) будем описывать системой уравнений магнитной гидродинамики, рассматриваемой в предположении осевой симметрии, в одножидкостном двухтемпературном приближении, с учетом электронной и ионной теплопроводности, тормозного излучения, диффузии магнитного поля в плазму и джоулева нагрева. Торцевые потери будем моделировать объемными стоками массы и энергии с мощностью, зависящей от термодинамических величин.

Уравнения магнитной гидродинамики удобно записать в квазилагранжевых координатах $q,\ t_л$, где пространственная независимая переменная q определяется начальным распределением массы

$$q=\int_0^{r(q,0)}\rho(y,0)ydy \tag{1}$$

Введем в рассмотрение функцию $\psi=\psi(q,t)$, выражающую долю оставшейся массы в данном элементе течения. Квазилагранжевы координаты $q,\ t_л$ связаны с эйлеровыми переменными $r,\ t$ соотношениями вида

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial tл}-\frac{r\rho v}{\psi}\frac{\partial}{\partial q},\quad \frac{\partial}{\partial r}=\frac{\rho r}{\psi}\frac{\partial}{\partial q}, \tag{2}$$

где v – скорость, ρ - плотность.

Пусть H и E - осевая компонента напряженности магнитного поля и азимутальная компонента напряженности электрического поля, P_e, P_i, ε_e, ε_i, T_e, T_i - соответственно электронные и ионные компоненты давления, внутренней энергии и температуры, Q_{ie} - скорость обмена энергии между ионами и электронами, j - плотность тока, σ - коэффициент электропроводности, G - тормозное излучение. Пусть, далее, W_i - поток тепла, обусловленный ионной теплопроводностью, W_e - поток тепла, обусловленный поперечной (направленной вдоль радиуса r) электронной теплопроводностью, χ_i и χ_e - соответствующие коэффициенты теплопроводности, X - мощность торцевых потерь массы. Торцевые потери энергии за счет продольной (направленной вдоль оси z) электронной теплопроводности рассмотрим в виде, аналогичном [2]:

$$\frac{\partial Wz}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(-K\frac{\partial T_e}{\partial z}\right)=K\frac{T_e}{l^2}.$$

где l – длина плазменного шнура, K - коэффициент теплопроводности. Введем далее параметр u_0, характеризующий различные модели учета объемных стоков массы. При $u_0=0$ предполагается, что улетевшие из элемента течения частицы несут с собой энергию. При $u_0=1$ исчезающие частицы имеют соответствующую энергию и совершают работу против сил давления, т.е. уносят с собой энтальпию. В общем случае скорость прилетающих или улетающих из элементов течения частиц отлична от скорости газа и может быть функцией температуры и плотности [7]. В тета-пинчах объемный сток массы моделирует вытекание среды через торцы плазменного шнура. Поэтому в обоих случаях – при $u_0=0$ и $u_0=1$ - будем считать, что скорость улетающих частиц совпадает со скоростью течения V.

В упомянутых выше предположениях, спуская индекс «л» у параметра $t_л$ систему уравнений магнитной гидродинамики запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\psi}{\rho}\right)=\frac{\partial(rv)}{\partial q}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi v)=-r\frac{\partial}{\partial q}\left(P_e+P_i+\frac{H^2}{8\pi}\right)-\psi\chi v$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi\varepsilon_e) = -P_e \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\psi}{\rho}\right) - \frac{\partial W_e}{\partial q} + \frac{\psi j E}{\rho} + \frac{\psi G}{\rho} + \frac{\psi Q_{ie}}{\rho} - $$
$$- \frac{\psi}{\rho}\frac{KT_e}{l^2} - \psi\chi\left(\varepsilon_e + u_0 \frac{P_e}{\rho}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi\varepsilon_i) = -P_i \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\psi}{\rho}\right) - \frac{\partial W_i}{\partial q} + \frac{\psi Q_{ie}}{\rho} - \psi\chi\left(\varepsilon_i + u_0 \frac{P_i}{\rho}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi H) = -\frac{\partial (rE)}{\partial q}$$

$$j = \sigma E = -\rho \frac{r}{4\pi\psi}\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$W_{e,i} = -\chi_{e,i}\frac{\rho r^2}{\psi}\frac{\partial T_{e,i}}{\partial q}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\psi\chi, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = v$$

Величины, выражающие физические свойства плазмы $\chi_e = \chi_e(T_e, \rho)$, $\chi_i = \chi_i(T_i, \rho)$, $\sigma = \sigma(T_e, \rho)$, $K = K(T_e, \rho)$, обмен энергией Q_{ie} и излучение $G = G(T_e, \rho)$ рассматриваются в предположении полной ионизации. Соответствующие формулы приведены в работе [2] (см. также, [11]).

Будем считать, что справедливы уравнения состояния идеального газа,

$$\varepsilon_e = \frac{ZR_0}{\gamma - 1}T_e, \ \varepsilon_i = \frac{R_0}{\gamma - 1}T_i, \quad P_e = ZR\rho T_e, \quad P_i = R_0 \rho T_i \tag{4}$$

где R_0 – газовая постоянная, z - заряд ионов, γ - постоянное отношение удельных теплоемкостей.

Для мощности стока массы используем следующую формулу [4]:

$$\chi = \frac{D+1}{D\eta l}\left[\frac{2K(T_e + T_i)}{m_i}\right]^{\frac{1}{2}} . \tag{5}$$

В формуле (5): l - длина плазменного шнура, m_i - масса иона, K - постоянная Больцмана, η - некоторый экспериментальный коэффициент и предполагается, что торцевые потери массы могут регулироваться т.н. магнитными пробками [4]: параметр D характеризует т.н. побочное отношение.

Система уравнений (3)-(5) решается в области $0 < q < M_0 \ (0 < r < r_0)$, где r_0 – радиус разрядной камеры, M_0 - начальная масса плазмы в одном радиане и в единице длины плазменного шнура.

При $q = 0$ ($r = 0$) задаются условия симметрии

$$v(0,t) = 0, \quad W_e(0,t) = 0, \quad W_i(0,t) = 0, \quad E(0,t) = 0 \tag{6}$$

При $q = M_0 \ (r = r_0(t))$ задаются условия:

$$v(M_0,t) = 0, \quad W_e(M_0,t) = 0, \quad W_i(M_0,t) = 0, \quad H(M_0,t) = \frac{4\pi J(t)}{cl} \tag{7}$$

где $J(t)$ разрядный ток, который определяется из уравнений электротехнической цепи.

В общем случае рассматривается электрическая цепь с т.н. «закороткой».

При выключенном ключе закоротки уравнения электротехнической цепи имеют вид

$$\frac{L}{c^2}\frac{\partial J}{\partial t}+RJ-U-2\pi E(M_0,t)=-4\pi^2\frac{d}{dt}\left[\left(r_*^2-r_0^2\right)\frac{J}{c^2 l}\right] \tag{8}$$

$$\frac{dU}{dt}=-\frac{J}{C} \tag{9}$$

где $R,\ L,\ C$ - соответственно, индуктивность, сопротивление и емкость во внешней цепи, U=U(t) - напряжение, c - скорость света, r_* - радиус металлического кругового цилиндра (витка), в котором помещена разрядная камера радиуса r_0, заполненная горячей проводящей дейтериевой плазмой с начальной температурой $T_e = T_i = T^0$. Предполагается, что стенки камеры являются неэлектропроводными, проводимость в кольцевой области между плазмой и витком равна нулю.

Уравнения (8), (9) решаются при начальных условиях

$$J(0)=0,\ \ U(0)=U_0 \tag{10}$$

В момент времени $t=t_з$ замыкается ключ закоротки. Уравнения электротехнической цепи при $t>t_з$ имеют вид:

$$\begin{aligned}&\left(R_H+R_З\right)J_H+\left(L_H+L_З\right)\frac{dJ_H}{dt}-R_ЗJ_Б-L_З\frac{dJ_Б}{dt}-2\pi E\left(M,t\right)=\\&=-4\pi^2\frac{d}{dt}\left(\left(r^{*2}-r^2\right)J_H\right)\end{aligned} \tag{11}$$

$$-R_ЗJ_H-L_з\frac{dJ_H}{dt}+\left(R_З+R_Б\right)J_Б+\left(L_З+L_Б\right)\frac{dJ_Б}{dt}-U=0 \tag{12}$$

$$\frac{dU}{dt}=-\frac{J_Б}{C} \tag{13}$$

Здесь $J_H,\ J_Б$ - соответственно, токи в цепи нагрузки и батареи; $R_H,\ R_З,\ R_Б$ - сопрлтивления, $L_H, L_З, L_Б$ - индуктивности нагрузки, закоротки и батареи.

Система (11)-(13) решается при начальных условиях

$$J_H(t_З)=J(t_З),\ J_Б(t_З)=0,\ U=U(t_З), \tag{14}$$

где $J(t_З)$, $U(t_З)$ - решение уравнения цепи (8)-(10) в момент $t=t_З$.

3. Некоторые приближенные оценки влияния объемеых стоков массы на газодинамические процессы

1. Качественный характер влияния нелинейных объемных стоков массы на движение газа можно выяснить с помощью анализа автомодельных решений. Соответствующий класс автомодельных решений исследован в работе [12].

Рассмотрим движение газа перед поршнем без учета теплопроводности, электронно-ионной релаксации, магнитного поля, но в предположении, что в возмущенной среде имеют место объемные потери массы и энергии, мощность которых является степенной функцией термодинамических величин и координат q и t, т.е. при $v=0$

$$\chi=\chi_0 P^{a_0}\rho^{b_0}q^{l_0}t^{\mu_0},\quad G=G_0 P^{a_1}\rho^{b_1}q^{l_1}t^{\mu_1} \tag{15}$$

При $v=0$ имеем $\chi\equiv 0,\quad G\equiv 0$. Будем учитывать объемные стоки массы, используя обе модели $u_0=0$ и $u_0=1$. Пусть, скорость поршня выражается формулой

$$v\left(0,t\right)=v_0 t^{n_0},\quad v_0>0 \tag{16}$$

а при $t=0$ выполняются условия

$$v\left(q,0\right)=0,\quad P\left(q,0\right)=0,\quad \rho\left(q,0\right)=\rho_0 q^l \tag{17}$$

В указанных предположениях движение газа описывается уравнениями вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{1}{\psi}\frac{\partial v}{\partial q}+\frac{\chi}{\rho}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\psi}\frac{\partial P}{\partial q},\quad P=R_0\rho T,$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=-P\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{G}{\rho}+(1-u_0)\chi\frac{P}{\rho},\quad \varepsilon=\frac{R_0}{\gamma-1}T \tag{18}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}=-\psi\chi$$

Задача (15)-(18) имеет автомодельное решение при выполнении следующих условий:

$$(n_0+1)[2a_0(1-l)+l(a_0+b_0)+l_0]=(2a_0-\mu_0-1)(1-l)$$

$$a_1=a_0+1,\quad b_1=b_0,\quad l_1=l_0,\quad \mu_1=\mu_0 \tag{19}$$

В дальнейшем уравнение энергии (четвертое уравнение системы (18)) удобно записать в т.н. энтропииной форме:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t}=(1-u_0)(\gamma-1)\chi\Sigma+G\rho^{-\gamma},\quad \Sigma=(\gamma-1)^{-1}P\rho^{-\gamma} \tag{20}$$

При выполнении условий автомодельности (19) независимые переменные и искомые функции представыми в виде:

$$s=\frac{q}{(v_0\rho_0)^{1/(1-l)}t^n},\quad \alpha(s)=\frac{v(q,t)}{v_0t^{n_0}},\quad \Psi(s)=\psi(q,t),$$

$$\delta(s)=\frac{\rho(q,t)}{\left(\rho_0v_0^l\right)^{1/(1-l)}t^{nl}},\quad f(s)=\frac{T(q,t)R}{v_0^2t^{2n_0}},$$

$$\beta(s)=\frac{P(q,t)}{\left(\rho_0v_0^l\right)^{1/(1-l)}v_0^2t^{nl+2n_0}}, \tag{21}$$

$$\zeta(s)=\frac{\left(\rho_0v_0^l\right)^{(\gamma-1)/(1-l)}\Sigma(q,t)}{v_0^2t^{\bar n}}$$

где $n=\dfrac{n_0+1}{1-l},\quad \bar n=2n_0-nl(\gamma-1).$

С помощью замены переменных (21) систему уравнений (18) можно свести к соответствующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведем здесь из этой системы лишь два уравнения – уравнение для определения функции Ψ и уравнение, соответствующее (20):

$$\Psi'=n^{-1}s^{-1}\Psi\hat\chi,$$

$$\zeta'=n^{-1}s^{-1}\zeta\left[n^{-1}-(\gamma-1)\left((1-u_0)\hat\chi+\hat G\right)\beta^{-1}\right] \tag{22}$$

где

$$\hat\chi=\hat\chi_0(\gamma-1)^{-\beta_0/\gamma}\beta^{a_0+\beta_0/\gamma}\varsigma^{-\beta_0/\gamma}s^{l_0}$$

$$\hat G=\hat G_0(\gamma-1)^{-\beta_0/\gamma}\beta^{a_0+1+\beta_0/\gamma}\varsigma^{-\beta_0/\gamma}s^{l_0}$$

штрихом обозначена производная по *s*.

Безразмерные функции плотности $\delta = \delta(s)$ и температуры $f = f(s)$ можно представить в виде:

$$\delta = (\gamma-1)^{-1/\gamma}\beta^{1/\gamma}\varsigma^{-1/\gamma}, \quad f = (\gamma-1)^{1/\gamma}\beta^{1-1/\gamma}\varsigma^{1/\gamma} \tag{23}$$

Граничные условия (16), (17) в переменных (21) имеют вид

$$\alpha(0) = 1 \tag{24}$$

$$\alpha(s_0) = \beta(s_0) = 0, \quad \Psi(s_0) = 1, \quad \delta(s_0) = s_0^l, \quad 0 < s_0 \le \infty \tag{25}$$

и, следовательно,

$$\zeta(s_0) = 0, \quad f(s_0) = 0 \tag{25'}$$

При $\hat{\chi} \ne 0$ в силу (19) функции $\hat{G}$ и $\hat{\chi}$ связаны между собой соотношением:

$$\hat{G} = \frac{\hat{G}_0}{\hat{\chi}_0}\hat{\chi}\beta \tag{26}$$

используя (26), получим из (22)

$$\zeta = Cs^{\bar{n}/n}\Psi^{-(\gamma-1)\left(1-u_0+\hat{G}_0/\hat{\chi}_0\right)}, \tag{27}$$

где C – постоянная интегрирования. Соотношение (27) представляет собой известный в газовой динамике интеграл энтропии [13] обобщеный на случай, когда в движущейся среде учитывается объемный сток $(\hat{\chi} > 0)$ или источник $(\hat{\chi} < 0)$ массы.

Из (27) следует, что при $\bar{n} \ge 0$ (и произвольном $\bar{n}$ в случае $s_0 \ne \infty$) функция $\zeta = \zeta(s)$ не удовлетворяет граничным условиям $\zeta(s_0) = 0, \quad \Psi(s_0) = 1$. Это значит, что «переход к начальному фону» (25), (25′) может быть осуществлен лишь через разрыв гидродинамических величин в точке $s = s_0 \ne \infty$. При наличии объемных источников и стоков законы сохранения на фронте разрыва выражаются обычными условиями Гюгонио. В переменных (21) с учетом (25), (25′) эти условия имеют вид:

$$\begin{gathered}\alpha(s_0) = \alpha_0 = \frac{2}{\gamma+1}ns_0^{1-l}\lambda_0^{-u_0}, \quad \delta(s_0) = \delta_0 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}s_0^{1-l}, \quad \Psi(s_0) = 1 \\ \beta(s_0) = \beta_0 = \frac{2}{\gamma+1}n^2 s_0^{2-l}\lambda_0^{-2u_0}, \quad \zeta(s_0) = \zeta_0 = (\gamma-1)^{-1}\beta_0\delta_0^{-\gamma}.\end{gathered} \tag{28}$$

В формуле (27) получим $C = C_0 = \zeta_0 s_0^{-\bar{n}/n}$. Фигурирующий здесь параметр s_0 в общем случае определяется из численного решения соответствующей системы в «автомодельных переменных» при граничных условиях (24), (28).

Из (27) следует, что распределение безразмерной энтропийной функции $\zeta = \zeta(s)$ имеет различный характер в зависимости от значении параметра u_0 . Пусть, например, $\hat{G}_0 = 0$, т.е. потери или выделение энергии происходят только вследствие объемного стока или источника массы. В этом случае при u_0 = 1 (улетающие из системы частицы уносят энтальпию $\varepsilon + P/\rho$) функция $\zeta = \zeta(s)$ имеет вид, аналогичный известному случаю $\Psi \equiv 1$ [12]: при $\bar{n} > 0$ (энтропия на ударной волне растет со временем) функция ζ возрастает с ростом s, причем $\zeta(0) = 0$. В случае $\bar{n} < 0$ имеет место обратная картина и $\zeta(0) = \infty$. При $\bar{n} = 0$ между фронтом ударной волны и поршнем течение является изентропичным, т.е. $\zeta(s) \equiv C_0$.

В модели u_0 = 0 объемные потери или приток массы существенно влияют на распределение функции энтропии $\zeta = \zeta(s)$. Из (27) следует, что при $\hat{\chi}_0 > 0$ ($\Psi < 1$ - сток массы) энтропия в возмущенной области перед поршнем выше, а при $\hat{\chi}_0 < 0$ ($\Psi > 1$ - приток массы) – ниже, чем в случае $\Psi \equiv 1$. Поведение функции $\zeta = \zeta(s)$ в окрестности границы газа с поршнем $s=0$ при $u_0 = 0$ зависит от характера распределения функции $\Psi = \Psi(s)$.

Положим $b_0 = -\gamma\, a_0$. В этом случае функции $\zeta = \zeta(s)$ и $\Psi = \Psi(s)$, удовлетворяющие уравнениям (22), можно выразить в аналитической форме. Решение имеет различный вид в зависимости от параметров задачи. Пусть, например, $\mu_0 = -1$ и $a_0\left[(1-u_0)\hat{\chi}_0 + \hat{G}_0\right] = 0$. Тогда с учетом граничного условия $\Psi(s_0) = 1$ получим:

$$\Psi = \left[\frac{s}{s_0}\right]^{1/n(\gamma-1)^{a_0} c_0^{a_0} \hat{\chi}_0} \tag{29}$$

В этом случае $\Psi(0) = 0$ при $\hat{\chi}_0 > 0$ и $\Psi(0) = \infty$ при $\hat{\chi}_0 < 0$. Учитывая (29), получим из (27), что на границе газа с поршнем $s=0$ функция ζ обращается в нуль, если

$$\theta_0 = \bar{n} - (\gamma-1)^{a_0+1}\left[(1-u_0)\hat{\chi}_0 + \hat{G}_0\right] > 0$$

и в бесконечность – при $\theta_0 < 0$. В случае $\theta_0 = 0$ течение в возмущенной области изентропично. В частности, полагая $u_0 = 0$, $\hat{G}_0 = 0$, $a_0 = 0$, получим, что $\zeta(0) = 0$ при $\hat{\chi}_0 < \dfrac{\bar{n}}{\gamma-1}$, $\zeta(0) = \infty$ при $\hat{\chi}_0 > \dfrac{\bar{n}}{\gamma-1}$ и $\zeta(s) \equiv C_0$ при $\hat{\chi}_0 = \dfrac{\bar{n}}{\gamma-1}$. Отсюда следует, что если источники или стоки массы учитываются по модели $u_0 = 0$, то изменение их мощности меняет качественный характер распределения функции энтропии, а следовательно, и других термодинамических величин.

2. Аналогично [5] проведем энергетические оценки, показывающие влияние уменьшения числа частиц $\mathbf{N}$ в виделенном объеме (например, в плазменном шнуре) на среднюю температуру при заданном законе изменения внешнего давления $P = P(t)$. При этом сравним обе модели стока массы, получаемые в предположении, чтоуходящие частицы уносят либо среднюю энергию $\overline{W} = \dfrac{3}{2}KT$ (модель $u_0 = 0$), либо энтальпию $\overline{W} + \dfrac{P}{\rho}$ ($u_0 = 1$).

Закон сохранения энергии для плазмы, сжимающейся под действием внешнего давления, можно записать в виде

$$-Pd\Omega = d\left(\mathbf{N}\overline{W}\right) - \left(\overline{W} + u_0 \frac{P}{\rho}\right) d\mathbf{N} \tag{30}$$

где $\mathbf{N}$ -- полное число частиц, $\overline{W}$ – их средняя энергия, Ω -- объем, занимаемый плазмой. из (30) получим:

$$-Pd\Omega = \frac{3}{2}\mathbf{N}K\, dT - u_0 \frac{P}{\rho}\, d\mathbf{N} \tag{31}$$

Давление плазмы равно $P = \rho KT = \dfrac{\mathbf{N}}{\Omega}KT$. Поэтому из (31) получим

$$-\frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{3}{2}\frac{dT}{T} - u_0 \frac{d\mathbf{N}}{\mathbf{N}}. \tag{32}$$

Интегрируя уравнение (32), получим $\dfrac{T^{3/2}\Omega}{\mathbf{N}^{u_0}} = const$, или, используя приведенное выше выражение для давления

$$T = const\left[\frac{P}{\mathbf{N}^{1-u_0}}\right]^{2/3}. \qquad (33)$$

Из (33) следует, что при $u_0 = 0$ уход частиц из плазмы должен приводить к увеличению температуры плазменного шнура. В модели $u_0 = 1$ при заданном законе нарастания внешнего давления температура плазмы не зависит от числа частиц **N**. Перечисленные выше результаты анализа автомодельных решений и оценка (33) полностью подтверждается результатами вычислительных экспериментов.

4. Система разностных уравнений

Введем сетку по пространству и по времени вида

$$\left(q_j, t^n\right), \quad q_{j+1} = q_j + h_j, \quad t^{n+1} = t^n + \tau^n, \quad j = 1,\ldots,N+1; \quad n = 1,2,\ldots \qquad (34)$$

Сеточные функции плотности ρ, давления, температуры и внутренней энергии электронов и ионов $P_{e,i}$, $T_{e,i}$, $\varepsilon_{e,i}$, напряженности магнитного поля H, мощности стока массы χ, функции $\Omega = P_e + P_i + w$, $\Omega_i = P_i + w$, где w - искуственная вязкость, и сеточную функцию ψ определим в центрах ячеек – в полуцелых точках $\left(q_{j+1/2}, t^n\right)$, где $q_{j+1/2} = 0.5\left(q_j + q_{j+1}\right)$. Сеточные функции координаты r, скорости v, потоков тепла W_e и W_i, напряженности электрического поля E отнесем к узлам сетки $\left(q_j, t^n\right)$.

Воспользуемся безиндексными обозначениями [9]:

$$y = y_j^n, \quad \hat{y} = y_j^{n+1}, \quad y(\pm 1) = y_{j\pm 1}^n$$

$$y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau^n}, \quad y_q = \frac{y(+1) - y}{h_j}, \quad y_{\bar{q}} = \frac{y - y(-1)}{0.5(h_j + h_{j-1})} \qquad (35)$$

$$y^{(0)} = \sigma\hat{y} + (1-\sigma)y, \quad y_* = \frac{y h_{j-1} + y(-1)h_j}{h_{j-1} + h_j}$$

Систему дифференциальных уравнений (3) аппроксимируем следующим семейством разностных схем:

$$\left(\frac{\psi}{\rho}\right)_t = \left(r^{(0.5)} v^{(0.5)}\right)_q$$

$$\left(\psi_* v\right)_t = -r^{(0.5)}\left(\Omega^{(\alpha)} + \frac{\hat{H}H}{8\pi}\right)_{\bar{q}} - \psi_*^{(\sigma_1)}\chi_*^{(\sigma_2)} v^{(\sigma_3)}$$

$$\left(\psi\varepsilon_e\right)_t = -P_e^{(\alpha)}\left(\frac{\psi}{\rho}\right)_t - W_{eq}^{(\beta)} + Q + \psi^{(\sigma_4)}\left(\left(\frac{G}{\rho}\right)^{(\gamma)} + \left(\frac{Q_{ie}}{\rho}\right)^{(\mu)} - \left(\frac{KT_e}{\rho}\right)^{(\gamma)}\frac{1}{l^2}\right) -$$

$$-\psi^{(\sigma_1)}\chi^{(\sigma_2)}\left[\varepsilon_e^{(1-\sigma_4)} + u_0\left(\frac{1}{\rho}\right)^{(1-\sigma_4)} P_e^{(\alpha)}\right]$$

$$
\begin{aligned}
(\psi\varepsilon_i) = -\Omega_i^{(\alpha)}\left(\frac{\psi}{\rho}\right)_t - W_{iq}^{(\beta)} + Q + \psi^{(\sigma_4)}\left(\frac{Q_{ie}}{\rho}\right)^{\mu} - \\
-\psi^{(\sigma_1)}\chi^{(\sigma_2)}\left[\varepsilon_i^{(1-\sigma_4)} + u_0\left(\frac{1}{\rho}\right)^{(1-\sigma_4)}\Omega_i^{(\alpha)}\right]
\end{aligned}
\tag{36}
$$

$$
\left(\frac{\psi H}{\rho}\right) = -e_q^{(\delta)}, \quad e = -\frac{\rho}{4\pi\sigma_*\psi_*} r^2 H_{\bar{q}}
$$

$$
Q = -\frac{1}{8\pi}\left[e^{(\delta)} H_{\bar{q}}^{(0.5)} + e(+1)^{(\delta)} H(+1)_{\bar{q}}^{(0.5)}\right]
$$

$$
\psi_t = -\psi^{(\sigma_1)}\chi^{(\sigma_2)}, \quad r_t = v^{(0.5)}
$$

$$
W_{e,i} = \mathrm{X}_{e,i*}\frac{\rho_* r^2}{\psi_*} T_{e,i\bar{q}}
$$

Искусственная вязкость w вводится в схему для размазывания сильных разрывов. Параметри α, β, γ, δ, μ, σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 являются произвольными из отрезка [0,1].

Проведенный в работе анализ показал, что для семейства разностных схем (36) автоматически выполняются балансы внутренней, кинетической и магнитной энергий, а также закон сохранения полной энергии для элемента течения газа. Таким образом, схема обладает рядом свойств полностью консервативных разностных схем. Однако, для схемы (36) не выполняется автоматически закон сохранения полной энергии для единицы массы газа. Для изменения полной энергии единицы массы течения из (36) получим следующее разностное уравнение:

$$
\begin{aligned}
&\left[\varepsilon_e + \varepsilon_l + \frac{H^2}{8\pi\rho} + \frac{1}{4}\left(v^2 + v^2(+1)\right)\right]_t = \\
&= -\frac{1}{\psi^{(\sigma_1)}}\left[\left(\Omega_*^{(\alpha)} + \frac{(H\hat{H})_*}{8\pi}\right) r^{(0.5)} v^{(0.5)}\right]_q - \frac{1}{\psi^{(\sigma_1)}}\left(W_e + W_i\right)_q^{\beta} - \\
&-\frac{1}{\psi^{(\sigma_1)}}\left[H_*^{(0.5)} e^{(\delta)}\right]_q - \chi^{(\sigma_2)}\left(\frac{1}{\rho}\right)^{(1-\sigma_4)}\Omega^{(\alpha)} + \chi^{(\sigma_2)}\left(\frac{H^2}{8\pi\rho}\right)^{(1-\sigma_1)} + \delta E
\end{aligned}
$$

где δE -- соответствующая невязка, пропорциональная τ и h_j . При значениях $\sigma_1 = \sigma_4 = 1 - \sigma_3$ невязка δE имеет вид:

В расчетах использовалась чисто неявная схема, т.е. все параметри α, β, γ, δ, μ, σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 брались равными 1. Как отмечалось во введении, в работе [10] проведено доказательство сходимости полностью консервативной неявной разностной схемы (в указанном выше смысле) аналогичной схеме (36) для уравнений газовой динамики с учётом теплопроводности и стока массы в квазилагранжевых переменных. При изучении свойств решения рассматриваемой схемы в работе [10] предполагалось наличие слабых разрывов в решении исходной дифференциальной задачи. Результаты численных расчётов приведены в [1].

Литература

1. П.П.Волосевич, М.А.Корнилина, Е.И.Леванов, Г.В.Меладзе. Влияние торцевых потерь на сжатие и нагрев плазмы в тета-пинче. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1988, №195, 23 стр.
2. Бусурина Л.Н., Волосевич П.П., Зукакишвили Г.Г., Лацабидзе Г.С., Леванов Е.И., Попов Ю.П., Схиртладзе Н.М., Тиханов Э.К. Численные эксперименты по тета-пинчу. Физика плазмы, т.8, в.5, 1982, с.1053.
3. Волосевич П.П., Галигузова И.И., Дарьин Н.А., Зукакишвили Г.Г., Карпов В.Я., Леванов Е.И., Салуквадзе Р.Г., Тиханов Э.К. Вычислительные эксперименты по тета-пинчу с учетом торцевых потерь. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1984, №127, 23 стр.
4. Волосевич П.П., Галигузова И.И., Дарьин Н.А., Зукакишвили Г.Г., Карпов В.Я., Леванов Е.И., Рижков В.Н., Салуквадзе Р.Г., Тиханов Э.К., Чкуасели Э.Д. Исследование ограничения концевых потерь плазмы линейного тета-пинча магнитними пробками. Труды X международной конференции по физике плазмы и УТС.,1984, Лондон, т.11, с.93.
5. Арцимович Л.А. Управляемые термоядерные реакции. М. Атомиздат, 1953, 496 с.
6. Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. Некоторые задачи газовой динамики при наличии источника. ЖВМ и МФ, 1978, т.18, №4, с.1048.
7. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. Полностью консервативные разностные схемы для задачи газовой динамики при наличии источников массы. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1982, №160.
8. Волосевич П.П., Дарьин Н.А., Карпов В.Я., Круковский А.Ю. К расчёту задач магнитной гидродинамики со стоками массы в квазилагранжевых координатах. Препринт ИПМ им.М.В.Кельдыша АН СССР, М., 1984, №7, 21 стр.
9. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики, Мю, Наука, 1980.
10. Волосевич П.П., Дарьин Н.А., Леванов Е.И., Меладзе Г.В., Поцхишвили Д.В. О сходимости полностью консервативных разностных схем для уравнений газовой динамики с учётом теплопроводности и стока массы в квазилагранжевых переменных. Препринт ИПМ им.М.В.Кельдыша АН СССР, М., 1986, №116, 29 стр.
11. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме. В кн. Вопросы теории плазмы (подю ред. леонтовича М.Л.), Атомиздат, 1967, вып. 5, с.394.
12. Волосевич П.П., Дарьин Н.А., Леванов Е.И., Схиртладзе Н.М. Задача о поршне в газе с источниками и стоками. г.Тбилиси, изд. Тбилисского университета, 1986, 238 стр.
13. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике, М., Физматгиз, 1962.

Статья получена: 2009-06-16