О сходимости линейных регуляризованных двухслойных разностных схем

А. Ш. Шапатава

Тбилисский Государственный Университет им. Ив. Джавахишвили
Email: anzorshapatava@yahoo.fr

Аннотация:

Рассматривается регуляризованная двухслойная разностная схема для эволюционных уравнений

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad 0 \le t \le T,$$

где $A(t)$ - линейный неограниченный оператор с самосопряженной главной частью в комплексном гильбертовом пространстве. Получены априорные оценки и условие устойчивости схемы, доказана слабая, а также сильная сходимость решения разностной задачи к решению исходной задачи.

Для получения априорных оценок и условия устойчивости используется методика работ [1], [2], [3], а для доказательства сходимости – методика работ [3], [4].

Ключевые слова: *слабая компактность, слабая и сильная сходимость, h-ступенчатая функция, полуторалинейные формы.*

1. Постановка задачи. Существование и единственность решения разностной задачи

1^0. Пусть V и H – сепарабельные комплексные гильбертовы пространства, причем $V \subset H$, V плотно в H и непрерывно в него вложено.

Для каждого $t \in [0,T]$ (T конечно) рассмотрим непрерывную полуторалинейную форму $a(t;u,v)$ на $V \times V$, т.е. линейную по u и антилинейную по v, обладающую следующими свойствами:

$$a(t;u,v) = a^0(t;u,v) + a^1(t;u,v)$$

$u,v \to a^0(t;u,v)$ – непрерывные полуторалинейные формы на $V \times V$, при $t \in [0,T]$; для $\forall\ u,v \in V$ функция $t \to a^0(t;u,v)$ непрерывно дифференцируемая в $[0,T]$ и

$$\left|a^0(t;u,v)\right| \le K\|u\|_V \|v\|_V,$$

$$a^0(t;u,v) = \overline{a^0(t;v,u)}.$$

Кроме того, существует такое λ, что

$$a^0(t;v,v) + \lambda\|v\|_H^2 \ge \alpha\|v\|_V^2, \ \forall v \in V, \alpha > 0 \tag{1}$$

(условие коэрцитивности или эллиптичности).

$a^1(t;u,v)$ непрерывные полуторалинейные формы на $V \times H$, для $\forall u \in V, \forall v \in H$ функция $t \to a^1(t;u,v)$ измерима в $[0,T]$ и

$$\left|a^1(t;u,v)\right| \le L\|u\|_V \|v\|_H.$$

Задача 1. Для всякой функции φ, удовлетворяющей следующим условиям:

$$\varphi \in L^2(0,T;V), \quad \varphi' \in L^2(0,T;H), \quad \varphi(T)=0, \tag{2}$$

отыскивается функция $u(t)$ такая, что

$$u \in L^\infty(0,T;V), \tag{3}$$

$$\int_0^T \{a(t;u(t),\varphi(t)) - (u(t),\varphi'(t))_H\}dt = \int_0^T (f(t),\varphi(t))_H\,dt + (u_0,\varphi(0))_H, \tag{4}$$

u_0 задан в V, а f задана в $L^2(0,T;H)$.

Известно, что задача 1 имеет единственное решение (см.[4]). Без ограничения общности, в (1) λ можно принять равным нулю. В этом можно убедиться непосредственной заменой u на $u\cdot\exp(kt)$, где k подбирается соответствующим образом.

Пусть $\{V_h\}$ - семейство комплексных гильбертовых пространств, зависящих от векторного параметра h, $h\in R^n$, $|h|<h^0$ и $h\to 0$. Пусть $(.,.)_h$ и $((.,.))_h$ - скалярные произведения в V_h, а $|\cdot|_h$ и $\|\cdot\|_h$ - соответствующие нормы в V_h.

Пусть, далее, $O_h \in \Im(H;V_h)$ и $s_h \in \Im(V;V_h)$ множества таких операторов, что

$$|O_h|_h = \sup_{u\in H}\frac{|O_h u|_h}{\|u\|_H} \le C_1, \qquad \|s_h\|_h = \sup_{u\in V}\frac{\|s_h u\|_h}{\|u\|_V} \le C_2, \tag{5}$$

где C_1 и C_2 не зависят от h.

Для каждого $t\in[0,T]$ рассмотрим семейство непрерывных полуторалинейных форм $a_h(t;u_h,v_h)$ на $V_h\times V_h$, обладающих следующими свойствами:

$$a_h(t;u_h,v_h) = a_h^0(t;u_h,v_h) + a_h^1(t;u_h,v_h),$$

$a_h^0(t;u_h,v_h)$ – непрерывные полуторалинейные формы на $V_h\times V_h$, при $t\in[0,T]$; для $\forall u_h, v_h\in V_h$ функция $t\to a_h^0(t;u_h,v_h)$ непрерывно дифференцируема в $[0,T]$ и

$$\left|a_h^0(t;u_h,v_h)\right| \le M\|u_h\|_h\|v_h\|_h, \tag{6}$$

$$a_h^0(t;u_h,v_h) = a_h^0(t;v_h,u_h), \tag{7}$$

$$a_h^0(t;v_h,v_h) \ge \alpha\|v_h\|_h^2, \quad \forall v_h\in V_h, \quad \alpha = const > 0. \tag{8}$$

$a_h^1(t;u_h,v_h)$ – непрерывные, полуторалинейные формы на $V_h\times V_h$, при $t\in[0,T]$; для $\forall u_h, v_h\in V_h$ функция $t\to a_h^1(t;u_h,v_h)$ измерима и

$$\left|a_h^1(t;u_h,v_h)\right| \le Q\|u_h\|_h|v_h|_h. \tag{9}$$

Из дифференцируемости функции $t\to a_h^0(t;u_h,v_h)$ следует, что

$$\left|\frac{d}{dt}a_h^0(t;u_h,v_h)\right| \le P\|u_h\|_h\|v_h\|_h, \quad t\in[0,T], \tag{10}$$

где M и Q не зависят от h и t; P не зависит от t и, по нашему предположению, и от h.

Рассмотрим также $\forall t\in[0,T]$ другое семейство непрерывных полуторалинейных форм $r_h(t;u_h,v_h)$ на $V_h\times V_h$, обладающих следующими свойствами: для $\forall u_h, v_h\in V_h$ функция $t\to r_h(t;u_h,v_h)$ измерима и

$$\left| r_h(t;u_h,v_h) \right| \le N \left\| u_h \right\|_h \left\| v_h \right\|_h , \tag{11}$$

где N не зависит от h и t.

На $0 \le t \le T$ рассмотрим сетку $\left\{ \tau j,\ j=0,1,\ \dots\ ,m, \tau = \dfrac{T}{M} \right\}$ и пусть $W_j(t)$ характеристическая функция отрезка $\left[\tau j, \tau(j+1)\right)$, а $E_\tau(\tau j_1, \tau j_2; V_h)$ - пространство функций

$$u_{h,\tau}(t) = \sum_{j=j_1}^{j_2-1} u_{h,\tau}(\tau j) W_j(t), \qquad u_{h,\tau}(\tau j) \in V_h . \tag{12}$$

Так как $v_h \to a_h(t;u_h,v_h)$ непрерывная антилинейная форма в V_h, то

$a_h(t;u_h,v_h) = (A_h(t)u_h, v_h)$, где $A_h(t) \in \Im(V_h, V_h)$.

Допустим, что

$$A_{h,\tau}(t) = \frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\int_{\tau j}^{\tau(j+1)} A_h(t)dt \right) W_j(t) . \tag{13}$$

Для $\forall t \in [0,T]$ определим новое множество непрерывных полуторалинейных форм $a_{h,\tau}(t;u_h,v_h)$ на $V_h \times V_h$ следующим образом:

$$a_{h,\tau}(t;u_h,v_h) = (A_{h,\tau}(t)u_h, v_h)_h . \tag{14}$$

Аналогично вводим множество форм $r_{h,\tau}(t;u_h,v_h)$.

Пусть также

$$f_{h,\tau}(t) = \frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\int_{\tau j}^{\tau(j+1)} O_h f(t)dt \right) W_j(t) . \tag{15}$$

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$u_{h,\tau}(t) = y , \qquad u_{h,\tau}(t+\tau) = \hat{y} , \qquad u_{h,\tau}(t-\tau) = \breve{y} ,$$

$$y_t = (\hat{y} - y)/\tau , \qquad y_{\bar{t}} = (y - \breve{y})/\tau , \qquad f_{h,\tau}(t) = g ,$$

$$\left[a_{h,\tau}^0(t;y,y)\right]_t = \frac{1}{\tau}\left[a_{h,\tau}^0(t+\tau;\hat{y},\hat{y}) - a_{h,\tau}^0(t;y,y)\right], \qquad t \in [0, T-\tau) ,$$

$$\left\{a_{h,\tau}^0\right\}_t(t;u_h,v_h) = \frac{1}{\tau}\left[a_{h,\tau}^0(t+\tau;u_h,v_h) - a_{h,\tau}^0(t;u_h,v_h)\right], \qquad t \in [0, T-\tau) .$$

Из (10) следует

$$\left| \left\{a_{h,\tau}^0\right\}_t(t;u_h,v_h) \right| \le P \left\| u_h \right\|_h \left\| v_h \right\|_h , \ \forall t \in [0, T-\tau] , \tag{16}$$

функцию $t \to a_h^0(t;u_h,v_h)$ продолжим на $T \le t \le T+\tau$ так, чтобы сохранилось свойство дифференцируемости и условие (10) удовлетворялось в $[0, T+\tau)$. Тогда форму $\left\{a_{h,\tau}^0\right\}_t(t;u_h,v_h)$ можно определить на $[0,T)$ и (16) будет иметь место для $t \in [0,T)$.

Для каждой пары (h,τ) сформулируем следующую разностную задачу:

Задача 2: Для всякого $v_h \in V_h$ отыскивается функция $y = u_{h,\tau}(t) \in E_\tau(0, T+\tau; V_h)$ такая, что

$$(y_t, v_h)_h + a_{h,\tau}(t;y,v_h) + \tau r_{h,\tau}(t;y_t,v_h) = (g, v_h)_h , \qquad t \in [0,T) , \tag{17}$$

$$y(0) = u_{h,\tau}(0) = s_h u_0 . \tag{18}$$

2^0. Допустим, что

$$\operatorname{Re} r_{h,\tau}(t;y,y) \geq \frac{1}{2} a^0_{h,\tau}(t;y,y) - \frac{1}{2\tau}(y,y). \tag{19}$$

Тогда, из (8) следует, что задача 2 имеет единственное решение.
Действительно, напишем (17) для $t = \tau(j-1)$

$$(y;v_h)_h + \tau\, r_{h,\tau}(\tau(j-1);y,v_h) = (\breve{y},v_h)_h - \tau\, a_{h,\tau}(\tau(j-1);\breve{y},v_h) + \tau\, r_{h,\tau}(\tau(j-1);\breve{y},v_h) + \tau(g;v_h)_h,$$

которое можно переписать так:

$$\widetilde{r}_{h,\tau}(\tau(j-1);y,v_h) = (\widetilde{g}_{h,\tau}(\tau(j-1)),v_h)_h, \tag{20}$$

где $\widetilde{g}$ – известный элемент пространства V_h, а $\widetilde{r}_{h,\tau}(\tau(j-1);y,v_h)$ – непрерывная полуторалинейная форма на $V_h \times V_h$, для которой

$$\operatorname{Re} \widetilde{r}_{h,\tau}(\tau(j-1);v_h,v_h) \geq |v_h|^2_h + \frac{\tau}{2} a_{h,\tau}(t;v_h,v_h) - \frac{1}{2}|v_h|^2_h,$$

или, используя (8),

$$\operatorname{Re} \widetilde{r}_{h,\tau}(\tau(j-1);v_h,v_h) \geq \frac{\tau}{2}\alpha \|v_h\|^2_h.$$

Отсюда и следует существование и единственность решения задачи (20) (см. [4]).

3^0. Пусть V' двойственно к V. Так как $v \to a(t;u,v)$ непрерывная антилинейная форма на V, то пишем

$$a(t;u,v) = \langle A(t)u,v \rangle, \quad A(t) \in \Im(V,V'),$$

$\langle \,.\,,.\, \rangle$ обозначает двойственность между V и V'. Тогда решение u задачи 1 удовлетворяет в V' уравнению

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t)$$

почти всюду в $[0,T]$, и условию $u(0) = u_0$.

Аналогично, решение y задачи 2 удовлетворяет в V_h уравнению

$$y_t + \tau R\, y_t + Ay = \varphi$$

и условию $y(0) = y_0$.

Это регуляризованная двухслойная схема А.А.Самарского, где операторы R и A зависят от h, τ и t.

2. Теорема компактности и основные леммы

1^0. Обозначим через V_h пространство таких h-ступенчатых функций u_h, определенных в открытой области, содержащей Ω, что $\delta_i u_h$, $1 \leq i \leq n$, определены в Ω. $q_h u_h$, $q_h \delta_i u_h$ - суженые в Ω функции u_h, $\delta_i u_h$.

Пусть

$$p_h u_h = (q_h u_h, q_h \delta_1 u_h, \ldots, q_h \delta_n u_h),$$

$$p_h u_h \in F = \left(L^p(\Omega)\right)^{n+1},$$

в F определена норма

$$\| f \|_F = \left(\sum_{i=o}^{n} \| f_i \|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, \; f = (f_0, f_1, ..., f_n) .$$

Имеет место следующая теорема [3]:

Теорема 1. Множество B , где

$$B = \left\{ q_h u_h \mid u_h \in \underset{|h| \le h^0}{U} V_h, \| p_h u_h \|_F \le 1 \right\}$$

– относительно компактно в $L^p(\Omega)$, если Ω открытое, ограниченное множество с «достаточно гладкой» границей.

Заметим, что теорема остается верной, если разностную производную δ_i заменим любой другой разностной производной, изменится только область определения функции.

2^0. Сформулируем также ряд легко доказываемых лемм.

Лемма 1. Пусть $t \to \varphi(t)$ – функция, определенная в R и такая, что

$$\varphi(t) = \sum_j \varphi_j W_j(t) ,$$

Тогда

$$\int_0^{\tau j} \varphi_t(t) dt = \int_{\tau}^{\tau(j+1)} \varphi_{\bar{t}}(t) dt = \varphi_j - \varphi_0 ,$$

где

$$\varphi_t(t) = \frac{1}{\tau}(\varphi(t+\tau) - \varphi(t)), \; \varphi_{\bar{t}}(t) = \frac{1}{\tau}(\varphi(t) - \varphi(t-\tau)) .$$

Лемма 2. Пусть $\varphi(t) = \sum_j \varphi_j W_j(t)$, где $\varphi_j \in R$.

Если для каждого j, $0 \le j \le m$, имеет место неравенство

$$\varphi_j + \alpha_j \le C + \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau j} \varphi(t) dt , \; \alpha_j \ge 0, \quad \tau_0 > 0 ,$$

тогда

$$\varphi_j + \alpha_j \le C \exp\left(\frac{\tau j}{\tau_0} \right) \le C \exp\left(\frac{\tau m}{\tau_0} \right),$$

а если для всякого j, $0 \le j \le m$, имеет место неравенство

$$\varphi_j + \alpha_j \le C + \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau(j+1)} \varphi(t) dt , \; \alpha_j \ge 0, \quad \tau_0 > 0 ,$$

то

$$\varphi_j + \alpha_j \le C \exp\left(\frac{\tau j}{\tau_0} \right) \le C \exp\left(\frac{\tau_0 m}{\tau} \right), \text{ для } \tau < \tau_0 .$$

Лемма 3.

$$2 \operatorname{Re} a^0_{h,\tau}(t; y, y_t) = \left[a^0_{h,\tau}(t; y, y) \right]_t - \tau a^0_{h,\tau}(t; y_t, y_t) - \{a^0_{h,\tau}\}_t (t; \hat{y}, \hat{y}) .$$

3. Априорные оценки, устойчивость

1^0. Подставляя в (17) $v_h = y_t$, получим

$$(y_t, y_t)_h + a_{h,\tau}(t; y, y_t) + \tau r_{h,\tau}(t; y_t, y_t) = (g, y_t)_h .$$

Отсюда

$$2|y_t|_h^2 + 2\tau \operatorname{Re} r_{h.\tau}(t;\, y_t, y_t) + 2\operatorname{Re} a_{h.\tau}^0(t;\, y, y_t) + 2\operatorname{Re} a_{h.\tau}^1(t;\, y, y_t) = 2\operatorname{Re}(g, y_t)_h .$$

Условие (19) и лемма 3 дают

$$2|y_t|_h^2 + \tau a_{h.\tau}^0(t;\, y_t, y_t) - |y_t|_h^2 + \left[a_{h.\tau}^0(t;\, y, y)\right]_t - \tau a_{h.\tau}^0(t;\, y_t, y_t) - \left\{a_{h.\tau}^0\right\}_t(t;\, \hat{y}, \hat{y}) \le$$
$$\le 2\operatorname{Re}(g, y_\tau)_h - 2\operatorname{Re} a_{h.\tau}^1(t;\, y, y_t) ,$$

или из (9)

$$|y_t|_h^2 + \left[a_{h.\tau}^0(t;\, y, y)\right]_t \le \left\{a_{h.\tau}^0\right\}_t(t;\, \hat{y}, \hat{y}) + 2|g|_h |y_t|_h + 2Q\|y\|_h |y_t|_h .$$

Условие (16) дает

$$|y_t|_h^2 + \left[a_{h.\tau}^0(t;\, y, y)\right]_t \le P\|\,\hat{y}\,\|_h^2 + 2\left(|g|_h + Q\|y\|_h\right)|\,y_t\,|_h ,$$

$$\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)|y_t|_h^2 + \left[a_{h.\tau}^0(t;\, y, y)\right]_t \le P\|\,\hat{y}\,\|_h^2 + \varepsilon\left(|g|_h + Q\|y\|_h\right)^2 \le P\|\,\hat{y}\,\|_h^2 + \varepsilon(1+\varepsilon_1)|g|_h^2 + \varepsilon Q^2\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\|\,y\,\|_h^2 .$$

Интегрируя данное неравенство от 0 до τj и используя лемму 1, получим

$$\eta\int_0^{\tau j}|y_t|_h^2 dt + a_{h.\tau}^0(\tau j;\, y(\tau j), y(\tau j)) \le a_{h.\tau}^0(0;\, y(0), y(0)) + P\int_\tau^{\tau(j+1)}\|\,y\,\|_h^2 dt + \frac{\varepsilon Q^2(\varepsilon_2+1)}{\varepsilon_1}\int_0^{\tau j}\|\,y\,\|_h^2 dt +$$
$$+ \varepsilon(1+\varepsilon_1)\int_0^{\tau j}|g|_h^2 dt ,$$

где $\eta = 1 - 1/\varepsilon > 0$.

Из условий (6), (8) и (12) следует

$$\eta\int_0^{\tau j}|y_t|_h^2 dt + \alpha\|y(\tau j)\|_h^2 \le M\|y(0)\|_h^2 + \delta\|y(0)\|_h^2 + (P+\delta)\int_\tau^{\tau(j+1)}\|y\|_h^2 dt + \varepsilon(1+\varepsilon_1)\int_0^{\tau j}|g|_h^2 dt ,$$

$$\delta \equiv \frac{\varepsilon Q^2(\varepsilon_1+1)}{\varepsilon_1} ,$$

или

$$\frac{\eta}{\alpha}\int_0^{\tau j}|y_t|_h^2 dt + \|y(\tau j)\|_h^2 \le \frac{M+\delta}{\alpha}\|y(0)\|_h^2 + \frac{P+\delta}{\alpha}\int_\tau^{\tau(j+1)}\|y\|_h^2 dt + \frac{\varepsilon}{\alpha}(1+\varepsilon_1)\int_0^{\tau j}|g|_h^2 dt .$$

Из леммы 2 для достаточно малого τ имеем:

$$\frac{\eta}{\alpha}\int_0^{\tau j}|y_t|_h^2 dt + \|y(\tau j)\|_h^2 \le \left\{\frac{M+\delta}{\alpha}\|y(0)\|_h^2 + \frac{\varepsilon}{\alpha}(1+\varepsilon_1)\int_0^T|g|_h^2 dt\right\}\exp\frac{(P+\delta)T}{\alpha} . \qquad (21)$$

Условия (5), (15) и (18) дают

$$\|y(0)\|_h = \|s_h u_0\|_h \le C_2\|u_0\|_V ,$$

$$\int_0^T|g|_h^2 dt \equiv \int_0^T\left|f_{h,\tau}(t)\right|_h^2 dt \le C_1^2\int_0^T\|f(t)\|_H^2 dt .$$

Подставляя эти неравенства в (21), получаем следующие оценки, при достаточно малом τ, $t \in [0,T)$:

$$\|y(t)\|_h^2 \le \left\{ \delta_1 \|u_0\|_V^2 + \delta_2 \int_0^T \|f(t)\|_H^2 \, dt \right\} \exp \frac{(P+\delta)T}{\alpha}, \tag{22}$$

$$\int_0^T |y_t|_h^2 \, dt \le \left\{ \frac{\alpha}{\eta} \delta_1 \|u_0\|_V^2 + \delta_2 \int_0^T \|f(t)\|_H^2 \, dt \right\} \exp \frac{(P+\delta)T}{\alpha}, \tag{23}$$

$$\delta_1 \equiv C_2^2 (M+\delta)/\alpha > 0, \quad \delta_2 \equiv C_1^2 (1+\varepsilon_1)\varepsilon/\delta > 0,$$

где δ, δ_1, δ_2, ε и ε_1 не зависят от h и τ.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Если верно неравенство (19), то для решения y задачи 2 при достаточно малом τ справедливы оценки:

$$\|y(t)\|_h \le E_1, \quad t \in [0,T), \tag{24}$$

$$\int_0^T |y_t|_h^2 \, dt \le E_2, \tag{25}$$

где E_1 и E_2 не зависят от h и τ.

2^0. Пусть X - банахово пространство, (p_h) - множество непрерывных линейных отображений V_h в X, p_h - продолжение V_h в X.

Определение 1. Решение $y \equiv u_{h,\tau}(t)$ задачи 2 $L^\infty(0,T;X)$ - устойчиво для p_h, если существует такая постоянная K, не зависящая от h и τ, что

$$\| p_h y \|_X \le K, \quad \forall t \in [0,T).$$

Если

$$\left(\int_0^T \| p_h y \|_X^p \, dt \right)^{1/p} \le K,$$

то будем говорить, что y $L^p(0,T;X)$ - устойчиво.

Введем такое гильбертово пространство F, чтобы H было замкнутым подпространством F. Пусть π оператор отображения F в H, а $p_h \in \Im(V_h;F)$ и $q_h = \pi \circ p_h \in \Im(V_h;H)$ - множество операторов (p_h - продолжение V_h в F, q_h - продолжение V_h в H) таких, что

$$\| p_h \|_h = \sup_{y \in V_h} \frac{\| p_h y \|_F}{\|y\|_h} \le C_3, \quad |q_h|_h = \sup_{y \in V_h} \frac{\| q_h y \|_H}{|y|_h} \le C_4, \tag{26}$$

где C_3, $C_4 = const > 0$ не зависят от h.

Теорема 3. Если имеет место условие (19), то решение y задачи 2 $L^\infty(0,T;F)$ - устойчиво, и y_t $L^2(0,T;H)$ - устойчиво для любого h и при достаточно малом τ.

Доказательство. Из (24), (25) и (26) имеем:

$$\| p_h y \|_F \le C_3 \| y \|_h \le C_3 E_1 \equiv E_1^* = const, \tag{27}$$

$$\int_0^T \| q_h y_t \|_H^2 \, dt \le C_4 \int_0^T |y_t|_h^2 \, dt \le C_4 E_2 \equiv E_2^* = const. \tag{28}$$

Теорема доказана.

4. Сходимость решения разностной задачи к решению исходной задачи

Рассмотрим сходимость решения y задачи 2 к решению u задачи 1.

Пусть $\omega \in \Im(V;F)$, а V_0 - плотное подпространство V, а β_h - линейное отображение V_0 в V_h. Из теоремы 3 следует, что , при $h \to 0$ и $\tau \to 0$ из последовательности $\{y\}$ можно выбрать такую подпоследовательность, которую опять обозначим через $\{y\}$, что

$$[p_h y]_0^T \to U \text{ слабо в } L^\infty(0,T;F), \tag{29}$$

$$[q_h y_t]_0^T \to u' = \pi U' \text{ слабо в } L^2(0,T;H), \tag{30}$$

где $[\varphi]_0^T$ обозначает сужение $t \to \varphi(t)$ в $[0,T]$. Так как $q_h = \pi \circ p_h$, то

$$[q_h y]_0^T \to u = \pi U \text{ слабо в } L^\infty(0,T;H), \tag{31}$$

Предположим, что для всякой последовательности решений y задачи 2, удовлетворяющей (29), (30) имеют место следующие условия:

1. $u \in L^\infty(0,T;V)$, $U = \omega\, u$, (32)

2. Пусть $\psi(t)$ - непрерывно дифференцируемая скалярная функция

$$\psi(t) = 0, \quad \psi_\tau(t) = \sum_{j=-1}^{m-2} \psi((j+1)\tau) W_j(t), \tag{33}$$

и для любого $v \in V_0$

$$\int_0^T a_h(t;\, y(t), \psi_\tau(t)\beta_h v)\, dt \to \int_0^T a(t;\, y(t), \psi(t)v)\, dt, \tag{34}$$

$$\int_0^T r_h(t;\, y_t(t), \psi_\tau(t)\beta_h v)\, dt \to \int_0^T r(t;\, u'(t), \psi(t)v)\, dt, \tag{35}$$

$$\int_0^T (y(t), [\psi_\tau(t)]_{\bar t}\, \beta_h v)_h dt \to \int_0^T (u(t), \psi'(t)v)_H\, dt, \tag{36}$$

$$\int_0^T (O_h f(t), \psi_\tau(t)\beta_h v)_h\, dt \to \int_0^T (f(t), \psi(t)v)_H\, dt, \tag{37}$$

$$(s_h u_0, \beta_h v)_h \to (u_0, v)_H\,. \tag{38}$$

В этих условиях верна

Теорема 4. Если выполнены условия (32), ... , (38), то из последовательности $\{y\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{y\}$, что

$$[p_h y]_0^T \to \omega u \quad \text{ слабо в } L^\infty(0,T;F),$$

$$[q_h y_t]_0^T \to u' \quad \text{ слабо в } L^2(0,T;H).$$

Кроме того, $[q_h y]_0^T \to u$ слабо в $L^\infty(0,T;H)$, где u - решение задачи 1.

Замечание 1. Так как задача 1 допускает единственное решение, то $\{y\}$ последовательность будет обладать теми же свойствами, что и подпоследовательность $\{y\}$.

Доказательство теоремы. Имеем

$$\int_0^T \left\{ \left(y_t(t), \psi_\tau(t)\beta_h v \right)_h + a_{h,\tau}(t; y(t), \psi_\tau(t)\beta_h v) + \tau r_{h,\tau}(t; y_t(t), \psi_\tau(t)\beta_h v) \right\} dt =$$

$$= \int_0^T (g(t), \psi_\tau(t)\beta_h v)_h \, dt, \tag{39}$$

Из (13), (14), (15) и (33) следует, что

$$\int_0^T a_{h,\tau}(t; y(t), \psi_\tau(t)\beta_h v) dt = \int_0^T a_h(t; y(t), \psi_\tau(t)\beta_h v) dt,$$

$$\int_0^T r_{h,\tau}(t; y_t(t), \psi_\tau(t)\beta_h v) dt = \int_0^T r_h(t; y_t(t), \psi_\tau(t)\beta_h v) dt,$$

$$\int_0^T (g(t), \psi_\tau(t)\beta_h v) dt = \int_0^T (O_h f(t), \psi_\tau(t)\beta_h v)_h \, dt,$$

с другой стороны

$$\int_0^T (y_t(t), \psi_\tau(t)\beta_h v)_h \, dt = -\int_0^T (y(t), [\psi_\tau(t)]_{\bar t} \, \beta_h v)_h \, dt - \left(y(0), \beta_h v \right)_h \psi(0).$$

Тогда (39) можно переписать так:

$$\int_0^T \left\{ -\left(y(t), [\psi_\tau(t)]_{\bar t} \, \beta_h v \right)_h + a_h(t; y(t), \psi_\tau(t)\beta_h v) + \tau r_h(t; y_t(t), \psi_\tau(t)\beta_h v) \right\} dt =$$

$$= \int_0^T (O_h f(t), \psi_\tau(t)\beta_h v)_h \, dt + \left(s_h u_0, \beta_h v \right)_h \psi(0).$$

При наших предположениях, после перехода к пределу при $h \to 0$ и $\tau \to 0$ получим, что $u(t)$ для любого $v \in V_0$ удовлетворяет следующему уравнению

$$\int_0^T \left\{ -\left(u(t), \psi'(t) v \right)_H + a(t; u(t), \psi(t) v) \right\} dt =$$

$$= \int_0^T \left(f(t), \psi(t) v \right)_H dt + \left(u_0, v \right)_H \psi(0). \tag{40}$$

Но так как V_0 плотно в V, то (10) имеет место для любого $v \in V$. Более того, пространство функций $\sum \psi \otimes v$ ($\sum$ - конечная сумма), $\psi \in C^1(0,T)$, $\psi(T) = 0$, $v \in V$, плотно в пространстве таких функций φ, которые удовлетворяют (2) и снабжены нормой (см. [4])

$$\left\{ \int_0^T \left(\|\varphi(t)\|_V^2 + \|\varphi'(t)\|_H^2 \right) dt \right\}^{1/2}. \tag{41}$$

Следовательно, u удовлетворяет уравнению (4) и является, таким образом, решением задачи 1. Теорема доказана.

Для доказательства сильной сходимости дополнительно предположим, что

$$B = \left\{ q_h y \,/\, y \in \underset{\substack{|h|<h^0 \\ \tau<\tau^0}}{U} E_\tau(0,T;V_h), \quad \int_0^T \| p_h y \|_F^2 \, dt \le 1, \quad \int_0^T \| q_h y_t \|_H^2 \, dt \le 1 \right\}, \tag{42}$$

является относительно компактным в $L^2(0,T;H)$. Это допущение соответствует случаю, когда вложение пространства таких функций $u \in L^2(0,T;V)$, для которых $u' \in L^2(0,T;H)$, компактно в $L^2(0,T;H)$.

Доказывается следующая

Теорема 5. Если (42) является относительно компактным в $L^2(0,T;H)$ и имеют место условия предыдущей теоремы, тогда

$$[q_h y]_0^T \to u \quad \text{сильно в } L^2(0,T;H).$$

Доказательство. Для достаточно малого τ, на основании теоремы устойчивости, теорема 2, имеем:

$$\int_0^T \| p_h y\|_F^2 \, dt + \int_0^T \| q_h y_t \|_H^2 \, dt \le K .$$

Но из теоремы 4 следует, что $[q_h y]_0^T \to u$ слабо в $L^\infty(0,T;H)$, а тем более и в $L^2(0,T;H)$. Тогда, так как множество B относительно компактно в $L^2(0,T;H)$, из слабой сходимости следует сильная сходимость $[q_h y]_0^T$ к u в $L^2(0,T;H)$, где u - решение задачи 1.
Теорема доказана.

Литература

1. Самарский А.А. О регуляризации разностных схем, ЖВМ и МФ, 1967, 7, №1, 62-93.
2. Самарский А.А. Классы устойчивых схем, ЖВМ и МФ, 1967, 7, №5, 1096-1133.
3. Raviart R.A. Sur l'approximation de certaines equations d'evolution lineaires et non lineaires. J. de Math. pures et appl., 46, №1, 1967, 11-107.
4. Lions J.–L. Equations differentielles operationnelles et problemes aux limites, Springer Verlag Berlin , 1961.

Статья получена: 2009-06-29