УДК 519.642

К вопросу вычисления напряжений в решении одного класса задач теории упругости для плоскости с разрезами по схеме приближённого вычисления интегралов типа Коши

Кутателадзе Гурам Алексеевич, Саникидзе Джемал Гуриевич
Институт вычислительной математики им. Н.И.Мусхелишвили Грузия, Тбилиси, 0193, ул. Акурская, 8

Аннотация

Рассматривается вопрос численной реализации решений некоторых граничных задач, относящихся к приложениям известной задачи сопряжения теории голоморфных функций. В данном случае соответствующая задача конкретизируется в виде определенного класса задач теории упругости для бесконечной плоскости с ориентированными прямолинейными разрезами.

Ключевые слова: *плоскость, разрез, напряжение, интеграл, вычисление, квадратурная формула, оценка.*

Теория интеграла типа Коши, как известно, играет существенную роль в граничных задачах теории голоморфных функций и ее приложениях. В частности, в интегралах типа Коши выражаются решения ряда задач теории упругости, представляющих определенные частные случаи т.н. общей задачи сопряжения ([1], [2]). К задачам такого рода относится, например, рассматриваемый в данной заметке один класс задач о напряженно-деформированном состоянии упругой плоскости с конечными прямолинейными разрезами [3]. При определенном конкретном расположении упомянутых разрезов в [3] дается эффективное (замкнутое) решение таких задач (выраженное в интегралах типа Коши). Аналогичные рассмотрения, в частности, тесно связаны с вопросом определения хорошо известного в такого рода задачах коэффициента интенсивности напряжений. Отметим, что дальнейший наш интерес представляет вопрос о численной реализации получаемых в таком виде решений.

С целью более конкретного представления подразумеваемых в данной заметке задач предположим, что плоскость комплексного переменного $z = x + iy$ разделена вдоль $2r$ отрезков $a_k \le x \le b_k$, $-b_k \le x \le -a_k$ ($k = 1,2,...,r$) действительной оси и $2m$ отрезков $\alpha_j \le y \le \beta_j$, $-\beta_j \le y \le -\alpha_j$ ($j = 1,2,...,m$) мнимой оси. Пусть L_k и L_{-k} обозначают разрезы, лежащие вдоль отрезков $[a_k, b_k]$ и $[-b_k, -a_k]$, Λ_j и Λ_{-j} — разрезы, лежащие вдоль отрезков $[i\alpha_j, i\beta_j]$ и $[-i\beta_j, -i\alpha_j]$, а L, Λ — совокупности этих разрезов соответственно. Многосвязную область — плоскость с разрезами, обозначим через S. Представляет интерес, например, следующая

З а д а ч а. Найти кусочно-голоморфную в S с линией скачков $L \cup \Lambda$ функцию $F(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, исчезающую на бесконечности, по граничному условию

$$\left[F(\tau) + \overline{F(\tau)}\right]^{\pm} = 2f^{\pm}(\tau), \quad \tau \in L, \tag{1}$$

$$\left[F(\tau) + \overline{F(\tau)}\right]^{\pm} = 2g^{\pm}(\tau), \quad \tau \in \Lambda, \tag{2}$$

где $f^{\pm}(\tau)$ заданные на L, а $g^{\pm}(\tau)$ — на Λ действительные функции класса H (Гельдера). Индексы «+» и «-» указывают граничные значения на берегах разрезов L (Λ) сверху (слева) и снизу (справа) соответственно.

После ряда преобразований граничным условиям (1) и (2) можно придать следующий вид

$$\Omega^+_{2\mu-n}(\tau)+(3-2\mu)\Omega^-_{2\mu-n}(\tau)=f_{2\mu-n}(\tau)\,,\quad \tau\in L\,; \tag{3}$$

$$\Omega^+_{2\mu-n}(\tau)+(2n-1)\Omega^-_{2\mu-n}(\tau)=f_{2\mu-n}(\tau)\,,\quad \tau\in \Lambda \tag{4}$$

$$(\mu=\overline{1,2},\ n=\overline{0,1})\,,$$

где введены следующие обозначения

$$f_{2\mu-n}(\tau)=f^+(\tau)+(3-2\mu)f^-(\tau)+(2n-1)[f^+(-\overline{\tau})+(3-2\mu)f^-(-\overline{\tau})]\,,\quad \tau\in L\,,$$

$$f_{2\mu-n}(\tau)=g^+(\tau)+(2n-1)g^-(\tau)+(3-2\mu)[g^+(\overline{\tau})+(2n-1)g^-(\overline{\tau})]\,,\quad \tau\in \Lambda\,,$$

$$\Omega_{2\mu-n}(z)=F(z)+(3-2\mu)\overline{F}(z)+(2n-1)[\overline{F}(-z)+(3-2\mu)F(-z)]\,. \tag{5}$$

Исходя из этих рассмотрений, решение задачи сводится к четырем задачам определения данных формулой (5) функций $\Omega_{2\mu-n}(z)$ ($\mu=\overline{1,2}$ $n=\overline{0,1}$), — кусочно-голоморфных в S с линией скачков $L\cup\Lambda$, исчезающих на бесконечности — по граничным условиям (3) и (4). Такого рода задачи являются простейшими случаями хорошо известной в литературе [1; 2, §110] задачи линейного сопряжения.

В нахождении соответствующих решений существенную роль играют канонические функции $T_{2\mu-n}(z)$ ($\mu=\overline{1,2}$, $n=\overline{0,1}$), являющиеся решениями следующей однородной задачи

$$T^+_{2\mu-n}(\tau)+(3-2\mu)T^-_{2\mu-n}(\tau)=0\,,\quad \tau\in L\,,$$

$$T^+_{2\mu-n}(\tau)+(2n-1)T^-_{2\mu-n}(\tau)=0\,,\quad \tau\in \Lambda\quad (\mu=\overline{1,2}\,,\ n=\overline{0,1}).$$

Частное решение этой задачи

$$T_{2\mu-n}(z)=[\chi(z)]^{2-\mu}[Q(z)]^n\quad (\mu=\overline{1,2}\,,\ n=\overline{0,1}),$$

при

$$\chi(z)\equiv\chi_0(z)=\prod_{k=1}^{r}\left(z^2-a_k^2\right)^{-1/2}\left(z^2-b_k^2\right)^{-1/2}\,,$$

$$Q(z)\equiv Q_0(z)=\prod_{j=1}^{l}\left(z^2+\alpha_j^2\right)^{-1/2}\left(z^2+\beta_j^2\right)^{-1/2}$$

принадлежит классу решений [1], неограниченных вблизи всех концов.

Если требуется построить решения, ограниченные вблизи заданных концов $c_1, c_2,..., c_l$ ($0\le l\le 2r$), $d_1, d_2,..., d_s$ ($0\le s\le 2m$), то соответствующие функции χ, Q имеют вид

$$\chi(z)\equiv\chi_q(z)=\prod_{k=1}^{q}\left(z^2-c_k^2\right)^{1/2}\prod_{k=q+1}^{2p}\left(z^2-c_k^2\right)^{-1/2}\,,$$

$$Q(z)\equiv Q_s(z)=\prod_{j=1}^{s}\left(z^2+d_j^2\right)^{1/2}\prod_{j=s+1}^{2m}\left(z^2+d_j^2\right)^{-1/2}\,.$$

Здесь через c_k, d_j обозначены, соответственно, концы разрезов L и Λ, перенумерованные в определенном порядке. Отметим, что подобные вопросы в более детальном виде изложены в работе [3].

Если подразумевать с самого начала, что $l=r$ и $s=m$, тогда общее решение соответствующему (3)-(4) однородного уравнения будет равно нулю, а частное решение неоднородного уравнения можно представить в виде

$$\Omega^*_{2\mu-n}(z)=T_{2\mu-n}(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f_{2\mu-n}(\tau)d\tau}{T^+_{2\mu-n}(\tau)(\tau-z)}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Lambda \frac{f_{2\mu-n}(\tau)d\tau}{T^+_{2\mu-n}(\tau)(\tau-z)}\right]. \tag{6}$$

При $l=r$, $s=m$, $l+s=r+m$ исчезающее на бесконечности решение (6) всегда существует.

К изложенным здесь задачам, в частности, приводят задачи теории трещин, тесно связанные с теорией разрушения. В связи с данными выше формулами математическое выражение соответствующего процесса характеризуется поведением рассматриваемых интегралов при приближении z к концам отрезков интегрирования, что и приводит к надобности вычисления этих интегралов при таких значениях z.

Согласно сказанному, представляет определенный интерес вычисление содержащихся в полученных выше формулах интегралов типа Коши. В общем случае это можно осуществлять приближенно на основе применения тех или иных квадратурных формул. Среди работ по приближенному, также и точному вычислению аналогичных и других интегралов типа Коши с весовыми функциями (и соответствующих им сингулярных интегралов) следует отметить, например, работы [4,5] (см. также, [6]). Применительно к случаю рассматриваемых здесь интегралов соответствующие формулы при достаточной гладкости функции f могут приводить к довольно точным результатам для значений z, находящихся на фиксированных расстояниях от концов отрезка интегрирования. При произвольном стремлении z к соответствующим концам получение более или менее приемлемых оценок также оказывается возможным. Очевидно, что именно такие случаи и представляются наиболее важными в практических применениях.

В заметке [7] изложена определенная квадратурная схема аппроксимации интегралов типа Коши с ядром вида $(t-z)^{-1}$ в случае замкнутых контуров интегрирования. Упомянутая приближенная схема характерна тем, что она осуществляет равномерную относительно z аппроксимацию данного интеграла вплоть до самого контура интегрирования. В данной заметке аналогичная схема распространяется на случаи интегралов типа Коши по разомкнутым контурам (отрезкам) при наличии весовых функций типа Якоби, с получением при этом равномерной вплоть до контура (включая концы) оценки. Подразумеваемые здесь интегралы, содержащие, как частный случай, интегралы вида (6) (см., также, [3]), тесно связаны с отмеченной выше задачей линейного сопряжения.

Учитывая сказанное выше относительно входящих в получаемые решения интегралов, на основе применения элементарных преобразований наши рассмотрения в конечном счете сводятся к вопросу приближенного вычисления интегралов типа Коши вида

$$I_{p,q}(\varphi;z)=\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\rho_{p,q}(t)\varphi(t)}{t-z}dt \qquad (z\notin[-1,+1]),$$

где $\rho_{p,q}(t)=(1-t)^p(1+t)^q$ ($p,q>-1$) упомянутая выше весовая функция.

С целью построения нужных нам квадратурных формул разобьем отрезок [-1,+1] на n равные части[1] точками (узлами) $\tau_0=-1$, τ_1, τ_2,. . . , τ_{n-1}, $\tau_n=1$. Считая, что t_0 —

[1] Заметим, однако, что соответствующие результаты остаются в силе и при несколько более общих способах разбиения. А, именно, когда отношения любых двух подотрезков ограничены при $n\to\infty$ одним и тем же фиксированным числом.

произвольно меняется на отрезке [-1,+1], рассмотрим Лагранжев кусочно-линейный интерполянт

$$L_n(\varphi;t_0) = l_{\nu 0}(t_0)\varphi(\tau_\nu) + l_{\nu 1}(t_0)\varphi(\tau_{\nu+1}) \quad (0 \le \nu \le n-1),$$

$$l_{\nu 0}(t_0) = \frac{t_0 - \tau_\nu}{\tau_{\nu+1} - \tau_\nu}, \quad l_{\nu 1}(t_0) = \frac{t_0 - \tau_{\nu+1}}{\tau_\nu - \tau_{\nu+1}}$$

где ν $(0 \le \nu \le n-1)$ ─ номер, при котором для данного t_0 имеет место $t_0 \in [\tau_\nu, \tau_{\nu+1}]$.
Далее, полагая $\sigma = \overline{0,n}$, $k = \overline{0,1}$ и обозначив при данных σ

$$L_{nk}(\varphi;t_0) = \begin{cases} \varphi(t_0), & \sigma + k \ne \nu, \nu+1; \\ L_n(\varphi;t_0), & \sigma + k = \nu, \nu+1, \end{cases}$$

на каждом отрезке вида $[\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}]$ $(0 \le \sigma \le n)$ и данном $t_0 \in [-1,+1]$ функцию $\varphi(t)$ будем приближать по схеме

$$\varphi(t) \approx L_n(\varphi;t_0) + (t - t_0)\sum_{k=0}^{1} l_{\sigma k}(t)\frac{\varphi(\tau_{\sigma+k}) - L_{nk}(\varphi;t_0)}{\tau_{\sigma+k} - t_0}, \tag{7}$$

где (линейные) функции $l_{\sigma k}(t)$ определены согласно указанному выше. При этом, согласно принятым выше обозначениям, смысл выражения в правой части (7) при $t_0 = \tau_{\sigma+k}$ очевиден. Заменяя плотность $\varphi(t)$ в интегралах $I_{p,q}$ выражением (7), мы получим квадратурную формулу вида

$$I_{p,q}(\varphi;z) \approx I_{p,q}(1;z)L_n(\varphi;t_0) + \sum_{k=0}^{1}\sum_{\sigma=1}^{n} p_{\sigma k}(\rho_{p,q};t_0,z)\frac{\varphi(\tau_{\sigma+k}) - L_{nk}(\varphi;t_0)}{\tau_{\sigma+k} - t_0} \quad (t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}), \tag{8}$$

где

$$p_{\sigma k}(\rho_{p,q};t_0,z) = \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \rho_{p,q}(t) l_{\sigma k}(t)dt + (z - t_0)\int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \rho_{p,q}(t)\frac{l_{\sigma k}(t)}{t - z}dt,$$

а через $I_{p,q}(1;z)$ обозначены интегралы $\int_{-1}^{+1}\frac{\rho_{p,q}(t)dt}{t-z}$. С рассматривающей выше точки зрения эти интегралы представляют особый интерес. В частности, они определяют характер поведения приведенной выше соответствующей квадратурной суммы (ровно также, как и самого исходного интеграла) при стремлении z к концам ± 1, особенно, соответствующим отрицательным значениям параметров p, q ([1], § 21). В зависимости от значений параметров p, q данные интегралы могут быть вычислены точно, или приближенно с любой заданной степенью точности. В частности, отметим формулы

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\rho_{p,q}(t)dt}{t-z} = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{\sin p\pi}\left[1 - (z-1)^p(z+1)^q\right], & p+q=0, \\ \dfrac{\pi}{\sin p\pi}(z-1)^p(z+1)^q, & p+q=-1 \end{cases}$$

(при надлежащем выборе ветвей многозначных функций). Наряду с вычислением указанных интегралов для реализации квадратурной суммы (8) требуется еще вычисление зависящих от z (и t_0) коэффициентов $p_{\sigma k}$, что, очевидно, заключается в вычислении входящих в эти коэффициенты определенных стандартных (не содержащих функции φ) интегралов.

Оценка погрешности указанной здесь аппроксимации интегралов $I_{p,q}(\varphi;z)$ по квадратурным формулам вида (8) проводится аналогично тому как в [7], на основе используемых там же разложений $\varphi(t)$ при условии принадлежности второй производной $\varphi''(t)$ классу ограниченных на [-1,+1] функций. При этом, используя и в данном случае наличие параметра $t_0 \in (-1,+1)$ в квадратурных суммах, учитывается возможность сколь угодного приближения z к любой точке заданного отрезка интегрирования. С этой точки зрения, особый интерес для нас в данном случае представляет оценка соответствующего остаточного члена вблизи концов ± 1. Такая оценка осуществляется на основе аналогичного что и в [7] интегрального представления остаточного члена указанной здесь квадратурной формулы, с использованием при этом фактора присутствия свободно избираемого параметра $t_0 \in [-1,+1]$. В частности, здесь при рассмотрении любого из концов ± 1 параметр t_0 считается совпадающим с соответствующим концом. Дальнейшие рассмотрения упомянутого остаточного члена с учетом наличия весовой функции $(z-1)^p(z+1)^q$ ($p,q > -1$) приводят, при указанном выше предположении о функции $\varphi(t)$, к равномерной относительно $z \notin [-1,+1]$ оценке $O\left(n^{-2+\gamma}\ln n\right)$, $\gamma = \max\left(|p|,|q|\right)$ ($n \to \infty$), когда хотя бы одно из чисел p, q отрицательно, и, к оценке $O(n^{-2}\ln n)$ в противном случае.

Работа выполнена при поддержке гранта GNSF/ST08/3-390.

Литература

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., 1966.
3. Кутателадзе Г. А. Краевые задачи теории голоморфных функций для плоскости с прямолинейными разрезами. Инженерная физика, 4, 2000, 12-18.
4. Пыхтеев Г. Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши по разомкнутому контуру. Appl. Math., 4б 1965, 351-373.
5. Пыхтеев Г. Н. О квадратурных формулах для интегралов типа Коши по прямолинейному разомкнутому контуру и методы оценки их погрешности. Изв. АН БССР, сер. ф.-м. наук, №5, 1969, 55-63.
6. Саникидзе Д. Г. Вычислительные процессы для сингулярных интегралов с ядром Коши и их некоторые приложения. Дисс., М., МФТИ, 1986.
7. Саникидзе Д. Г., Нинидзе К. Р. Метод свободных параметров в приближенном вычислении интегралов типа Коши. Тр. X Междунар. Симпоз. «Методы дискретных особенностей в задачах матем. физ.», 2001, 299-302.

Статья получена: 2009-07-02