# Об одной нелокальной характеристической задаче для класса квазилинейных нестрого гиперболических уравнений второго порядка

Дж.К.Гвазава
Математический Институт А.Размадзе, Тбилиси, Грузия, jgvaza@rmi.acnet.ge

***Резюме***

*Исследована задача со смещением для модельного квазилинейного уравнения второго порядка гиперболического типа, допускающего параболическое вырождение. Нелокальное условие связывает значения решения в точках искомых характеристик.*

***Ключевые слова***: *гиперболичность, нелинейный, нелокальный, характеристический*

В данной работе будут обсуждены некоторые вопросы,связанные с одной постановкой видоизмененной задачи Дарбу со смещением для нестрого гиперболических уравнений второго порядка с квазилинейной главной частью на плоскости переменных $x, t$. Предполагается, что рассматриваемые уравнения имеют два семейства действительных характеристик, направления которых на некоторых множествах точек могут сливаться в зависимости от свойств и значений неизвестного решения $u(x,t)$ и его производных первого порядка $u_x, u_t$. Семейства эти определяются самым уравнением и соответству-ющими ему характеристическими $\lambda_1(x,t,u,u_x,u_t)$ и $\lambda_2(x,t,u,u_x,u_t)$ корнями. В даль-нейшем их будем называть $\lambda_1$ или $\lambda_2$ – семействами характеристик. Из-за зависимости характеристических направлений от неизвестного решения ни сами семейства, ни множество точек параболического вырождения уравнения не заданы и их следует искать одновременно с решением. Естественно, что каждому конкретному решению соответствуют свои семейства характеристик.

Параболическое вырождение даже для уравнений с линейной главной частью может оказаться причиной ряда разнообразных особенностей (см. [1-3]). Для уравнений с нелинейными главными частями эти особенности существенно ограничивают возможность применения стандартных методов и довольно часто препятствуют даже распространению их классических линейных постановок . Это особенно касается задач с частично или полностью характеристическими носителями данных . По причине слияния двух явлений – нелинейности и параболического вырождения возникает необходимость поиска других дополнительных средств и подходов как к постановке, так и к исследованию нелинейных вариантов линейных характеристических задач. С этой целью вполне эффектными могут оказаться аналоги Римановых характеристических инвариантов ([4]) и явные представления общих интегралов ([5-6]). Их комбини-рованием с известными методами нелинейного анализа ниже будет предпринята попытка рассмотрения одной модифицированной постановки характеристической задачи. Поэтому наши рассуждения можно распространить в пределах уравнений , у которых эти характеристические инварианты строятся в явном виде. Мы ограничимся уравнениями, характеристические инварианты и общие интегралы которых имеют максимально простую структуру. Таким является,например , подкласс родственных уравнений поверхностей каналов, допускающих явное представление общих интегра-лов двумя произвольными элементами (см.[6]). Одно из таких уравнений, примечательный своей изящной простотой и множеством практических приложений, имеет вид (см.например,[7]) :

$$(u_t^2 - 1)u_{xx} - 2u_x u_t u_{xt} + u_x^2 u_{tt} = 0 \tag{1}$$

Соответствующие ему характеристические корни

$$\lambda_1 = -\frac{u_x}{u_t+1}, \lambda_2 = -\frac{u_x}{u_t-1}$$

определяют множество точек возможного параболического вырождения уравнения (1) нулями производной $u_x$ неизвестного решения $u(x,t)$ при ограниченной его произ-водной $u_t$. Ими же определяется класс гиперболических решений уравнения (1) условием $u_x \neq 0$. Характеристические инварианты семейства $\lambda_1$ представлены соотношениям

$$\xi_1 = u + t \quad , \qquad \xi_2 = \frac{u_x}{u_t-1} \tag{2}$$

Такой же простой вид имеют инварианты и другого семейства $\lambda_2$

$$\eta_1 = u - t \ , \qquad \eta_2 = \frac{u_x}{u_t+1}. \tag{3}$$

и все они постоянны вдоль любой кривой соответствующего семейства. На их основа-нии строиться общий интеграл уравнения (1) с двумя произвольными функциями $F, G \in C^2(R_1)$ ( см.[7])

$$F(u+t) + G(u-t) - x = 0 \tag{4}$$

Применением общего интеграла (4 ) и характеристических инвариантов (2) и (3) на при-мере уравнения (1) рассмотрим один из многочисленных вариантов задач со смещени-ем, или как их теперь называют в литературе, нелокальных задач, связывающих значе-ния искомого решения в различных точках носителя данных. Задачи с такими условиями имеют давнюю историю, однако из работ,им посвященным, особо следует выделить [8], вложившую в эти задачи новое содержание и стимулирующую целый поток важных исследований.

Пусть, на замкнутом интервале $\bar{J} = \{0 \le x \le l\}$ заданы дважды непрерывно диффе-ренцируемые функции $\alpha, \gamma, \delta, \nu$ , подчиненные условиям:

$$\alpha(x) \neq 1 \,,\, \alpha'(x) > 0 \,,$$
$$\delta(0) \neq 0,$$
$$\gamma(0) = 0, \ \ \gamma'(x) > 0, \ \ \gamma(l) = b,$$

где $b$ - некоторое число. Предположим также, что соотношением $t = \beta(x)$ на плоскости $x, t$ определена дуга B непрерывной кривизны при $0 \le x \le b$, где заданная однозначно обратимая функция $\beta(x)$ удовлетворяет условиям

$$\beta(0) = 0 \ , \ \ \beta'(x) > 0.$$

При помощи функции $\gamma$ установим взаимно однозначное соответствие между точками $(x, 0)$ отрезка $\bar{J}$ прямой $t = 0$ и точками $(\gamma(x), \beta(\gamma(x)))$ дуги B. В этих парах точек и будем связывать значения всех искомых решений уравнения (1) нелокальным условием

$$u(x,0) = \alpha(x) u\Big(\gamma(x), \beta(\gamma(x))\Big) + \delta(x), \ 0 \le x \le l, \tag{5}$$

В связи с направлением составных частей носителя условия (5) относительно характеристическим никаких дополнительных ограничений не вводятся. Не требуется, чтобы кривая B или отрезок $\bar{J}$ где-нибудь имели характеристического направления, хотя таковое не исключается, если оно будет вызвано поведением параметров условия (5) поставленной задачи. Сформулируем теперь

Нелокальную характеристическую задачу: найти подчиненное уловию (5) решение $u(x,t)$ уравнения (1) одновременно со своей областью определения, если на отрезке $\bar{J}$ его производная по направлению нормали принимает заданные значения

$$u_t|_{t=0} = \nu(x), \qquad , \quad 0 \le x \le l \,, \tag{6}$$

а пары точек $(x, 0)$ и $(\gamma(x), \beta(\gamma(x)))$ для каждого фиксированного $x \in [0, l]$ лежат на соответствующей общей ,также искомой характеристике семейства $\lambda_2$ .

Отметим, что в данном случае не играет роли, какому именно семейству характеристик будем относить указанные пары точек.

*Как оказывается, задачу (1), (5), (6) можно свести к начальной задаче с данными на отрезке $\bar{J}$ или к задаче Дарбу в угловой области, расположенной между отрезком $J$ и дугой* B.

Для доказательства этого предложения воспользуемся известным свойством характеристических инвариантов, в частности инвариантов $\eta_1$ и $\eta_2$ семейства $\lambda_2$ .Они оба постоянны вдоль каждой кривой этого семейства. Согласно условиям задачи точки $(x,0)$ и $(\gamma(x),\beta(\gamma(x)))$ для каждого $x$ из интервала $[0,l]$ лежат на одной и той же характеристике семейства $\lambda_2$. Поэтому должно быть

$$u(x,0) = u[\gamma(x),\beta(\gamma(x))] - \beta(\gamma(x)),$$

комбинированием которого с условием (5) получаем систему, позволяющую определения значений решения $u(x,t)$ как на отрезке $\bar{J}$ ,так и на кривой B всюду. Таким образом, для всех $0 \le x \le l$ имеем

$$u(x,t) = \frac{\beta(\gamma(x))+\delta(x)}{\alpha(x)-1} \equiv \tau(x) \quad (7)$$

и

$$u[\gamma(x),\beta(\gamma(x))] = \frac{\alpha(x)\beta(\gamma(x))+\delta(x)}{\alpha(x)-1} \equiv \varphi(x) \quad (8)$$

Согласно нашим предположениям относительно функции $\alpha$ правые части соотношений (7) и (8) будут ограничены и непрерывны на интервале их определения. Как видно, условия (5) ,(6) позволяют определить значения решения на носителе данных везде. Однако, эти значения получены на основании еще и общих свойств решений рассматриваемого уравнения и отнюдь не следует делать вывод о переопределен-ности поставленной задачи. Если, допустим, будем решать задачу с начальными данными (6) и (7) при $t = 0$ , условие (8) будет выполняться автоматически. Вообще говоря, попарным комбинированием условий (6) ,(7) или (6), (8) у нас есть уже несколько вариантов решения поставленной задачи. Если в дальнейших рассуждениях воспользуемся общим интегралом (4) уравнения (1), естественно,вариант начальной задачи будет найболее оптимальным.

Следует заметить, что при значениях (7), (8) решение на носителях условий (5) и (6) уравнение (1) может параболически вырождаться. Во избежание такого явления, например на $J$, следует требовать, чтобы $\tau'(x) \neq 0$, ибо при нулевых значениях производной $u_x$ искомого решения вырождается уравнение (1) параболически. Чтобы выяснить,вырождается ли уравнение на дуге B параболически, полученных сведений недостаточно. Для этого воспользуемся свойством инварианта $\eta_2$, на основании которого заключаем, что комбинация $u_x/(1+u_t)$ имеет равные значения в точках $(x,0)$ и $(\gamma(x),\beta(\gamma(x)))$ . Это значение постоянно для каждого конкретного $x$. Обозначим его через $c(x)$. Тогда на дуге B получаем алгебраическую систему относительно производных первого порядка

$$\begin{cases} u_x[\gamma(x),\beta(\gamma(x))] + \beta'(\gamma(x))u_t[\gamma(x),\beta(\gamma(x))] = \varphi'(x)/\gamma'(x) \\ u_x[\gamma(x),\beta(\gamma(x))] - c(x)u_t[\gamma(x),\beta(\gamma(x))] = c(x), \end{cases}$$

Первое из которых получено дифференцированием соотношения (8). Отсюда и определяем значения производных первого порядка искомого решения на кривой B

$$u_x[\gamma(x),\beta(\gamma(x))] = c(x)[\varphi'(x) + \gamma'(x)\beta(\gamma(x))]/\gamma'(x)[c(x) + \beta'(\gamma(x))]$$

и

$$u_t[\gamma(x),\beta(\gamma(x))] = [\varphi'(x) - c(x)\gamma'(x)]/\gamma'(x)[c(x) + \beta'(\gamma(x))].$$

Оперируя только условием (5), функция $c(x)$ будет недоопределенной, но полученное выражение производной $u_x$ уже достаточно для установления факта вырождения рассматриваемого уравнения на дуге B.

*Если для какого-нибудь значения аргумента $x$ выполняется равенство*

$$\varphi'(x) = \gamma'(x)\beta(\gamma(x)),$$

*тогда в соответствующей точке* $(\gamma(x),\ \beta(\gamma(x)))$ *кривой В уравнение (1) параболи-чески вырождается.*

Если будем учитывать и условие (6), функция $c(x)$ определится полностью и получим, что $c(x) = \tau'(x)/[1+\nu(x)]$ Отсюда следует интересный факт: *если на отрезке* $J$ *в какой-либо точке* $x = x_0$ *имеет место параболическое вырождение уравнения (1), то оно будет и соответствующей (* $\gamma(x_0), \beta(\gamma(x_0))$ *точке дуги* B.

Приступим теперь к рассмотрению задачи с начальными возмущениями (6),(7). Для этого подчиним общий интеграл (4) указанным условиям. Продифференцируем соот-ношение (4) по обоим переменным и выразим производные произвольных функ-ций $f, g$ через производные искомого решения

$$f'(u+t) = [1-u_t(x,t)]/2u_x(x,t), \quad g'(u-t) = [1+u_t(x,t)]/2u_x(x,t).$$

Перепишем эти равенства при $t = 0$

$$\tau'(x)f'(\tau(x)) = [1-\nu(x)]/2\ , \qquad \tau'(x)g'(\tau(x)) = [1+\nu(x)]/2\ ,$$

интегрированием которых получаем

$$f(\tau(x)) = \frac{1}{2}\int_0^x [1-\nu(y)]dy + f(\tau(0)), \qquad g(\tau(x)) = \frac{1}{2}\int_0^x [1+\nu(y)]dy + g(\tau(0)).$$

При предположении однозначной обратимости функции $\tau(x)$ соблюдением условия нормировки $\zeta(\tau(0)) = 0$, где через $\zeta(z)$ обозначена обратная функция, строим интеграл поставленной задачи

$$\frac{1}{2}\int_0^{\zeta(u+t)}[1-\nu(y)]dy + \frac{1}{2}\int_0^{\zeta(u-t)}[1-\nu(y)]dy + f(\tau(0)) + g(\tau(0)) = x \qquad (9)$$

Нулевой нижний предел интегрирования в обоих случаях был взят произвольно.Само же представление (9) от выбора этого предела не зависит. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим (9) при $t = 0$, когда должно выполняться равенство (7). Поэтому верхние пределы обоих интегралов будут одинаковы $\zeta(\tau(x)) \equiv x$. Следовательно,приходим к выводу,что $f(\tau(0)) + g(\tau(0)) = 0$ и окончательно для интеграла задачи получаем

$$\zeta(u+t) + \zeta(u-t) + \int_{\zeta(u-t)}^{\zeta(u+t)} \nu(y)dy = 2x. \qquad (10)$$

Таким образом, *если функция* $\tau(x)$, *определенная формулой (8) ,удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям, существует интеграл задачи (1),(5),(6) и его можно предстасить формулой (9).*

Представление (9) интеграла задачи позволяет полное описание множества характерис-тик обоих семейств, выпущенных из точек носителя данных. Например, вдоль кривой семейства $\lambda_1$, проходящей через точку $(x_0, 0)$, характеристический инвариант $\eta_1$ будет принимать постоянное значение, равное $\tau(x_0)$, а разность $u - t$ можно приравнять выражению $\tau(x_0) - 2t$. Подставляя эти значения в (10), приходим к соотношению между переменными $x, t$, которое должно быть выполнено вдоль искомой кривой:

$$\zeta(\tau(x_0) - 2t) + \int_{\zeta(\tau(x_0)-2t)}^{x_0} \nu(y)dy = 2x - x_0. \qquad (11)$$

Это и есть уравнение той характеристики в явном виде, которая проходит через точки $(x, 0)$ и $(\gamma(x), \beta(\gamma(x)))$ Аналогичными рассуждениями можно получить представления кривых и другого семейства

$$\zeta(\tau(x_0) + 2t) + \int_{x_0}^{\zeta(\tau(x_0)+2t)} \nu(y)dy = 2x - x_0. \qquad (12)$$

Область определения интеграла (10) задачи (1),(5),(6) и, следовательно, ее решений строится именно множеством характеристик, представленных формулами (11) и (12). Для определения значений самого решения необязательно решать (10), как функциональное уравнение относительно величины $u(x,t)$. Для этого в некоторых случаях достаточно вычислять их на основании характеристических инвариатов (2),(3) на соответствующих кривых, уравнеия которых уже построены явно. Из выполненных на выдвинутой в [9] идее применения классического метода характеристик для точного или приближенного вычисления решений нелинейных гирерболических задач отметим работы [10-12]. В них исследованы структуры областей определния решений и областей влияния начальных, либо характеристических возмущений в некоторых сингулярных случаях.

**Литература**


1. F. Tricomi. Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2 ordine di tipo misto.- Acc. Linc. Rend. (5) 14, 133-247 (1923)
2. S. Gellerstedt. Sur un problem aux limites pour une equation lineaire aux derives partielles du second ordre de type mixte. – Thes., Uppsala, 1935.
3. M.A.Lavrentiev and A.B. Bitsadze.To the Problem of mixed Tipe Equations. Dokl. AN USSR, 1950, 70 (in Russian)
4. G. Darboux. Lecons sur la theorie generale des surfaces, t.IV. Gauthier-Villars, Paris, 1894.
5. J. Hadamard. Lecons sur la propagation des ondes et les equations de l’hydrodinamique. Hermann, Paris, 1903.
6. E.Goursat Lesons sur l’integration des equations aux derives partielles du second ordre .Tome 2. Hermann,Paris 1898
7. Дж.К.Гвазава Некоторые классы гиперболических уравнений и уравнений смешанного Типа. Изд-во Мецниереба, 1992
8. А.В.Бицадзе , А.А.Самарский Онекоторых простейших обощениях линейных эллиптических краевых задач .Докл.АН СССР 1969,т.185
9. I.M. Gelfand. Some Problems of the Theory of qusi-linear Equations. Usp. Math. Nauk. V. 14, No.2, p.87-158., 1959
10. M.Z.Menteshashvili. On the Caushy problem on the unit circumference for a degenerating quasilinear equation. (Russian) Soobsh. Akad. Nauk Gruzii 148 (1993), No. 2, 190-193
11. J.K. Gvazava. Nonlocal and initial problems for quasi-linear, non-strictly hyperbolic equations with general solutions represented by superposition of arbitrary functions. *Georgian Math. J.* **10,** (2003), no. 4, 687-707
12. J. K. Gvazava. The mean value property for nonstrictly hyperbolic second order quasilinear equations and the nonlocal problems. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* 135 (2004), 79-96


Статья получена: 2009-08-10