ISSN 1512-1232

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ И НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Д.Гордезиани[1], Е.Гордезиани[2], Т.Давиташвили[3], Г. Меладзе[4]

[1]Тбилисский государственный Университет им. Ив. Джавахишвили, dgord37@hotmail.com
[2]ООО МагтиКом, Тбилиси, egord@magticom.ge
[3]Тбилисский государственный Университет им. Ив. Джавахишвили t_davitashvili@hotmail.com
[4]Грузинский Университет им. Св. Андрея Первозванного, Тбилиси, h_meladze@hotmail.com

Аннотация:

В представленной работе дается краткий обзор исследований по нелокальным краевым и начально-краевым задачам, и, одновременно с этим, ставится и изучается нелокальная начально-краевая задача для линейного уравнения параболического типа (и краевые условия, и начальные условия нелокальны).

Для поставленной задачи доказано существование и единственность классического решения. Для решения этой задачи предложен итерационный процесс, позволяющий свести нелокальную начально-краевую задачу к классической задаче Коши-Дирихле. Доказана сходимость процесса и дается оценка ее скорости сходимости.

Доказательство существования решения основано на обобщенной первой теореме Гарнака, имеющей место и в случае параболических уравнений.

В работе обсуждаются вопросы построения, анализа устойчивости, сходимости и точности соответствующих разностных схем.

В работе приведены также некоторые применения нелокальных краевых и начально-краевых задач в математическом моделировании процессов загрязнения в водотоках и водоемах.

Ключевые слова: *нелокальная задача, начально-краевая задача, задача Коши-Дирихл.*

Введение

Нелокальные краевые, начально-краевые задачи представляют весьма интересное обобщение классических задач и в то же время они естественным образом получаются при построении математических моделей реальных процессов и явлений в физике, в инженерии, в социологии, в экологии и.т.д. С этими вопросами можно ознакомится в работах [24]-[30] и в цитируемой в них литературе.

В одномерном случае известные многоточечные задачи фактически являются задачами с нелокальными условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений и их исследования имеет достаточно давнюю историю.

Что касается многомерных нелокальных задач и связанных с ними исследований, то они появились в научной литературе в начале прошлого века. Здесь в первую очередь можно назвать работы Т.Карлемана (T.Carlman), Р.Билса (A.Beals), Ф.Е.Браудера (F.E.Browder) и др. Надо отметить, что поставленные в работах [31]-[33] задачи представляют собой задачи с нелокальными условиями, рассматреваемыми лишь на границе области определения дифференциального оператора. Поставленные и исследуемые в указанных выше работах нелокальные задачи и их модификации будем называть классическими нелокальными задачами.

ISSN 1512-1232

В 1963 году появилась замечательная работа Дж. Р. Кенона (J.R. Cannon) “The solution of the heat equation subject to the specification of energy”, Quart.Aappl. Math.21,119633, pp.155-160). Здесь была поставлена нелокальнаяя задача

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<1,\ 0<t<T,$$

$$u(0,t)=\phi_1(t),\ \int_0^1 u(x,t)dx=\phi_2(t),$$

$$u(x,0)=u_0(x),$$

$\phi_1(.),\phi_2(.),\ u_0(.)$ заданные гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования. Эта и есть нелокальная задача, положившая начало новому направлению в исследовании нелокальных краевых задач и проблемам их численного решения, Назовем здесь интересные статьи Н.И.Ионкина, М.Г.Сапаговаса, Р.Ю.Чегиса, А.И. Кожанова, А.Бузиани, Л.С.Пулкиной, С.Меслуба, А. Аширалиева, и многих других (см. статьи [41], [10], [13], [14], [17]-[19], а также цитированную в них литературу).

В 1969 году вышла работа А.В. Бицадзе и А.А. Самарского «Об одном простом обобщении линейных эллиптических краевых задач», ДАН АН СССР, 185, 1969, ст. 739-774, посвещенная постановке решению нового типа нелокальной задачи. Задача была поставлена в общем виде, но единственность решения и разрешимость ее была доказана в случае уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad -l<x<l,\quad 0<y<1,\ l=const>0,$$

и краевых условий

$$u(x,0)=\phi_1(x),\quad u(x,1)=\phi_2(x),\quad -l\le x\le l,$$

$$u(-l,y)=\phi_3(y),\quad 0\le y\le 1,\quad u(0,y)=u(l,y),\quad 0\le y\le 1.$$

Здесь $\phi_i(\ ),\ \left(i=\overline{1,3}\right)$ - заданные непрерывные функции.

Эта работа стимулировала появление интересных и оригинальных статей (см. работы Д.Г.Годезиани (1970), Я.А.Роитберга и З.Г.Шефтеля (1970), Н.В.Зитарашу, С.Д.Эйдельман (1971), Д.Г.Гордезиани и Т.З.Джиоева (1972) и др.). Интенсивные исследования по нелокальным задачам Бицадзе-Самарского и различным ее обобщениям начались в 80-ые годы прошлого столетия (см. работы Д.Г.Гордезиани, А.Л.Скубачевского, В.П.Панеяха, В.А.Ильина, И.Моисеева, Г.В.Меладзе, М.П.Сапаговаса, И.Чегиса, Д.В.Капанадзе, В.Л.Макарова, В.П.Михайлова, А.К.Гущина, Г.Авалишвили, Л.Гуревича и др. (см. [3]-[9], [11], [12], [15], [16], [21]-[23], [34]-[37]). С точки зрения приложений и численных методов безусловно интересны работы М.П.Сапаговаса, Г.К.Берикелашвили, А.В.Гулина, В.А.Морозова и др. (см. напр. [20], [39], [40]).

В начале 90-х годов нашего столетия наряду с прстранственными нелокальными задачами начались исследования нелокальных задач по времини. Результатами исследований в этом направлении можно ознакомиться по работам Г.Авалишвили, Д.Г.Гордезиани, Г.В.Меладзе, В.Л.Макарова, И.П.Гаврилюка, Д.О.Ситника, Б.В.Василика, С.В.Раа, В.В.Шелухина и др. (см. [21], [25], [26], [42], [43]).

Очевидно, что исследование нелокальных краевых, начально-краевых задач, разработка и анализ методов их численного решения - актуальное, практически и теоретически весьма интересное, важное направление математики, прикладной и вычислительной математики.

Настоящая работа посвящена постановке и анализу одной обобщенной нелокальной задачи для многомерного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами.

Обозначения

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями:

ISSN 1512-1232

R_n - n-мерное евклидово пространство, $x=(x_1,\ldots,x_n)$ произвольная точка в нём;
R_{n+1} - (n+1)-мерное пространство $\bar{x}=(x_0,x_1,\ldots,x_n)=(x_0,x)$ точек
Ω - ограниченная область R_{n+1}; $\overline{\Omega}=\Omega\bigcup S$; S - граница Ω;
D - ограниченная область R_n; Γ - граница D; $\overline{D}=D\bigcup\Gamma$;
N - внешняя нормаль к границе Γ области D; $\Omega=(0,1)\times D$;
$S^-=\{\bar{x}\mid\bar{x}=(x_0,x),\,x_0=0,\,x\in D\}$; $S^+=\{\bar{x}\mid\bar{x}=(x_0,x),\,x_0=1,\,x\in D\}$;
$S_{x_0^*}=\{\bar{x}\mid\bar{x}=(x_0,x),\,x_0=x_0^*,\,x\in D\}$; $S_\Gamma=\{\bar{x}\mid\bar{x}=(x_0,x),\,x_0\in(0,1),\,x\in\Gamma\}$; $S=S_\Gamma\bigcup S^-\bigcup S^+$;
$S_{x_0^*x_0^{**}}=\{\bar{x}\mid\bar{x}=(x_0,x),\,x_0^*\le x_0\le x_0^{**},\,x\in\Gamma\}$;
$\Omega_{x_0^*x_0^{**}}=\{\bar{x}\mid\bar{x}=(x_0,x),\,x_0^*\le x_0\le x_0^{**},\,x\in D\}$;

Очивидно, что $\Omega_{01}=\Omega$, $\overline{\Omega}=\{\bar{x}\mid\bar{x}=(x_0,x),\,0\le x_0\le 1,\,x\in D\}$;
$\overline{S}_\Gamma=\{\bar{x}\mid\bar{x}=(x_0,x),\,x_0\in[0,1],\,x\in\Gamma\}$

Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу: найти регулярное решение уравнения

$$Lu(t,\bar{x})=F(t,\bar{x}),\quad \bar{x}\in\Omega, \tag{1}$$

где

$$Lu=-\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[K_i(\bar{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]+K(\bar{x})u,$$

$K_i(\cdot)\ge\alpha_i=const>0,\quad i=\left(\overline{0,n}\right),\quad K(\cdot)\ge 0,$ удовлетворяющее краевому условию

$$u(\bar{x})=\varphi(\bar{x}),\quad \bar{x}\in\overline{S}_\Gamma, \tag{2}$$

и обобщенному нелокальным условиям

$$\alpha_1\left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{x_0=0}+\beta_1 u(0,x)=\gamma_1 u(\eta_1,x)+\delta_1\frac{1}{\xi_1}\int_0^{\xi_1}u(x_0,x)dx_0= =\varphi_1(x),\quad x\in D, \tag{3}$$

$$\alpha_2\left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{x_0=1}+\beta_2 u(1,x)=\gamma_2 u(\eta_2,x)+ +\delta_2\frac{1}{1-\xi_2}\int_{\xi_2}^{1_1}u(x_0,x)dx_0=\varphi_2(x),\quad x\in D, \tag{4}$$

где $0<\xi_1\le\xi_2<1$; $\varphi_1(\cdot),\varphi_2(\cdot),\varphi(\cdot),F(\cdot)$ - заданные каждая в своей области определения достаточно гладкие функции; $0<\eta_1\le\eta_2<1$, $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i$ $(i=1,2)$ заданные параметры.

Доказательство существования и единственности решения задачи (1)-(4) в общем случае весьма и весьма сложно, но одновременно с этим, очень интересно и актуально. Рассматриваются частные случаи.

Об единственности регулярного решения задачи (1)-(4)

Для простоты и ясности изложения рассмотрим случай

$$L=\Delta,\quad \Delta\equiv\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

и вместо условии (3)-(4) возьмём более простое условие

ISSN 1512-1232

$$\alpha_i = 0,\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 0,\ \gamma_i = 0,\ \delta_1 = 0,\ \delta_2 = 1\ (i = 1{,}2),\ \gamma = 0. \tag{5}$$

По ходу изложения будет ясно, что применимая методика распространяется очевидным образом на случай (1)-(4), если коэффициенты уравнения (1) зависят лишь от аргументов.

При допущенных предположениях имеет место следующая Теорема:

Теорема 1. Задача (1), (2), (3), (4) при допущениях (5) может иметь не более одного решения.

Доказательство. Введём в рассмотрение функцию

$$v(x_0, x) = \int_{\xi_2}^{x_0} u(\mu, x)\,d\mu \tag{6}$$

где $u(\mu, x),\ \ ((\mu, x) \in \Omega)$ - решение поставленной задачи.

Очевидны следующие свойства этой функции:

$$v(1, x) = 0, \quad v(\xi_2, x) = 0, \quad x \in D, \tag{7_1}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|_{x_0=\xi_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|_{x_0=1} = 0, \quad x \in D, \tag{7_2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \mathrm{x}_0} = u(x_0, x), \quad \bar{x} \in \overline{\Omega}.$$

Покажем теперь, что для поставленной задачи справедливы следующего типа энергетические тождества, **откуда следует справедливость Теоремы 1.**

Рассмотрим однородную задачу (1)-(4), т.е. $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \varphi(\cdot), F(\cdot)$ тождественно равны нулью и покажем, что она имеет лишь тривиальное решение - $u(x_0, x) \equiv 0.$ Умножим уравнение (1) на $v(x_0, x)$ и проинтегрируем полученные таким образом выражения по области $\Omega_{\xi_2,1}$. Следовательно, получим

$$\sum_{i=1}^{n} J_i(u, v) + J_0(u, v) = 0, \tag{8}$$

где

$$J_i(u, v) = -\int_D \int_{\xi_2}^{x_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v\,dx_0 dx, \quad J_0(u, v) = -\int_D \int_{\xi_2}^{x_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} v\,dx_0 dx.$$

Преобразуем второе слагаемое $J_0(u, v)$ в (8). Получим

$$J_0(u, v) = \int_D \int_{\xi_2}^{1} \frac{\partial u}{\partial x_0}\frac{\partial v}{\partial x_0} dx_0 dx - \int_D \frac{\partial u}{\partial x_0} v dx \Bigg|_{x_0=\xi_2}^{x_0=1}.$$

Учиитывая в предыдущем равенстве свойства функции $v(x_0, x),$ будем иметь

$$\begin{aligned} J_0(u, v) &= \frac{1}{2}\int_D \int_{\xi_2}^{1} \frac{\partial u}{\partial x_0}\frac{\partial v}{\partial x_0} dx_0 dx = \frac{1}{2}\int_D \int_{\xi_2}^{1} \frac{\partial u}{\partial x_0} u(x_0, x) dx_0 dx = \\ &= \frac{1}{2}\int_D \left[u^2(1, x) - u^2(\xi_2, x)\right] dx. \end{aligned} \tag{9}$$

Согласно (2) $\int_\Gamma \int_{\xi_2}^{1} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \cos \widehat{Nx_i}\, ds = 0,$ и поэтому $J_i(u, v) = \int_D \int_{\xi_2}^{1} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx_0 dx..$ Откуда имеем

$J_i(u, v) =$

$$= \frac{1}{2}\int_D \int_{\xi_2}^{1} \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx_0 dx = \frac{1}{2}\int_D \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2\Bigg|_{x_0=1} - \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2\Bigg|_{x_0=\xi_2}\right] dx. \tag{10}$$

Из (7_2) следует, что

ISSN 1512-1232

$$J_i(u,v)=0. \tag{11}$$

Таким образом, учитывая (9)-(11), будем иметь

$$\sum_{i=0}^{n} J_i(u,v)=\frac{1}{2}\int_D\left[u^2(1,x)-u^2(\xi_2,x)\right]dx. \tag{12}$$

Перейдем к выводу второго энергетического неравенства. Умножим (1) на $u(x_0,x)$ и проинтегрируем следующим образом:

$$\int_D\int_{\xi_2}^{1}\left(\int_0^{x_0}(Lu)\,u\,d\mu\right)dx_0dx=-\int_D\int_{\xi_2}^{1}\left(\int_0^{x_0}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}v\,d\mu\right)dx_0dx.$$

Рассмотрим слагаемое

$$J_0(u,u)=\int_D\int_{\xi_2}^{1}\left(\int_0^{x_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}u\,d\mu\right)dx_0dx.$$

Если учесть граничное условие (3’), легко получаем,что

$$J_0(u,u)=\int_D\int_{\xi_2}^{1}\left(\int_0^{x_0}\left|\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|^2d\mu\right)dx_0dx-\frac{1}{2}\int_D\left[u^2(1,x)-u^2(\xi_2,x)\right]dx.$$

Преобразуем слагаемое $J_i(u,u)=\int_D\int_{\xi_2}^{1}\left(\int_0^{x_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}u\,d\mu\right)dx_0dx=$

$$=\int_D\int_{\xi_2}^{1}\left(\int_0^{x_0}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2d\mu\right)dx_0dx-\int_\Gamma\int_{\xi_2}^{1}\int_0^{x_0}\frac{\partial u}{\partial x_i}u\cos\widehat{Nx_i}\,ds\,d\mu\,dx_0.$$

Согласно условию (2),

$$\int_\Gamma\int_{\xi_2}^{1}\int_0^{x_0}\frac{\partial u}{\partial x_i}u\cos\widehat{Nx_i}\,ds\,d\mu\,dx_0=0,$$

поэтому

$$J_i(u,u)=\int_D\int_{\xi_2}^{1}\left(\int_0^{x_0}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2d\mu\right)dx_0dx=0.$$

Отсюда и из (12) следует

$$\sum_{i=0}^{n}J_i(u,u)=\sum_{i=0}^{1}\int_D\int_{\xi_2}^{1}\left(\int_0^{x_0}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2d\mu\right)dx_0dx-\frac{1}{2}\int_D\left[u^2(1,x)-u^2(\xi_2,x)\right]dx.$$

Так как функция $u(\bar{x})$ - решение задачи, $J_i(u,u)=0$, $\sum_{i=0}^{n}J_i(u,v)=0$, то, соответственно, будем иметь

$$\sum_{i=0}^{n}\int_D\int_{\xi_2}^{1}\left(\int_0^{x_0}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2d\mu\right)dx_0dx=0.$$

Отсюда и из условия (3’) следует, что $u(x_0,x)\equiv 0$, **из чего следует спраедливость теоремы 1.**

О существовании решения задачи (1)-(4)

Для ясности изложения снова сделаем в (1)-(4) следующие допущения
$F(\cdot)\equiv 0,\quad n=1,\quad L=\Delta,\quad \varphi(\cdot)\equiv 0,\quad \varphi_1(\cdot)\equiv 0,\quad \Omega$ – квадрат $(0,1)\times(0,1)$. Обобщение изложенной методики исследования на общий случай не представляет труда. Таким образом, исследуется задача

ISSN 1512-1232

$$\begin{aligned}
&\Delta u(x_0,x)=0, \quad \bar{x}=(x_0,x)\in\Omega=(0,1)\times(0,1)\\
&u(x_0,0)=u(x_0,1)=0, \quad x_0\in[0,1],,\\
&\quad u(0,x_1)=0, \quad 0\le x_1\le 1\\
&\frac{1}{1-\xi_2}\int_{\xi_2}^{1}u(x_0,x)dx_0=\varphi(x), \quad 0\le x\le 1.
\end{aligned} \tag{13}$$

Решение будем искать в следующем виде:

$$u(x_0,x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x_0)\sin k\pi x. \tag{14}$$

Ясно, что удовлетворяются краевые условия, т.е. $u(x_0,0)=u(x_0,1)=0$, и чтобы удовлетворялось уравнение (13) и остальные краевые условия, в том числе нелокальное, $a_k(x_0)$ должно быть решением задачи

$$\begin{aligned}
&a_k''(x_0)-\lambda_k^2a_k(x_0)=0, \quad x_0\in(0,1),\\
&a_k(0)=0, \quad \frac{1}{1-\xi_2}\int_{\xi_2}^{1}a_k(x_0)dx_0=\varphi_k,
\end{aligned} \tag{15}$$

где $\lambda_k=k\pi$, φ_k - коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ т.е. $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin k\pi x.$ Решение задачи (15) представляется в ясном виде

$$a_k(x_0)=\frac{\varphi_k(\pi k)\left(e^{\pi k x_0}-e^{-\pi k x_0}\right)}{\left(e^{\pi k}-e^{-\pi k}\right)-\left(e^{\xi_2\pi k}-e^{-\xi_2\pi k}\right)}$$

или

$$a_k(x_0)=\frac{\varphi_k(\pi k)\,sh(\pi k x_0)}{sh(\pi k)-sh(\xi_2\pi k)}\ . \tag{16}$$

Подставляя (16) в (14) получаем формально решение поставленной задачи в следующем виде:

$$u(x_0,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\frac{k\pi\,sh(k\pi x_0)}{sh(k\pi)-sh(\xi_2k\pi)}\cdot\sin k\pi x. \tag{17}$$

Требуя от $\varphi(x)$ определённую гладкость (например, $\varphi(x)\in C^3([0,1])$), ряд (17) будет представлять единственное решение поставленной задачи (13).

Дискретизация нелокальной задачи

В этой части предлагается полудискретизация ($n+1$)-мерной задачи (1)-(4); операторы, определенные вдоль направления (Ox_0), заменяются разностными отношениями. Таким образом, нелокальная задача редуцируется к n-мерной системе дифференциальных уравнений в частных производных с классическими краевыми условиями Дирихле. Для решения полученной задачи существуют мощные алгоритмы и пакеты программ, основанные на методах конечных элементов, конечных объемов и конечных разностей. Нетрудно доказать, что оператор редуцированной задачи является коэрцитивным и непрерывным в соответствующих пространствах, и, тем самым, имеет место теорема существования и единственности решения.

Рассмотрим задачу (1)-(4) при допущениях (5). Введем теперь разностную сетку

$$\begin{aligned}
&\omega_\hbar=\left\{x_0^{(i)},\,x_0^{(1)}=h_1,x_0^{(1)}=x_0^{(i-1)}+h_i,\,i=1,\dots,N-1,x_0^{(i_0)}=\xi_2\right\},\\
&\gamma^+=\left\{x_0^{(N)}=l_0\right\},\ \gamma^-=\left\{x_0^{(0)}=0\right\},\quad \overline{\omega}_\hbar=\omega_\hbar\cup\gamma^+\cup\gamma^-
\end{aligned}$$

и обозначения для сеточных функций:

ISSN 1512-1232

$$v\left(x_o^{(i)},x\right)=v\left(x_0^{(i)},x_1,...,x_n\right)\equiv v_i\equiv v,\ v\left(x_o^{(i+1)},x\right)\equiv v_{i+1},$$
$$v_{\bar{x}}\equiv\left(v-v^{(-1)}\right)/h_i,\ v_{x_0}\equiv\left(v_{i+1}-v\right)/h_{i+1},$$
$$v_{\hat{x}_0}=\left(v_{i+1}-v\right)/\hbar_i,\quad \hbar_i=\frac{1}{2}\left[h_{i+1}+h_i\right].$$

Будем считать, что $K_0(\cdot)$ не зависит от x_0. Заменим задачу (1)-(4) полудискретной схемой

$$\left(K_0(x)v_{\bar{x}_0}\right)_{\hat{x}_0}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[K_i(\bar{x})\frac{\partial v}{\partial x_i}\right]+K(\bar{x})v=F(\bar{x}),\tag{18}$$

$$x_0\in\omega_\hbar,\quad x\in D,$$

$$v(x_0,x)=\phi(x_0,x),\ x_0\in\overline{\omega}_\hbar,\quad x\in\Gamma,\tag{19}$$

$$v(0,x)=\phi_1(x),\ x\in D,\tag{20}$$

$$\frac{1}{1-\xi_2}\sum_{j=1}^{N}c_j v\left(x_0^{(j)},x\right)=\phi_2(x),\tag{21}$$

где (21) квадратурная формула трапеции,

$$c_k=\hbar_k,\ k=i_0,(i_0+1),...,N-1,\ c_{i_0}=h_1/2,c_N=h_N/2.$$

Уравнения (18) представляет эллиптическую систему ***N***-уравнений в ***n***-мерном пространстве. Очевидно, что (18)-(21) аппроксимирует задачу (1)-(4) с погрешностью

$$O(h),\quad\left(h\equiv\max_{1\le i\le N}h_i\right).$$

Пользуясь методами из [45]-[46], доказывается, что при $h\to 0$, решение полудискретной схемы сходится к решению исходной задачи и при достаточной гладкости ее имеет место оценка:

$$\left\|u\left(x_0^{(i)},x\right)-v\left(x_0^{(i)},x\right)\right\|=O(h)$$

где $\|w\cdot\|^2=\int\limits_D\|w\|_*^2\,dx_1dx_2...dx_n,\ \|w\|_*^2\equiv(w,w)_*\equiv\sum\limits_{i=1}^{N-1}\left(w^{(i)}\right)^2\hbar_i.$

Аппроксимируя нелокальное условие на равномерной сетке $\left(h_i=h\ (i=1,...,N)\right)$ квадратурой

$$\frac{1}{2}(1-\xi_2)^{-1}h(1-\theta)\left((1-\theta)v^{(i_0)}+(1+\theta)v^{(i_0+1)}\right)+$$
$$+h\sum_{k=i_0+2}^{N-2}v^{(k)}+\frac{1}{2}hv^{(i_0+1)}+\frac{1}{2}hv^{\{N\}}=0,\quad \xi_2\equiv(i_0+\theta)h,\quad \theta\ge 0,$$

(см. [48]-[49]), и повторяя рассуждения из [46]-[48], можно показать, что решение полудискретной схемы сходится к решению исходной задачи со скоростью $O\left(h^2\right)$ в дискретной норме пространства Соболева W_2^1.

ISSN 1512-1232

Литература

1. Canon J.R., The solution of heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math., №21 – 1963 – pp.155-160
2. Бицадзе А.В., Самарский А.А., О некоторых простейших обобщениях линейных элиптических задач // Докл. АН СССР – 1969 – т.185, №2 – стр.739-740
3. Гордезиани Д.Г., О методах решения одного класса нелокальных краевых задач. г.Тбилиси, изд. Тбил. гос. университета, 1986
4. Скубачевский А.Л., О спектре некоторых нелокальных краевых задач // Матем. сборник,1982, т.117, №7, стр.548-562
5. Панеях Б.П., О некоторых нелокальных краевых задач для линейных дифференциальных операторов // Мат. Замет. – 1984, т.35, вып.3 – стр.425-433
6. Ильин В.А., Моисеев Е.И., Двумерная нелокальная краевая задача для оператора Пуассона в дифференциальной и разностной трактовках // Матем. Моделироапние – 1990, т.2, №8 – стр.130-156
7. Капанадзе Д.В., О нелокальной краевой задаче Бицадзе-Самарского // Дифф. Уравнения – 1987, т.23, №8 – стр.543-545
8. Сапаговас М.П., Чечис Р.Ю., О некоторых краевых задач с нелокальных условиями // Дифф. Уравнения – 1987, т.23, №7 – стр.1268
9. Gordeziani G., Gordeziani N., Avalishvili G., Non-local boundary value problem for some partial differential equations // Bulletin of the Georgian Academy of Sciences - 157, №1, 1998 – pp.365-369
10. Bouziani A., On a class of parabolic equations with a non-local boundary conditions // Acad. Roy. Belg. Bull. CI, Sci. (6), 10, 1999 (№1-6) – pp.61-67
11. Gordeziani G., Gordeziani N., On some generalization of non-local boundary value problem for elliptic equations // Bulletin of TICMI, Tbilisi Univ. Press – v.2, 1998 – pp.34-36
12. Gordeziani D.G., Avalishvili G.A., On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one dimensional medium oscillation equations // Mathem. Mod. – 2000, v.12, №1 – pp.93-103
13. .Mesloub & S.Messaoudi, A nonlocal mixed semilinear problem for second order hyperbolic equations // Electr. Journal of Diff. Equat. – 2003, v.1, №30 – pp.1-17
14. Berikelashvili G., To a nonlocal generalization of the Dirichlet problem // J.Inequal. Appl. – 2006, Art.ID 93858 – 6p
15. Gushchin A.K., Mikhailov V.P., On the stability of nonlocal problems for a second order elliptic equation // Math. Sb. (1994), №1 – pp.121-160
16. Gurevich P.L., Asymtotivcs of Solution for nonlocal elliptic problemsin plane nounded domains, Functional Differential Equations, Vol. 10, 2003, No 1-2, pp.175-214
17. Kozhanov A., Pulkina L.,On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condiition of integral form for multidimensional hyperbolic equations // Diff. Equations – v.42, №9, September 2006 – pp.1233-1246
18. Shakeris F., Dehghan M., The method of lines for solution of the one-dimensional wave equation subject to an integral consideration //comput. and Math. with Appl. – 2008, v.56, November – pp.2175-2188
19. Ashyralyev A., Gercek , Okan, Nonlocal boundary value problem for elliptic-parabolic differential and difference equations. Discrete Dyn. Nat. Soc. – 2008 – Art.ID 904824 – 16p
20. Sapagovas M.P., A difference method of increased order of accuracy for the Poisson equation with nonlocal conditions // Diff. Uravn. – 44(2008), №7 – pp.988-998
21. D.Gordeziani, H.Meladze and G.Avalishvili. On one class of nonlocal in time problems for first order evolution equations // Jurn. Vich. I Prikl. Mat. – 2003, №1 (88) – pp.66-78
22. Г.В.Меладзе. Об одной задаче оптимального управления для квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка на плоскости с нелокальными краевыми условиями // В книге: «Совремённые проблемы математической физики». Труды всесоюзного симпозиума , Тбилиси, 22-25 апреля, 1987 – 1987 – т.I – с.305-311
23. F.Criado, H.Meladze, N.Odishelidze. An Optimal Control Problem for Helmholtz Equation with Non-local Boundary Conditions and Quadratic Functional // Rev. R. Acad. Scienc. Exact. Fis. Mat. (Esp.) – 1997 – vol.91, №1 – pp.65-69
24. Нахушев А.М., Уравнения математической биологии, Москва, «Высшая школа», 1995, стр. 302
25. Shelukin V.V., A non-local in time model for radionuclide propagation in Stokes fluid, Dinamika Splosh. Sredy #107 (1993), 180-193, 203-207

ISSN 1512-1232

26. Pao C.V., Reaction diffusion equations with nonlocal boundary and nonlocal initial conditions, J. Math. Anal. Appl., 195(1995), No 3, p. 702-718
27. Obolashvili E., Nonlocal problems for some partial differential equations, Applicable Analysis, Vol. 45 (1992), pp.269-280
28. Алексеев А.С., Кирилов Ю.П., Исследование одного класса уравнений в частных производных с интегральными граничными условиями, Дифф. И Интегр. Уравнения, 1979, Горький, стр. 118-122
29. Алоев Т.В., Асланова Е.Н., Нелокальные задачи кондуктивного радиального теплообмена, Abstracts, Nalchik, 1996, Inter. Conference: Non-local Boundary Problem and Related Mathematical Biology, Informatic and Physic Problems
30. O. Diaz, Jesus Ildefonso, Rakotoson, Jean-Michell, On a non-local stationary free-boundary problem arising in the confinement of a plasma in a stellarator geometry , Arch.Rational. Mech. Anal., 134(1996), No 1, pp. 53-95
31. T. Carleman, Sur la tehorie des equatuibs integrals et ses applications, Verh. Internat. Math. Kongr., Zurich, 1932, 1, (Orell Fussli, Zurich), 1933, 138-151
32. R. Beals, Nonlocal Elliptic Boundary Value Problems, Bull. Amer. Math. Soc., 1964, V.70, No 5, p. 693-696
33. F.E. Browder, Non-local elliptic boundary value problems, Amer. J. Math, 86(1964), p. 735-750
34. D.G. Gordeziani, On a method for solving the Bitsadze-Samarskii boundary value problem for elliptic equations, Inst, Prikl. Math.Tbilisi Gos. Univ., Dokl., No (1970), pp.39-41
35. a. A. Toutbery and Z/G/ Sheftel, On a class of general nonlocal elliptic problems, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 192)1970), pp. 511-513
36. N.V. Zhitarashu and S.D. Eiidelman, Nonlocal boundary value problems for elliptic equations, Math. Issled. 6, No2,(220), 1971, pp.63-73
37. D.G. Gordeziani , T.Z. Djioev, On the solvability of one boundary value problem dor a non-linear elliptic equations, 1972, Russiam Soobshen. Akad. Nauk.Gruz. SSSr, 68(No 2), pp. 189-292
38. Sapagovas M.P.,A difference scheme for two-dimensional elliptic problems with an integral condision, Litovsk.Mat. Sb. 28(1983), No 3, p.155-159
39. Berikelashvili G., Construction and analysisi of difference schemes of the rate convergence, Memoirs om Diff. Euqat. and Math. Physics, V. 38, 2006, pp. 1-36
40. Gulin A.V.,Marozova V.A., A family of selfjoint difference schemes, Diff. Urav. 44 (2008), No 9, pp. 1249-1254
41. ionkin N.I., Solution of boundary-value problem in heat-conduction theory with non-classical boundary conditions, Diff, Urav. 13(1977), pp.1177-1182
42. Gavrilyuk I.P., Makarov V.L., Sytnyk D.O., Basylyk V.B., Exponentially convergent method for m-point nonlocal problem for a first order diff. equation in Banach Space, Friedrich-Schiller-Universitat Jena, Preprint: 09-02, Reports on Numerical Mathematics, MSC 65L05 Initial Value Problems Upload 2009-03-04
43. Gordeziani D., Avalishvili G., Time nonlocal problems for Schrodinger type equations, I and II parts Diff, Urav. V. 41, No 5,6, (2005), pp. 703-711, pp. 852-859.
44. А.А. Самарский, Теория разностных схем, М. «Наука», 1983г., стр. 614
45. Gordeziani N., Natalini N., Picci P.E., Finite-Difference Methods for Solution of Nonlocal Boundary Value Problems, Int. Journ. Computers & Mathematcis with Applications, 50(2005), pp.1333-1344
46. Samarskii A.A., Lazarov R.D. and Makarov V.L., Difference schemes for differential equations with generalized solutions, Vissh. Shkola, Moscow, 1987 (In Russian)
47. Berikelashvili G., On non-local boundary value problem for two-dimensional elliptic equations, Comput. Methods Appl. Math., 3, 2003, No 1, pp.35-44
48. Berikelashvili G., Gordeziani D., Kharibegashvili S., Finite- Difference Schemes for One Mixed Problem with Integral Condition, Proceedings of 2nd WSEAS International Conference on Finite Differences, Finite Elements, Finite Volumes, Boundary Elements (F-and B, 09), Tbilisi, Georgia, June 26-28, 2009, pp.118-120.

Статья получена: 2010-03-05