ISSN 1512-1232

УДК 517.956

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Г.Г. Багатуриа[1] , М.З. Ментешашвили[2]

[1]Грузинский Технический Университет, Тбилиси, Грузия
[2]Институт вычислительной математики имени Н.И. Мусхелишвили,
Сухумский Государственный университет, Тбилиси, Грузия

Резюме

В работе исследована нелокальная задача для квазилинейного уравнения второго порядка с допустимым параболическим вырождением.

Ключевые слова: *квазилинейное гиперболическое уравнение, характеристика, нелокальная задача.*

В работе изучается нелокальная задача для квазилинейного уравнения второго порядка

$$u_{xx} + (1+u_x+u_y)\cdot u_{xy} + (u_x+u_y)\cdot u_{yy} = 0\,, \tag{1}$$

с допустимым параболическим вырождением.

Как известно, характеристики квазилинейных уравнений зависят от значений искомого решения и его производных. Следовательно, они неизвестны и их следует определять одновременно с решением (см. [1]). Характеристики таких уравнений, в основном могут образовать семейства любой геометрии. Однако, существуют уравнения, для которых эти семейства характеристик могут быть вполне определенной конфигурации. В частности, для уравнения (1) семейство, определенное корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = 1$, представлено прямыми $x - y = c$, другому же семейству соответствует дифференциальное соотношение характеристических направлений $dy = (u_x + u_y)dx$. На первый взгляд, из-за зависимости характеристического корня $\lambda_2 = u_x + u_y$ от неизвестных производных искомого решения $u(x, y)$, можно предположить, что это направление меняется при прохождении точки вдоль некоторой конкретной характеристики. В случае уравнений общего вида это действительно так и происходит. В данном же случае следует принимать во внимание следующее обстоятельство: само уравнение вдоль характеристик семейства корня λ_2 записывается в простом виде $d(u_x) + d(u_y) = 0$. По терминологии И. Гельфанда [2] это есть характеристическое дифференциальное соотношение и отсюда непосредственно следует $u_x + u_y = const$ вдоль любой характеристики данного семейства. Таким образом, на основании анализа совместных характеристических дифференциальных соотношении, в явном виде получаем так называемые характеристические инварианты – аналоги известных римановых инвариантов

$$\begin{cases} \xi = y - x\,, \\ \xi_1 = e^{u_y}(u_x + u_y - 1)\,, \end{cases} \tag{2}$$

для семейства корня λ_1 и

$$\begin{cases} \eta = y - (u_x + u_y)x, \\ \eta_1 = u_x + u_y, \end{cases} \tag{3}$$

ISSN 1512-1232

для семейства корня λ_2.

Инварианты (2) и (3) постоянны вдоль каждой характеристики соответствующего семейства. Следует отметить, что других характеристических инвариантов, независимых от (2) и (3), уравнение (1) не имеет [3-5].

Анализируя структуры характеристических инвариантов η и η_1, приходим к выводу, что наклон каждой отдельно взятой характеристики определяется значением инварианта η_1 и, следовательно, является постоянным. Отсюда следует, что все эти характеристики образуют семейство прямых. Исключение могут состовлять лишь особые дискриминантные кривые этого семейства, если такие вообще существуют.

Сформулируем нелокальную задачу, при постановке и исследования которой будут учтены выше упомянутые свойства и особенности уравнения (1). В частности, судя по его характеристическим корням λ_1, λ_2, оно является гиперболическим. Однако, не исключается случай, когда значения этих корней совпадают и, следовательно, само уравнение (1) параболически вырождается. Это происходит при $u_x + u_y = 1$. Поэтому, класс гиперболических решений рассматриваемого уравнения следует определить условием

$$u_x + u_y - 1 \neq 0. \tag{4}$$

Нелокальную задачу будем рассматривать в классе гиперболических решений.

Пусть для заданных функций $\alpha, \beta, \varphi \in C^2[0,a]$ выполняются следующие условия:

(C1): $\alpha(x) < 1$, $-\infty < \alpha'(x) < 0$, $x \in [0,a]$.

Пусть P и Q - точки пересечения характеристик семейства λ_2 соответственно с прямыми $y = 0$ и $y = x$. Заметим, что выполнение условий **(C1)** обеспечивает существование таких точек для каждого значения $x \in [0,a]$. Введем обозначения: $\vec{A} = (1, \beta(x))$ и $\vec{B} = (u(P), u(Q))$.

Нелокальная характеристическая задача. ***Найти регулярное решение уравнения (1) вместе с его областью определения, которое удовлетворяет условиям***

$$u_x(x,0) + u_y(x,0) = \alpha(x), \qquad x \in [0,a], \tag{5}$$

$$\left(\vec{A}, \vec{B}\right) = \varphi(x), \quad x \in [a,b]. \tag{6}$$

Исследование задачи начнем с анализа условия (6). Заметим, что через произвольную точку x_0 сегмента $[0,a]$ проходит одна характеристика семейства корня λ_2, уравнение которой, с учетом условия (5), принимает вид:

$$y = \alpha(x)x - \alpha(x_0)x_0.$$

Легко определить координаты точки Q: $Q\left(\dfrac{\alpha(x_0)x_0}{\alpha(x_0)-1}, \dfrac{\alpha(x_0)x_0}{\alpha(x_0)-1}\right)$. Обозначим через $\mu(x)$ функцию

$$\mu(x) = \frac{x \cdot \alpha(x)}{\alpha(x) - 1}. \tag{7}$$

Тогда условие (6) можно записать следующим образом

$$u(x,0) + \beta(x) \cdot u(\mu(x), \mu(x)) = \varphi(x), \qquad x \in [0,a] \tag{8}$$

Для изучения поставленной задачи продифференцируем (8) по переменной x. Очевидно,

$$u_x(x,0) + \beta'(x) \cdot u[\mu(x), \mu(x)] + \beta(x) \cdot \alpha(x)\mu'(x) = \varphi'(x). \tag{9}$$

Вдоль характеристики первого семейства $y = x$ для всех точек $x \in [0,a]$, в том числе и в точке Q, с учетом условия (5), имеем

ISSN 1512-1232

$$e^{u_y(\mu(x),\mu(x))}\cdot[\alpha(\mu(x))-1]=e^{u_y(0,0)}\cdot[\alpha(0)-1]\ . \tag{10}$$

С другой стороны, та же точка Q находится на характеристике второго семейства, проходящей через $P(x,0)$. Поэтому, принимая во внимание (3) и (5), имеем

$$u_x\big(\mu(x),\mu(x)\big)+u_y\big(\mu(x),\mu(x)\big)=u_x(x,0)+u_y(x,0)=\alpha(x)\ .$$

Тогда соотношение (10) в точке Q принимает следующий вид

$$e^{u_y(\mu(x),\mu(x))}\cdot[\alpha(x)-1]=e^{u_y(0,0)}\cdot[\alpha(0)-1]\ . \tag{11}$$

Пусть выполнены условия:

(C2): $\mu'(x)\neq 0$ для всех $x\in[0,a]$ и $\mu'(x)$ знакоопределена на отрезке $[0,a]$.

Обратную функции $y=\mu(x)$ обозначим через $x=\nu(y)$. Учитывая (9) и условие задачи (5), находим значения производных решения вдоль характеристики $y=x$:

$$u_x(x,x)=\alpha(\nu(x))-u_y(0,0)-\log\frac{\alpha(0)-1}{\alpha(\nu(x))-1}, \tag{12}$$

$$u_y(x,x)=u_y(0,0)+\log\frac{\alpha(0)-1}{\alpha(\nu(x))-1}. \tag{13}$$

Проинтегрируем сумму $u_x(x,x)+u_y(x,x)$ вдоль прямой $y=x$. Имеем

$$u(x,x)=u(0,0)+\int_0^x\alpha(\nu(t))dt\ .$$

Учитывая это равенство, из (8) находим значение решения задачи $u(x,0)$ всюду на отрезке $[0,a]$:

$$u(x,0)=\varphi(x)-\beta(x)\cdot[u(0,0)+\int_0^{\mu(x)}\alpha(\nu(t))dt]\ \ \equiv f(x)\,, \tag{14}$$

где $u(0,0)=\dfrac{\varphi(0)}{1+\beta(0)}$. Из (14) легко определяем и значения производной решения задачи по x во всех точках отрезка $[0,a]$:

$$p(x,0)=\varphi'(x)-\beta'(x)\cdot[u(0,0)+\int_0^{\mu(x)}\alpha(\nu(t))dt]-\beta(x)\alpha(x)\mu'(x)\,,$$

а с учетом (5) находим и значение

$$\begin{aligned}u_y(x,0)=\alpha(x)-\varphi'(x)+\beta'(x)\cdot[u(0,0)+\int_0^{\mu(x)}\alpha(\nu(t))dt]+\\ +\beta(x)\alpha(x)\mu'(x)p(x,0)\ \ \equiv g(x).\end{aligned} \tag{15}$$

Легко заметить, что производные неизвестной функции в начале координат вполне определяются. Таким образом, задача (1), (5), (6) эквивалентна следующей задаче Коши:

Найти регулярное решение уравнения (1) вместе с его областью опеределения, которое удовлетворяет условиям

$$u(x,0)=f(x),\ \ x\in[0,a],\quad u_y(x,0)=g(x),\ \ x\in[0,a],$$

где функции f и g определены соотношениями (14), (15).

Иследуя задачу Коши для уравнения (1), на основе общего интеграла уравнения

$$u(\xi,\eta)=H(\xi)-T(\eta)+(\xi-\eta)(1-T'(\eta)+e^{-T'(\eta)})$$

в терминах характеристических переменных -

$$\xi=y-x\,,\ \ \eta=y-(u_x+u_y)x\,,$$

ISSN 1512-1232

где $H \in C^2(R^1)$, $T \in C^3(R^1)$ - произвольные функции (см. [5]), и
из выше проводенного исследования, можем заключить, что справедлива

Теорема. ***Пусть выполнены условия (C1) и (C2) и пусть функции*** f, g***, определенные из (14) и (15), удовлетворяют условию***

$$f'(x) + g'(x) \neq 1,\ x \in [0, a],$$

тогда задача (1), (5), (6) имеет решение, с областью определения G***, где*** G ***представляет собой треугольник, стороны которого суть отрезки характеристических прямых обеих семейств, проходящие через точку*** (a, a) ***и отрезок*** $[0, a]$**.**

Литература

1. А.В. Бицадзе. Некоторые классы уравнений в частных производных. – Наука, М, 1981, 448с.
2. I.M. Gelfand. Some Problems of the Theory of qusi-linear Equations. Usp. Math. Nauk. V. 14, No 2, p.87-158., 1959.
3. E. Goursat. Lecons sur l'integration des equations aux derivees partielles du second ordre. Tome 2. Hermann, Paris, 1898.
4. Дж.К. Гвазава. Некоторые классы гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. – Тбилиси, Мецниереба, 1992.
5. М.З. Ментешашвили. Метод характеристик в начальных и обратных задачах, поставленных для некоторых классов квазилинейных уравнений второго порядка. Кандидатская диссертация, Тбилисский государственный университет, Тбилиси, 1995, 117 стр.

Статья получена: 2011-01-28