

УДК 53.01

ПОЛУКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА

А. Угулава¹, Г. Мchedlishvili¹, С. Чхаидзе¹, Л. Чоторлишвили²¹ Факультет точных и естественных наук тбилисского государственного университета им. И. Джавахишвили. Грузия² Institut für Physik, Martin-Luther Universität Halle-Wittenberg, Heinrich-Damerow-Str.4, 06120 Halle, Germany.
Institut für Theoretische Physik Universität Heidelberg Philosophenweg 19, D-69120 Heidelberg**Аннотация**

Нелинейно-колебательная система в переменных действие-угол характеризуется зависимостью частоты колебаний $\omega(I)$ от действия I . Периодическое возмущение в состоянии осуществить в системе устойчивый нелинейный резонанс, при котором действие I подстраивается под условие резонанса $\omega(I_0) \approx \omega$ - "застревает" на резонансе. Для конкретной физической задачи может осуществиться случай, когда $I \approx \hbar$ - классическая величина, а поправка к нему $\Delta I \approx \hbar$ - является квантовой величиной. Динамика ΔI , естественно подчиняется квантовому уравнению движения. В частности, в приближении умеренной нелинейности $\varepsilon \approx (d\omega/dI) \cdot (I/\omega) \approx 1/\varepsilon$, где ε - малый параметр, описание квантового состояния сводится к решению уравнения Матье-Шредингера. Состояние сформировавшееся в результате "застревания" на резонансе является собственным состоянием оператора $\hat{\Delta I}$, не коммутирующего с гамильтонианом \hat{H} . Разложив волновые функции собственного состояния по собственным функциям гамильтониана, получим распределение вероятностей заселения по энергетическим уровням. Таким путем возможно получить инверсное заселение уровней, устоявшееся на временах меньше времени релаксации.

Ключевые слова: Резонанс в нелинейных колебаниях, умеренная нелинейность, квантовый маятник

1. Введение. Постановка задачи

Как известно, стационарный резонансный режим в нелинейно-колебательных системах, осуществляется вблизи значения действия I системы, определяемой в нулевом порядке теории возмущений из соотношения $\omega_0 - \omega + \omega_{NL}(I_0) \approx 0$. Здесь ω_0 - собственная частота, $\omega_{NL}(I)$ - нелинейный сдвиг частоты, зависящий от действия, ω - частота вынуждающей силы. Методы вычисления последующих поправок к резонансному значению $\Delta I \approx I_0$ разработаны в монографии [1]. Следуя этим методам, на основе классических уравнений движения можно вычислить как стационарные, так и нестационарные поправки к характеристикам нулевого порядка теории возмущений.

Если движение электрона в атоме под действием электромагнитного излучения описывается с помощью модели нелинейного осциллятора, то в зависимости от величины I_0 , могут возникнуть две существенно различные ситуации: 1) $I_0 \approx N\hbar$, где N огромное число, \hbar постоянная Планка. В этом случае I_0 - классическая величина, а поправка к нему ΔI может быть как классической, так и квантовой величиной; 2) $I_0 \approx n\hbar$, где $n \approx 1$ (но не огромное число), тогда поправка ΔI может содержать небольшое число квантов действия \hbar (напр. $I_0 \approx 10^4 \hbar$, $\Delta I \approx 10\hbar$). В этом случае I_0 - опять классическая величина, а поправка ΔI - может

быть только квантовой величиной. Оба этих случая могут осуществиться на практике. Однако, на этих страницах мы будем интересоваться вторым из них. Ясно, что в этом случае для вычисления поправки ΔI следует пользоваться квантовыми уравнениями движения.

Как видим, предлагаемое рассмотрение нелинейно-резонансного процесса в той части, где вычисляется резонансное значение действия I_0 основывается на классических уравнениях движения, а в той части, где вычисляется поправка ΔI - на квантовые уравнения движения. Этим объясняется название резонансного процесса – полуквантовая теория нелинейного резонанса.

Ниже увидим, что образовавшееся квантовое состояние является собственным состоянием оператора поправки действия $\hat{\Delta I}$, которая не коммутирует с оператором энергии и, следовательно, является суперпозиционным состоянием по собственным функциям гамильтониана. Возникаемое таким образом суперпозиционное состояние, в частности, может оказаться инверсно-населенным. Таким образом, с помощью оптической накачки возможно получить инверсное население энергетических уровней в микроволновом диапазоне. Целью настоящей работы является вычисление возникаемого при этом распределения населенностей по энергетическим уровням.

2. Атом в модели ангармонического осциллятора и стационарный резонансный режим в нулевом приближении

В модели ангармонического осциллятора функцию Гамильтона электрона в атоме, находящегося под действием электромагнитного излучения, можно записать в виде

$$\begin{aligned} H(x, p) &= H_0(x, p) + H_{NL}(x) + \varepsilon V(x, p) \\ H(x, p) &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \\ H_{NL}(x) &= -\frac{m\beta}{3}x^3 - \frac{m\gamma}{4}x^4 + \dots \\ V(x, t) &= e x \sum(t) A(t) \\ A(t) &= A_0 \cos \omega t, \quad \varepsilon \ll 1. \end{aligned} \quad (1)$$

где $H_0(x, p)$ - энергия гармонического осциллятора, $H_{NL}(x)$ - нелинейная поправка энергии, $\varepsilon V(x, p)$ - энергия взаимодействия электрона с электромагнитным излучением, e и m - заряд и масса электрона, β и γ - коэффициенты нелинейности, p и x - импульс и координата электрона, ω_0 - собственная частота электрона, $\sum(t)A(t)$ - импульсно-модулированная напряженность электрического поля, $\sum(t)$ - периодическая функция формы модуляции, ω и A_0 - частота и амплитуда светового поля, τ - длительность импульса, T - период между импульсами (рис.1). Предполагается, что ω и ω_0 - частоты оптического диапазона ($\ll 10^{-15}$ сек $^{-1}$), длительность импульса порядка пикосекунды ($\ll 10^{-12}$ сек.), а период между импульсами T - порядка наносекунды ($\ll 10^{-9}$ сек.). Так что, выполняются условия $(2\pi/\omega_0) \ll \tau \ll T$.

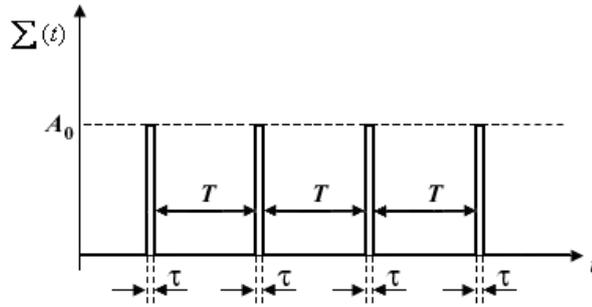


Рис.1. Периодическая серия импульсов с большой скважностью $(T/\tau) \gg 1$.

С помощью преобразования

$$x = \sqrt{\frac{2I}{m\omega_0}} \cos \theta, \quad p = -\sqrt{2Im\omega_0} \sin \theta, \quad (2)$$

в гамильтониане (1) перейдем к переменным действие и угол $(x, p) \rightarrow (I, \theta)$. Усредняя гамильтониан (1) по быстрой фазе θ , образуя медленную фазу $\varphi = \theta - \omega t$ и пренебрегая нерезонансными членами $\left(\overline{\cos(\theta + \omega t)} \approx 0 \right)$, получим

$$H^- = H_0^{NL}(I) + \varepsilon V(I, \varphi, t),$$

где

$$\begin{aligned} H_0^{NL}(I) &= H_0 + H_{NL}(I), \\ H_0 &= \omega_0 I, \quad H_{NL}(I) = \omega_{NL}(I)I, \\ \omega_{NL}(I) &= \frac{3\pi}{4} \frac{\gamma}{m\omega_0^2} I, \quad V(I, \varphi, t) = \frac{1}{2} V(I) \sum(t) \cos \varphi, \\ V(I) &= \sqrt{\frac{2I}{m\omega_0}} V_0, \quad V_0 = eA_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Запишем уравнения движения с помощью усредненного гамильтониана (3):

$$\begin{cases} \dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial V(I, \varphi; t)}{\partial \varphi}, \\ \dot{\varphi} = \omega(I) + \frac{\partial V(I, \varphi; t)}{\partial I}, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\omega(I) = \omega_0 - \omega + \omega_{NL}(I). \quad (5)$$

Затухание колебаний электрона можно учесть с помощью замены $\omega_0 \rightarrow \omega_0 - i/\tau_0$. Воспользовавшись разложением в ряд Фурье периодической функции формы модуляции $\sum(t)$, энергию взаимодействия можно представить в виде (рис.2)

$$V(I, \varphi; t) = U(I) \cos \varphi \sum_{k=-\{T/\tau\}}^{\{T/\tau\}} \cos k\omega t, \quad (6)$$

где $\{T/\tau\}$ есть целая часть от T/τ ,

$$U(I) = \frac{1}{2} \frac{\tau}{T} V(I) = \sqrt{\frac{2I}{m\omega_0}} U_0; \quad U_0 = \frac{1}{2} \frac{\tau}{T} eA_0. \quad (7)$$

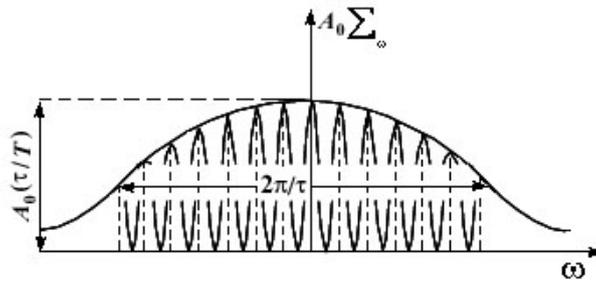


Рис.2. Частотный спектр функции формы модуляции состоит из гармоник, отстоящих друг от друга на частотном расстоянии $\Omega = 2\pi/T$.

По истечении переходного процесса, действие I приостанавливается (“застревает”) вблизи некоторого значения I_k , удовлетворяющего следующему резонансному условию

$$\omega(I_k) = k\Omega \tag{8}$$

с k -ой гармоникой из спектра взаимодействия (6). Определяемое из (8) резонансное значение действия I_k (или действия “застревания”) представляет собой его нулевой порядок по малому параметру.

Важно отметить, что образовавшееся состояние характеризуется определенным значением действия I_k . В будущем поправку $\Delta I_k = I - I_k$, вследствие ее малости, придется рассматривать как квантовую величину. Поэтому, формировавшееся состояние будем рассматривать как собственное состояние оператора $\hat{\Delta I}_k$.

Образуя еще раз медленную фазу $\alpha_k = \varphi - k\Omega t$, усредняя взаимодействие (6) по быстрой фазе φ и отбрасывая нерезонансные члены $\left(\overline{\cos(\varphi + k\Omega t)} \approx 0 \right)$, для энергии взаимодействия получим

$$\overline{V(I_k, \varphi; t)}^\varphi = \frac{1}{2} U(I) \cos \alpha_k. \tag{9}$$

Основные уравнения движения при этом приобретают вид

$$\begin{cases} \dot{I} = -\frac{\varepsilon}{2} U(I) \sin \alpha, \\ \dot{\alpha} = \omega(I) - k\Omega + \frac{\varepsilon}{2} \frac{dU}{dI} \cos \alpha, \end{cases} \tag{10}$$

где I и α берутся соответственно вблизи значений I_k и α_k . При выводе системы уравнений (10) предполагалось, что резонансное соотношение (8) выполняется в течение длительного промежутка времени. Отклонения действия $\Delta I_k = I - I_k$, определяемые согласно уравнениям (10), недостаточно велики, чтобы измененная нелинейная частота $\omega(t)$ могла достигнуть соседнюю гармонику из спектра взаимодействия. С этого момента в формулах мы опустим индекс k , указывающий гармонику предполагая, что условие резонанса выполняется при $I = I_0$ с одной из гармоник.

Предположим, что $|\Delta I| \ll I$. Тогда, независимо от конкретного вида функции $\omega(I)$ и $U(I)$, в приближении умеренной нелинейности $\varepsilon \ll \mu \ll 1/\varepsilon$, где $\mu = \left| \frac{I}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dI} \right|$, существует сохраняющийся гамильтониан [2,3]

$$H_U = \omega' \frac{(\Delta I)^2}{2} + \frac{1}{2} U(I) \cos \alpha, \quad \omega' = \frac{d\omega}{dI}, \tag{11}$$

который рождает систему уравнений, эквивалентную системе (10).

Гамильтониан H_U называется универсальным гамильтонианом. Малые отклонения действия ΔI в приближении умеренной нелинейности можно вычислить с помощью соответствующих уравнений Гамильтона:

$$\Delta \dot{I} = -\frac{\partial H_U}{\partial \alpha}, \quad \dot{\alpha} = -\frac{\partial H_U}{\partial (\Delta I)}. \quad (12)$$

3. Оценка численного значения коэффициента нелинейности γ

Как известно, ангармонизм электронных колебаний - причина появления нелинейности коэффициента преломления - может быть очень существенным в твердых телах и жидкостях, например в исландском шпате и в некоторых изотропных кристаллах (LiF, NaCl)

Световое поле оказывает влияние на поляризуемость молекулы (атома) α , причем ее изменение пропорционально квадрату амплитуды световой волны:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_2 A^2, \quad \alpha_0 = \frac{e^2}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \alpha_2 = \frac{3}{4} \alpha_0 \gamma \left(\frac{e}{m} \right)^2 \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^3}, \quad (13)$$

где A - амплитуда напряженности мощного непрерывного излучения. Связь между коэффициентом преломления света n и поляризуемостью, задается следующей формулой

$$n = \sqrt{n_0^2 + \Delta n} \approx n_0 + \frac{\Delta n}{2n_0}, \quad (14)$$

где

$$n_0^2 = 1 + \frac{N}{\epsilon_0} \alpha_0, \quad n_2 = \frac{N}{\epsilon_0} \alpha_2, \quad \Delta n = n_2 A^2,$$

$\epsilon_0 = 8.8 \cdot 10^{-12} \text{ К}^2 \cdot \text{нм}^2$ - электрическая постоянная, n_0 - линейная часть коэффициента преломления, $N = fN_0$, f - сила осциллятора, N_0 - число молекул в единице объема, Δn - нелинейная поправка коэффициента преломления.

Для определения коэффициента γ можно воспользоваться экспериментальными данными по самофокусировке луча [4,5]. Как известно, для наблюдения самофокусировки достаточно, чтобы $\Delta n/n_0 \approx 10^{-5}$. С учетом этого, предположив, что выполняется условие главного резонанса на собственной частоте $\omega_0 = 10^{15} \text{ сек}^{-1}$ с расстройкой $|\omega - \omega_0| \approx 10^{-12} \text{ сек}^{-1}$ и что $N_0 \approx 10^{28} \text{ м}^{-3}$, $f \approx 0.1$, $m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$, $A_0 \approx 0.5 \cdot 10^5 \text{ В/м}$, с помощью соотношений (13) и (14) для коэффициента нелинейности получим $\gamma \approx 4 \cdot 10^{42} \text{ м}^{-2} \text{ сек}^{-2}$.

Для производной нелинейной частоты (11) по действию получим $\omega' \approx 2.5\gamma = 10^{43} \text{ Дж}^{-1} \text{ сек}^{-2}$. Из условия резонанса на обертоном (8), можно найти численное значение действия "застревания"

$$I = \frac{|\omega - \omega_0|}{\omega'} \approx 10^3 \hbar. \quad (15)$$

Итак, образовавшийся стационарный резонансный режим формируется при численном значении действия порядка $10^3 \hbar$, которое можно считать классической величиной. Однако, она недостаточно большая, чтобы поправку $\Delta I \approx I$ также можно было считать классической величиной. Поэтому, для изучения динамики ΔI следует привлечь квантовые законы движения.

4. Квантовые поправки резонансного значения действия

Таким образом, в состоянии стационарного резонансного режима образуется состояние с определенным действием I , являющимся классической величиной. Поправка же к нему, в зависимости от ее величины, может быть как классической, так и квантовой величиной. В первом случае, в приближении умеренной нелинейности, динамика действия определяется универсальным H_U гамильтонианом (11), а во втором – его квантовым аналогом, получаемым с помощью замены ΔI соответствующим оператором $-i\hbar \frac{d}{d\alpha}$. В результате этой замены получаем оператор Гамильтона вида

$$\hat{H} = -\omega' \hbar^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} + U(I) \cos \alpha. \quad (16)$$

Стационарное уравнение Шредингера, соответствующее квантовому гамильтониану (16) имеет форму:

$$-\hbar^2 \omega' \frac{d^2 \psi}{d\alpha^2} + U(I) \cos \alpha \cdot \psi_n = E_n \psi_n. \quad (17)$$

Здесь ψ_n и E_n - собственные функции и собственная энергия оператора энергии (16).

Величина $\varepsilon_{NL} \equiv \hbar^2 \omega'$ играет роль кванта энергии нелинейности [6,7]. Сначала заметим, что при стационарном резонансном режиме нелинейность выражается неравенством $\omega' \neq 0$. При этом, чем больше $|\omega'|$, тем больше нелинейность. Частотный квант нелинейности ω_{NL} , как минимальная “порция” нелинейности, будет $\omega_{NL} = \hbar \omega'$. Аналогично, энергетический квант нелинейности $\varepsilon_{NL} = \hbar^2 \omega'$.

Заметим, что уравнение (17) представляет собой уравнение жесткого ротатора, с моментом инерции $1/\omega'$, находящегося в периодическом поле $U(I, \alpha) = U(I) \cos \alpha$.

Проведем в уравнении (17) замену $\alpha \rightarrow 2\alpha$ и введем безразмерные параметры $\xi = E/\varepsilon_{NL}$ и $l(I) = U(I)/2\varepsilon_{NL}$. Тогда, из (17) получим

$$\frac{1}{4} \frac{d^2 \psi}{d\alpha^2} + (\xi - 4l_0 \cos 2\alpha) \psi = 0, \quad (18)$$

где $l(I_0) \equiv l_0$. Это уравнение есть уравнение Матье-Шредингера. Оценим параметры, входящие в уравнение (18). Для последовательности оптических импульсов с характеризующими параметрами $A_0 \approx 0.5 \cdot 10^5$ в/м и $\tau/T \approx 10^{-3}$ имеем $U(I_0) \approx 10^{-24}$ Дж. Для энергетического и частотного квантов нелинейности получим $\varepsilon_{NL} \approx 10^{-25}$ Дж и $\omega_{NL} \approx 10^9$ сек⁻¹. Тогда, для параметра входящего в уравнение (18) будем иметь $l(I_0) \approx 5$. Очевидно, что это значение относится к одному конкретному случаю. На практике вполне может возникнуть экспериментальная ситуация с большими значениями l .

Из общих требований квантовой механики следует, что волновая функция и ее производная должны быть непрерывными функциями в рассматриваемой области. Однако, помимо общих условий, волновая функция должна так же удовлетворять условиям, вытекающим из симметрии самого уравнения Матье. Легко проверить, что уравнение (18) обладает свойством симметрии относительно преобразований $\alpha \rightarrow -\alpha$ и $\alpha \rightarrow \alpha + \pi$.

Нетрудно увидеть, что выполнение всех перечисленных выше условий, предъявляемых к волновым функциям возможны, если выполняются следующие граничные условия:

$$\psi(0) = \psi(\pi) = 0, \quad (19)$$

$$\left. \frac{d\psi}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{d\psi}{d\alpha} \right|_{\alpha=\pi} = 0. \quad (20)$$

Решение дифференциального уравнения Матье (18) с граничными условиями (19) и (20), представляет собой задачу Штурма-Лиувилля для уравнения Матье. Этими решениями, как известно [8], являются функции Матье $se_n(\alpha, l)$ и $ce_n(\alpha, l)$.

Заметим однако, что уравнение Матье (18) обладает еще одним видом симметрии. Это – симметрия относительно середины интервала $[0, \pi]$, т.е. относительно преобразования $\alpha \rightarrow \pi - \alpha$. Поэтому волновые функции $se_n(\alpha, l)$ и $ce_n(\alpha, l)$ должны быть либо четными, либо нечетными функциями от $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Следовательно, каждая из двух функций Матье “распадается” на две функции, различающиеся по этому признаку.

Итак, собственные функции уравнения Матье-Шредингера можно представить в виде четырех функций Матье [9]

$$se_{2n+2}(\alpha, l), \quad se_{2n+1}(\alpha, l), \quad ce_{2n}(\alpha, l), \quad ce_{2n+1}(\alpha, l). \quad (21)$$

Собственные значения уравнения (18) как функции параметра l , называемые Матье-характеристиками, на плоскости (ξ, l) имеют сложную структуру (рис.3).

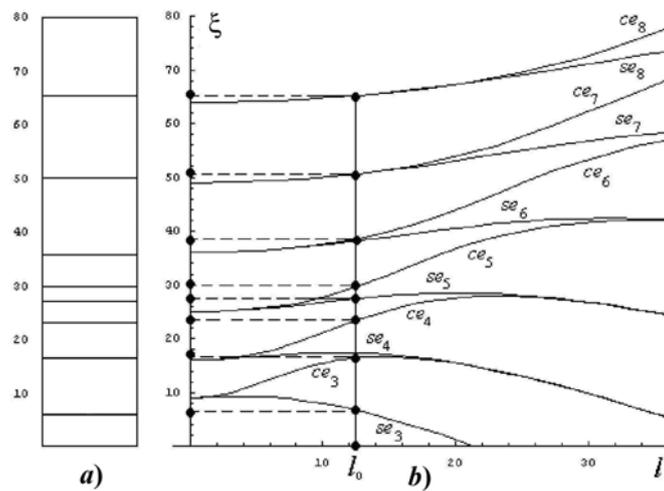


Рис.3. Фрагмент собственных значений уравнения Матье (масштаб не выдержан):

- a) Энергетический спектр, получаемый из Матье-характеристик при $l = l_0$;
- б) Матье-характеристики.

На рис.3 можно заметить главную особенность Матье-характеристик – наличие множества ветвлений уровней.

Уравнение Матье-Шредингера в качестве предельных случаев содержит две, качественно различающиеся квантовомеханические уравнения – свободного ротатора $\xi \propto l$ и гармонического осциллятора $\xi \propto l^2$. Поэтому естественно, что в переходной области $\xi \approx l$ неизбежно должно происходить множество слияний, а затем ветвлений энергетических уровней (можно сказать и в обратной последовательности).

5. Собственное состояние оператора поправки действия и его разложение по периодическим функциям Матье

Как уже отмечалось, состояние, образовавшееся в стационарном резонансном режиме, является состоянием с определенным значением действия I . Будет логическим допустить, что квантовая поправка к этому “режиму” также характеризуется определенным значением поправки действия ΔI . Другими словами, образовавшееся согласно нашим допущениям

квантовое состояние ψ_m , является собственным состоянием оператора поправки действия

$$\Delta \hat{I} = -i\hbar \frac{d}{d\alpha}.$$

$$-i\hbar \frac{d\psi_m}{d\alpha} = \Delta I \psi_m. \quad (22)$$

Собственные функции и собственные значения этого уравнения, удовлетворяющие стандартным требованиям квантовой механики, есть

$$\Psi_m(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\alpha},$$

$$\Delta I = m\hbar, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (23)$$

Легко видеть, что конечное время жизни электрона на энергетическом уровне, соответствующее времени затухания τ_0 , можно учесть с помощью замены $m \rightarrow m - \frac{i}{\omega' \hbar \tau_0}$.

Операторы $\hat{\Delta I}$ и \hat{H} (16) не коммутируют между собой. Поэтому состояние (23) не является собственным состоянием для оператора энергии. Оно является суперпозиционным состоянием по собственным функциям оператора энергии \hat{H} .

$$\Psi = \sum a_n \psi_n, \quad a_n = \int \Psi \psi_n^* dq, \quad (24)$$

где ψ_n содержит полный набор функций Матье (21).

В волновой функции (23) произведем замену $\alpha \rightarrow 2\alpha$, которую мы уже произвели в уравнение Матье (18) и разложим $\Psi_m(\alpha)$ по полному набору функций Матье. Для вычисления коэффициентов разложения a_n воспользуемся известным разложением функций Матье в ряд Фурье [9]:

$$ce_{2n}(\alpha, l) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{2n}(l) \cos 2r\alpha, \quad ce_{2n+1}(\alpha, l) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{2n+1}(l) \cos(2r+1)\alpha,$$

$$se_{2n}(\alpha, l) = \sum_{r=1}^{\infty} B_{2r}^{2n}(l) \sin 2r\alpha, \quad se_{2n+1}(\alpha, l) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{2n+1}(l) \sin(2r+1)\alpha. \quad (25)$$

Коэффициенты A_{2r}^{2n} , A_{2r+1}^{2n+1} , B_{2r}^{2n} и B_{2r+1}^{2n+1} представлены в таблицах [10].

После несложных вычислений получим:

$$\Psi_m(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i2m\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_n \{ A_{2m}^{2n} ce_{2n}(l, \alpha) + i B_{2m}^{2n} se_{2n}(l, \alpha) \}. \quad (26)$$

Теперь легко получить вероятности заселения уровней энергий. Для волновых функций $ce_{2m}^{2n}(l, \alpha)$ и $se_{2m}^{2n}(l, \alpha)$ они будут иметь вид:

$$W_{ce}^{2m;2n} = \frac{1}{2} [A_{2m}^{2n}(l, \alpha)]^2, \quad W_{se}^{2m;2n} = \frac{1}{2} [B_{2m}^{2n+2}(l, \alpha)]^2. \quad (27)$$

Если энергетические уровни $ce_{2m}^{2n}(l, \alpha)$ и $se_{2m}^{2n}(l, \alpha)$ вырождены (слиты вместе), то вероятности заселения этих уровней будут

$$W_{2m}^{2n}(l) = W_{ce}^{2m;2n}(l) + W_{se}^{2m;2n}(l) = \frac{1}{2} \left\{ [A_{2m}^{2n}(l)]^2 + [B_{2m}^{2n}(l)]^2 \right\} \quad m \neq 0$$

$$W_0^{2n}(l) = [A_0^{2n}(l)]^2 \quad m = 0 \quad (28)$$

и представлены на рис.4.

Приведем результаты численных расчетов распределения вероятностей заселения энергетических уровней от параметра n при разных значениях l . Отметим, что параметр l

связан с параметрами накачки (7) и с энергетическим квантом нелинейности ε_{NL} соотношением $l = \tau e A / 4 T \varepsilon_{NL}$.

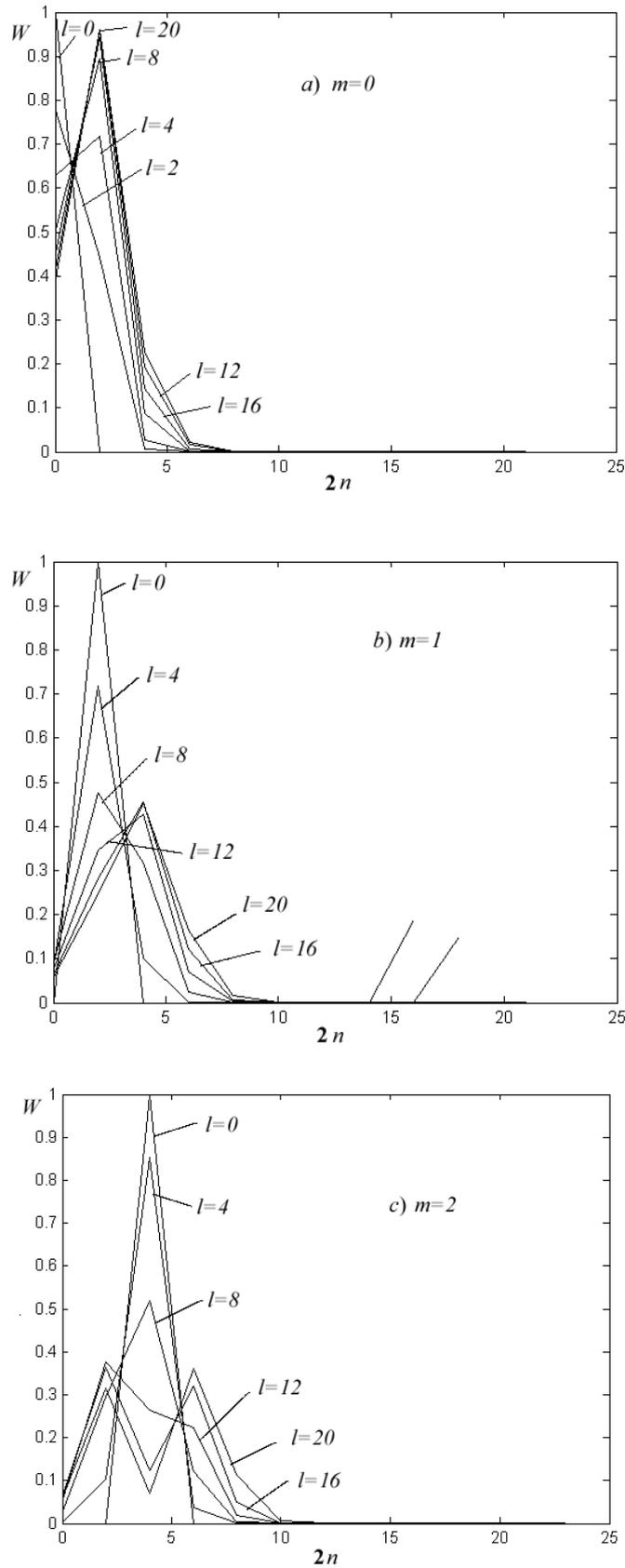


Рис.4. Распределение вероятностей по энергетическим уровням: a) $m = 0$ – предполагаемое основное состояние; b) $m = 1$; c) $m = 2$.

Из рис.4а следует, что в предполагаемом основном состоянии, при $l=0$ с большей вероятностью заселен основной энергетический уровень $n=0$. С увеличением l заселенность этого уровня постепенно снижается до значения 0.37 для $l=20$ и максимум заселенности сдвигается в сторону $n=1$, где при данном l он достигает значения 0.96. Таким образом, при $l \leq 20$ достигается максимальная инверсия $\Delta W \approx W_0^0 - W_0^2 \approx -0.59$.

В случае если осуществляется состояние с $m=1$, то как следует из рис.4b, при малых значениях l максимум распределения вероятностей приходится уже на энергетический уровень $n=1$, т.е. инверсная заселенность существует уже при меньших значениях l . С ростом l вероятность заселения уровня $n=1$ снижается и максимум заселенности сдвигается в сторону уровня $n=2$.

Что касается случая $m=2$, то как следует из рис.4с, для сравнительно малых l максимум распределения появляется на уровне $n=2$ и сохраняется вплоть до значения $l \approx 8$, после чего он сдвигается по обе стороны от уровня $n=2$. Для разных больших значений l максимумы вероятностей приходятся на уровни $n=1$ или $n=3$.

Таким образом, возможность существования инверсной населенности уровней энергий – характерная черта всех рассмотренных нами случаев $m=0,1,2$. Очевидно, что таким же свойством будут обладать квантовые состояния с $m > 2$.

Напомним, что распределения, представленные на рис.4 поддерживаются импульсной накачкой – периодической серией световых импульсов с большой скважностью (см. рис.1)

6. Обсуждение полученных результатов

Для значений параметров рассматриваемых в данной работе, энергетические переходы соответствуют радиочастотному диапазону $\omega_{NL} \approx 10^9$ сек⁻¹.

Представляет интерес выяснить, как долго система может сохранить неравновесные распределения, представленные на рис.4. Для этого достаточно вспомнить, что максимальное значение затухания колебаний электрона, которое мы здесь не учитывали, имеет порядок $\tau \approx 10^{-8}$ сек.

Учет диссипативных процессов приведет к уширению дискретных уровней как энергии, так и действия. Операторы действия ΔI и энергии H_U не коммутируют между собой и поэтому уширения уровней энергий связаны между собой соотношением неопределенностей. Для коммутатора операторов с учетом (16) и (22) можно написать

$$[\Delta \hat{I}; \hat{H}_U] = i\hbar U \sin \alpha. \tag{29}$$

Тогда соотношение неопределенностей будет иметь вид

$$\delta(\Delta I) \delta E = \frac{1}{2} \hbar U \overline{\sin \alpha}. \tag{30}$$

Здесь усреднение $\overline{\sin \alpha}$ следует произвести по волновой функции

$$\psi_m(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\alpha - \gamma\alpha}, \tag{31}$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\omega' \hbar \tau_0} = \frac{1}{\omega_{NL} \tau}. \tag{32}$$

Учитывая, что $\omega_{NL} \tau \approx 1$ и разлагая $\exp(-\gamma\alpha)$ в ряд, после несложного интегрирования получим $\overline{\sin \alpha} \approx \gamma$. Тогда соотношение неопределенностей (30) будет иметь вид

$$\delta(\Delta I) \delta E = \frac{1}{2} \gamma \hbar U. \tag{33}$$

Для $\delta(\Delta I)$ естественно предположить, что $\delta(\Delta I) \approx 1/\omega' \tau$. Тогда, из (33) для неопределенности энергии получим

$$\delta E \approx \frac{1}{2} U.$$

Воспользовавшись приведенными выше численными данными ($\epsilon_{NL} \approx 10^{-25}$ Дж, $U \approx 10^{-24}$ Дж.) для уширения уровней получим $\delta E/E \approx 0.05$. Уширение такого порядка может “размазать” участки Матъе-характеристик лишь в переходной области, в окрестности точек ветвления (рис.3), где энергетические уровни сильно сближаются. В других областях кривые энергии уширятся, сохраняя при этом ранее существующие очертания. Следовательно, учет диссипации несущественно повлияет и на рис.4 и вышеприведенные рассуждения сохраняют силу.

Литература

1. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Москва, Изд. Московского университета, 1971.
2. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. Москва, Наука, 1988.
3. Рабинович М. И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. Москва, Наука, 1984.
4. Schubert Max, Wilhelmi Bernd. Nonlinear Optics and Quantum Electronics. New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore. John Wiley & Sons Inc., 1986.
5. Pantell R.H., Puthoff H.E. Fundamentals of Quantum Electronics. New York, London, Sydney, Toronto, John Wiley & Sons Inc., 1969.
6. Chotorlishvili L., Ugulava A.. Physica D, 2010, 239, 103.
7. Ugulava A., Chotorlishvili L. and Nikoladze K.. Overlapping of nonlinear Resonances and the problem of quantum chaos. Phys. Rev. E, 2003, 68, 0262xx.
8. Бейтман Г., Эрдейн А.. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матъе. Москва, Наука, 1967.
9. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. Edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. National bureau of Standards. Applied mathematics series-55. 1964.
10. Tables Relating to Mathieu Functions. Characteristic Values, Coefficients and Joining Factors. New York, Columbia University Press, 1951.

Article received: 2011-01-31