ISSN 1512-1461

УДК 53

НОВЫЙ ВЗГЛЯД НА СТРУКТУРУ ВСЕЛЕННОЙ

Курдгелаидзе Дмитрий

Грузинский Технический Университет, Институт Вычислительной Математики им.Мусхелишвили.

Аннотация

Согласно современному представлению о т.н. "горячей модели" Вселенной распределение плотности материи в пространство Фридмана однородно и пространство расширяется. Пространство, предшествующее пространству Фридмана, состоит из Ферми- газа и фотонов. Такое пространство (пространство гравиплазмы) - типичный объект исследования современной теории поля теоретической физики. Результат такого исследования и излагается в данной работе. Основной результат состоит в том, что распределение плотности материи в пространстве гравиплазмы неоднородно, и пространство гравиплазмы не расширяется и не сжимается.

Ключевые слова

Гравитация, поле, уравнение Эйнштейна, ОТО, тензор энергии импульса, фермионы,спиноры, уравнение Дирака, нелинейное уравнение, решение, эллиптические функции, Вселенная, пространство Фридмана, однородность, гравиплазма, неоднородность, фазовый переход, ячеистая структура, теория металлов, уравнения Томаса-Ферми-Дирака, космологическая постоянная.

Введение

§1. Роль геометрии в процессе определения структуры Вселенной.

1. Что представляет собой окружающий нас Мир, т.н. Вселенная, как он построен, какова его структура, - эты вечные вопросы, стоящие перед Человеком и требующие ответа.

Первым, кто попытался ответить на эти вопросы на научном уровне своего времени, был философ Платон в работе Тимей . После того, как Платон ввел свои известные, "четыре стихии" - Земля, Вода, Воздух и Огонь,- из которых, по его предположению, построены все вещи в природе, он поставил вопрос о том, как именно построен из этих стихий Мир в целом. Свою идею Платон сформулировал примерно следующим образом: "Мир из этих стихий построен **так**, как построена геометрия из своего основного элемента". При этом основным элементом геометрии Платон считал треугольник. Соответственно, свои известные четыре "стихии" Платон стал строить из прямоугольных треугольников. Он выделил прямоугольный равнобедренный треугольник, (c^2=2 b^2 , где **c** - гипотенуза, a=b – катеты), из него построил плоскую фигуру - квадрат, из квадрата - куб, который и сопоставил с Землёю. Потом из прямоугольных неравнобедренных треугольников (c^2=5b^2, a=2b) он строит плоские фигуры - треугольники, а из треугольников - пирамиду, которую и сопоставляет с Огнем, и т.д. Как видим, Платон стал строить мир из существующего тогда для него "подручного геометрического материала", т.е. на базе геометрии IV-го века до нашей эры, т.е. из геометрии, которая впоследствии, в Ш–ем веке до нашей эры, сформировалась в виде геометрии Эвклида.

2. Геометрия плоской поверхности Эвклида со временем была дополнена геометрией кривых поверхностей (Гаусс и другие), и была подготовлена почва для создания геометрии искривленных пространств - геометрии n-мерных пространств Римана (в n-кратно протяженном многообразии).

3. В 1866 году Риман в работе [1] "О гипотезах, лежащих в основании геометрии" сформулировал свою геометрию n-кратно протяженных многообразий. Работа Римана чрезвычайно глубока и сложна по содержанию. Я здесь выделю только некоторые вопросы, которые имеют существенное значение для нашей цели. Риман пишет:

ISSN 1512-1461

1). "Геометрия предполагает заранее заданными как само понятие пространства, так и первые основные понятия, которые нужны для пространственных построений".
2). "Существенные свойства определяемых объектов выражаются в форме аксиом".
3). "Для многократно протяженной величины возможны различные мероопределения", и эвклидово "трехмерное пространство есть не что иное, как частный случай трижды протяженной величины".
4). "Те свойства, которые выделяют пространство из других мыслимых трижды протяженных величин, могут быть почерпнуты не иначе, как из опыта".
5). Риман вводит т.н. метрический тензор, определяя квадрат длины как произведение метрического тензора на квадратичную форму дифференциалов координат
Как видим, по Риману:
1). Пространство, как множество точек, геометру задается, т.е., пространство, в смысле его природы и физических свойств, не является объектом геометрии.
2). Геометрия строится на аксиомах, при этом систему аксиом как существенных свойств определяемых объектов, с которыми имеет дело геометр, определяет сам геометр.
3). n-кратно протяженные многообразия могут иметь различные мероопределения. "Геометр строит свою геометрию n-кратно протяженного многообразия при определенном мероопределении".
4). Только после завершения всех построений проводится сравнение с опытом.
5). Метрический тензор, на данном этапе построения Римановой геометрии, не имеет физической смысловой нагрузки. Поскольку процесс построения Римановой геометрии зависел только от геометра, то формализм Римановой геометрии развился быстро. Однако, на данном этапе, без связи с опытом, Риманова геометрия выглядела как абстрактная геометрия, существующая только для геометров.
4. В 1868 году Гельмгольц опубликовал работу "О фактах, лежащих в основании геометрии"[2] . Как следует из заглавия, если Риман строит свою геометрию на аксиомах, то Гельмгольц строит свою геометрию на фактах. При этом, под фактами понимаются измерения, опыт. Гельмгольц пишет:
1) "…всякое первоначальное измерение пространства основывается на наблюдении совмещения".
2) "Можно показать, что, придерживаясь с самого начала требования безусловно свободной подвижности твердых фигур без изменения формы во всех частях пространства, легко вывести исходную гипотезу Римана из более широких допущений".
Работа Гельмгольца, его идеи не был приняты математиками того времени. Ввиду того, что построение геометрии в модели Гельмгольца было связанно с измерениями, то геометрия Гельмгольца не получила дальнейшего математического развития. Однако идеи Гельмгольца оставили глубокий след в естествознании, и во многом определили его дальнейшее развитие. Например, так как измерения в пространстве, согласно Гельмгольцу, предполагают совмещение фигур, то для реализации указанного совмещения фигур каждая геометрия должна иметь свою механику. В частности, геометрия Эвклида в качестве такой механики имеет механику Ньютона.
5.В ответ Гельмгольцу, математики, для исключения необходимости прсутствия механического движения в геометрии, ввели отображение. При отображении важны только начальное и конечное положение точки, т.е.надобность в механическом движении отпадает.
6. Ф. Клейн, в своей работе "Эрнаргейская программа"[3] в этом направлении пошел ещё дальше. Исходя из нашей задачи, из этой работы я выделю только три пункта:
1). Геометрическим свойством образа являются только те свойства образа, которые остаются неизменными при общепространственных преобразованиях.
2). Если пространство имеет глобальную группу симметрии, то можно построить геометрию этого пространства.

ISSN 1512-1461

3).При этом. данная группа симметрии является группой движения этого пространства (преобразование, которое данное пространство переводит в самой себе).

7. В 1873 году Д. Максвелл опубликовал свою известную "Систему уравнений электродинамики".

В 1904 году Х. Лоренц и в 1905 году А.Пуанкаре показали, что Система уравнений электродинамики Максвелла инвариантна относительно линейной группы преобразований, известной теперь как Преобразования Лоренца.

В 1908 году Минковский, продолжая идею Ф.Клейна, ввел 4-ех мерное пространство, для которого группа Лоренца является группой движения - 4-ех мерное пространство, известное теперь как "Пространство Минковского".

8. В 1905 году Эйнштейн, исходя из преобразования Лоренца, построил механику для больших скоростей, известную как "Специальная теория относительности". После введения понятия "Пространство Минковского", "Специальная теория относительности" стала иллюстрацией идеи Гельмгольца, что для каждого пространства требуется своя механика, и "Специальная теория относительности" является механикой Пространства Минковского.

9. Пространство Минковского, обладая глобальной группой симметрии в виде Преобразования Лоренца, с точки зрения Римановой геометрии является плоским пространством. Соответственно было введено понятие искривленного 4-ех мерного пространства Минковского, и была построена общая Риманова Геометрия 4-ех мерного пространства Минковского .

10. Как уже было сказано, согласно Гельмгольцу, каждое пространство требует своей механики. Эйнштейн, после того, как построил Специальную Теорию Относительности как механику плоского пространства Минковского, решил построить механику и искривленного, 4-ех мерного пространства Минковского как механику в плоском пространстве Минковского при наличии гравитационного поля. При этом, Эйнштейн принял, что причиной искривления пространства является наличие в нем гравитационного поля, и метрический тензор искривленного пространства, как основную величину, характеризующую искривление пространства, отождествил с потенциалом гравитационного поля.

Реализация этой идей оказалась величайшим достижением в истории человечества. Во-первых, геометрия Римана обрела физическое содержание,
физика получила в виде Римановой геометрии мощный математический аппарат позволяющий исследовать пространство, его структуру, как локально, так и в целом. Кроме того, как известно, гравитационное поле Ньютона описывается одним потенциалом, тогда как гравитационное поле Эйнштейна описывается метрическим тензором второго порядка. Соответственно, стало необходимым заменить уравнение гравитационного поля Ньютона новым уравнением гравитационного поля - для метрического тензора второго порядка.

11. В 1916 году Эйнштейн опубликовал свою работу "Основы общей теории относительности" [4] - новую теорию гравитационного поля – и в частности, т.н. „Уравнение гравитационного поля Эйнштейна". Это уравнение выражает равенство т.н. тензора Эйнштейна с тензором энергии импульса материальной среды. Он представляет собой систему из 10-и уравнений. В качестве неизвестных выступают шесть компонент метрического тензора ($g_{\mu\nu}= g_{\nu\mu}$ –метрический тензор имеет 10 компонент, однако ввиду того, что 4 координаты допускают произвольное преобразование, то искомыми остаются только 6 компонент $g_{\mu\nu}$),три_ компонентами скорости (4- компоненты скорости u^{μ} и одно условие $u^{\mu} u_{\mu}=1$), p - давление и ρ - плотность энергии (2 функции) входящие в тензоре энергии импульса материальной среды, заданной в виде тензора энергии-импульса идеальной жидкости. В теории при наличии 10-и независимых уравнений вводится 11 искомых функции. В качестве недостающего, дополнительного, уравнения задается т.н. уравнение состояния $p=\chi(\rho)$,которое в случае фотонного газа имеет вид $p=\rho/3$. Во всех других случаях имеем $p< \rho/3$.

ISSN 1512-1461

12. После опубликования Эйнштейном своего уравнения гравитационного поля стали появляться т. н. космологические решения уравнении Эйнштейна. Среди последних выделяется решение Фридмана.[5] Решение Фридмана соответствует тензору энергии импульса пылевидной материи с уравнением состояния P=0, и оно описывает нестатическую Вселенную. Решение Фридмана легло в основу современного представления о структуре Вселенной и процессе ее эволюции.

§2. Современное представление о структуре и эволюции Вселенной и недостатки этого представления.

Современные представления о структуре Вселенной начали складываться в 20-ые годы прошлого столетия на базе уравнения Эйнштейна.

Уравнение Эйнштейна состоит из двух частей - т.н. тензора Эйнштейна (левая сторона уравнения) и тензора энергии импульса материальной среды (правая сторона уравнения). Тензору Эйнштейна предъявляется общее требование изотропности пространства, а тензору энергии импульса материальной среды - требование наличия вида тензора энергии импульса идеальной жидкости.

Существующие тогда космологические решения, т.н. решение Эйнштейна или де Ситтера, в виду их статичности, были неприемлимы для построения модели реальной Вселенной. В результате нестатическое решение Фридмана [6] легло в основу зарождавшегося тогда современного представления о структуре Вселенной. В то время Вселенная рассматривалась как пространство, заполненное т.н. космической пылью, из которой, в частности, формировались (и формируются) существующие звёзды и галактики. Фридман получил точное решение уравнения Эйнштейна для случая такой космической пыли в сопутствующей системе координат, натянув координатную сетку на пылевидную материю, при наличии тензора энергии импульса космической пыли как идеальной жидкости при давлении p=0. Основной результат Фридмана состоит в том, что при нынешней плотности материи ($\rho=10^{-31}$гр/ см^3) Вселенная должна расширяться. Это предсказание Фридмана было подтверждено наблюдениями Хаббли.

Для изучения предыстории развития Вселенной Фридмана в его решении стали менять направление скоростей - расширение пространства Фридмана на сжатие, - и стали рассматривать обратные процессы, т.е. процессы сжатия пространства Фридмана. При этом предполагали, что пространства, возникшие в результате сжатия пространства Фридмана, также являются пространствами типа пространства Фридмана и будут обладать свойствами расширения и сжатия.

Таким путем было выявлено, что Вселенная "вышла из точки" в результате "Большого взрыва", и что за взрывом следовал т.н. ранний период состояния Вселенной в виде газа из гамма-фотонов. За ним следовал второй период состояния Вселенной в виде плазмы из свободных фермионов и фотонов. И, наконец, из второго периода возникло нынешнее состояние Вселенной в виде космической пыли, звезд и галактик, т.е. пространство Фридмана. Обнаружение т.н. фонового микроволнового излучения (т.н. реликтовые фотоны) рассматривается как подтверждение выше приведенной т.н. "горячей модели" Вселенной.[6]

ISSN 1512-1461

Часть 1.
Теория гравитационной плазмы (гравиплазмы) в ОТО

Глава 1
Математические основы теории гравитационной плазмы (гравиплазмы) в ОТО

Введение.
Как уже было сказано, согласно современному представлению о структуре и эволюции Вселенной, состояние Вселенной соответствует модели расширяющейся Вселенной Фридмана. Материальная среда в этом случае находится, в основном, в состоянии т.н. космической пыли с нулевым давлением. При этом состояние Вселенной, предшествующее данному состоянию расширяющейся Вселенной Фридмана, также является расширяющимся пространством типа Фридмана, однако состоит из свободного Ферми-газа и фотонов, находящихся в собственном гравитационном поле. Под свободным Ферми-газом понимается газ, состоящий из протонов и электронов как частиц с положительной энергией. Будем исходить из стандартного представления, что Мир в космологическом масштабе состоит только из частиц. Свободный Ферми-газ, находящийся в собственном гравитационном поле, будем называть гравитационной плазмой или сокращенно гравиплазмой.

Обычно под понятием плазмы понимается система из частиц с противоположными знаками электрического заряда. В такой системе равновесие наступает благодаря действию двух противоположных сил: с одной стороны, силы отталкивания, возникшего от давления кинетической энергии частиц и электромагнитного отталкивания частиц с одинаковым знаком зарядов, и, с другой стороны, электромагнитного притяжения частиц с противоположным знаком заряда. При наличии гравитационного поля плазма может состоять как из одноименных зарядов, так и из разноименных зарядов. В обоих случаях гравитационное поле может обеспечить равновесие такой системы. Однако, в виду слабости гравитационного взаимодействия, с одной стороны, и нелинейности гравитационного поля, с другой, для наступления равновесия в гравитационной плазме потребуются большие пространственные размеры системы.

Система свободного Ферми-газа и фотонов, находящихся в собственном гравитационном поле, является типичным объектом исследования современной теории поля теоретической физики. Соответственно, состояния Вселенной, предшествующие данному состоянию расширяющейся Вселенной Фридмана, можно исследовать методами современной теории поля теоретической физики. В частности, тензор энергии импульса материальной среды, т.е. правую сторону уравнения Эйнштейна, можно написать как тензор энергии импульса спинорного поля в гравитационном поле.

§ 1. Теория гравитационной плазмы (гравиплазмы)

П1. Постановка вопроса. Состояние Вселенной, предшествующее пространству Фридмана, т.е. второй период состояния Вселенной в стандартной, т.н.,"горячей модели Вселенной", в виде плазмы из свободных фермионов и фотонов, как уже было сказано, является типичным объектом исследования современной теории поля теоретической физики. Соответственно, методами современной теория поля можно подробно исследовать это состояние Вселенной. В частности, тензор энергии импульса свободного Ферми-газа, в соответствии с современными представлениями теория поля, записать как тензор энергии импульса спинорного поля в гравитационном поле. При этом, сами спиноры подчиняются уравнению Дирака при наличии гравитационного поля, т.е.уравнению Фока-Иваненко.

ISSN 1512-1461

Таким образом, для исследования состояния Вселенной в стадии плазмы из свободных фермионов и фотонов получаем, с точки зрения современной теория поля, самую общую и корректную систему уравнений.
Результат исследования указанной системы уравнений и дается в данной работе. Основным результатом этого исследования является утверждение, что состояния Вселенной, предшествующие пространству Фридмана, т.е. состоянию Вселенной в виде плазмы из свободных фермионов и фотонов, не расширяются и не сжимаются, со всеми последующими выводами из этого утверждения.
Следует подчеркнуть,что в случае уравнения Эйнштейна с тензором тензора энергии импульса идиальной житкости из уравнения Эйнштейна определяются как метрический тензор так и скорости и плотность материи входящие в выражение тензора энергии импульса идиальной житкости. При этом, скорость расширения пространства идиальной житкости с однородности плотности, по закону Хаббла, является решением уравнения неразривности в ньютоновском приближение и является следствием пространственной однородности плотности идиальной житкости. [6]
В случае гравиплазми из уравнения Эйнштейна определяется только метрический тензор, что касается скорости и плотность материи входящие в выражение тензора энергии импульса гравиплазми, то ани польностью определяются из уравнения Дирака. При этом, скорости постоянние и плотность материи не является однородной.

П2. Уравнение Эйнштейна в случае гравиплазмы.

Уравнение Эйнштейна имеет стандартный вид (λ - т.н. космологическая постоянная):[4] [7]

$$R_{\mu\nu} - (R/2 - \lambda)\, g_{\mu\nu} = -æ\, (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{эл}), \qquad (1.1)$$

где

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\,, \qquad æ = 8пк/c^4 = 2{,}079\ 10^{-48} сек^2/см.\ гр$$

$T_{\mu\nu}$ - тензор энергии импульса фермионного газа (спинорного поля), $T_{\mu\nu}^{эл}$ -тензор энергии импульса фотонного газа.
Решения уравнения Эйнштейна будем искать в виде

$$g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(\sigma),\ \ \sigma = x^\mu \kappa_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu \kappa^\nu\ ,\ \eta^{\mu\nu} = (- - - +\ ) = (1,2,3,4)$$
$$x_\mu\,(x,y,.z,t).,\ \kappa_\mu\,(k_1,k_2,k_3,\omega),\ \ \kappa^\mu\ \kappa_\mu = -k^2 + \omega^2 \qquad (1.2)$$
$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, d\,x^\mu\, d\,x^\nu$$

Функцию $f_{\mu\nu}(\sigma)$ будем искать среди конформно-плоских метрик в виде

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} f(\sigma),\ \ g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} f(\sigma)^{-1},\ \ g = f(\sigma)^4 C_0,$$
$$C_0 = \mathrm{Det}\ \eta_{\mu\nu} = -1,\ (-C_0)^{1/2} = -1\ ,$$
$$ds^2 = f(\sigma)\,\eta_{\mu\nu}\, d\,x^\mu\, d\,x^\nu \qquad (1.3)$$

$\eta_{\mu\nu}$ - метрический тензор пространства Минковского.
Задачу Фридмана в конформно-плоском пространствеи при λ=0 исследовал Фок[8].
При $f(\sigma)=1$ имеем пространство Минковского, при $f(\sigma)>0$ - пространство временно-подобных траекторий, при $f(\sigma)<0$ пространство пространственно-подобных траекторий.
При этом имеем

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\Gamma^\gamma{}_{\lambda\gamma} - \Gamma^\gamma{}_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\gamma} \qquad (1.4)$$
$$\Gamma_{\mu,\nu\lambda} = (1/2)(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\nu\lambda}) = \Omega_{\mu,\nu\lambda} f(\sigma)'$$

ISSN 1512-1461

$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = (1/2)\, g^{\mu\gamma}(\partial_{\lambda} g_{\gamma\nu} + \partial_{\nu} g_{\gamma\lambda} - \partial_{\gamma} g_{\nu\lambda}) = \Omega^{\mu}{}_{\nu\lambda}\, (\ln f(\sigma))'$ (1.5)
Где
$\Omega_{\mu,\nu\lambda} = (1/2)(\eta_{\mu\nu} k_{\lambda} + \eta_{\mu\lambda} k_{\nu} - \eta_{\nu\lambda} k_{\mu})$
$\Omega^{\mu}{}_{\nu\lambda} = (1/2)\, \eta^{\mu\gamma}(\eta_{\gamma\nu} k_{\lambda} + \eta_{\gamma\lambda} k_{\nu} - \eta_{\nu\lambda} k_{\gamma}) =$ (1.6)
$= (1/2)(\delta^{\mu}{}_{\nu} k_{\lambda} + \delta^{\mu}{}_{\lambda} k_{\nu} - \eta_{\nu\lambda} k^{\mu})$
$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\lambda\gamma} - \Gamma^{\gamma}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\gamma} = B_{\mu\nu}[(\ln f(\sigma))']^2$ (1.7)

Введем

$A_{\mu\nu} = \Omega^{\lambda}{}_{\mu\nu} k_{\lambda} - \Omega^{\lambda}{}_{\mu\lambda} k_{\nu} = -k_{\mu} k_{\nu} - (1/2)\, k^{\lambda} k_{\lambda}\, \eta_{\mu\nu}$
$a = \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = -3\, k^{\lambda} k_{\lambda}$
$B_{\mu\nu} = \Omega^{\lambda}{}_{\mu\nu}\Omega^{\gamma}{}_{\lambda\gamma} - \Omega^{\gamma}{}_{\mu\lambda}\Omega^{\lambda}{}_{\nu\gamma} = (1/2)(k_{\mu} k_{\nu} - k^{\lambda} k_{\lambda}\, \eta_{\mu\nu})$
$b = \eta^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = -(3/2)\, k^{\lambda} k_{\lambda}$ (1.8)
$f(\sigma)' = df(\sigma)/d\sigma$

Соответственно, $R_{\mu\nu}$ примет вид:

$R_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\, (\ln f(\sigma))'' + B_{\mu\nu}[(\ln f(\sigma))']^2$ (1.9)

Введем обозначения

$(\ln f(\sigma))' = W(\sigma)', \quad W(\sigma) = \ln f(\sigma) + \delta,$
$f(\sigma) = \exp[W(\sigma) - \delta]$ (1.10)

Тогда $R_{\mu\nu}$ запишется в виде

$R_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\, W(\sigma)'' + B_{\mu\nu}\, W(\sigma)'^{\,2}$
$A_{\mu\nu} = -k_{\mu} k_{\nu} - (1/2)\, k^{\lambda} k_{\lambda}\, \eta_{\mu\nu},$
$B_{\mu\nu} = (1/2)(k_{\mu} k_{\nu} - k^{\lambda} k_{\lambda}\, \eta_{\mu\nu}),$ (1.11)

При этом,

$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = (a\, W(\sigma)'' + b\, W(\sigma)'^{2})\, f(\sigma)^{-1}$ (1.12)
где
$k^{\lambda} k_{\lambda} = (\omega^2 - k^2) = k_0^{*2}$
$a = -3\, (\omega^2 - k^2) = -3\, k_0^{*2}$,
$b = -(3/2)\, (\omega^2 - k^2) = -(3/2)\, k_0^{*2}$ (1.13)

Уравнение Эйнштейна (1.1) теперь примет вид

$[A_{\mu\nu} W(\sigma)'' + B_{\mu\nu} W(\sigma)'^2] - \{[(aW(\sigma)'' + bW(\sigma)'^2)]\, f(\sigma)^{-1}\}\, g_{\mu\nu}/2 =$
$= -[\lambda\, g_{\mu\nu} + æ\, (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}{}^{эл})]$ (1.1.4)
Или в виде

$[A_{\mu\nu} - (1/2)\, a f(\sigma)^{-1} g_{\mu\nu}]\, W(\sigma)'' + [B_{\mu\nu} - (1/2)\, a f(\sigma)^{-1} g_{\mu\nu}]\, W(\sigma)'^2 =$
$= -[\lambda\, g_{\mu\nu} + æ\, (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}{}^{эл})]$ (1.15)
где
$[A_{\mu\nu} - (1/2)\, a f(\sigma)^{-1} g_{\mu\nu}] = -k_{\mu} k_{\nu} + k_0^{*2}\, \eta_{\mu\nu}$
$[B_{\mu\nu} - (1/2)\, a f(\sigma)^{-1} g_{\mu\nu}] = (1/2)[k_{\mu} k_{\nu} + (1/2)\, k_0^{*2}\, \eta_{\mu\nu}]$ (1.16)

ISSN 1512-1461

С учетом (1.16) уравнение (1.15) можно представить в виде

$$[-k_\mu k_\nu+k_0^{*2}\eta_{\mu\nu}]\,W(\sigma)''+(1/2)[k_\mu k_\nu+(1/2)\;k_0^{*2}\eta_{\mu\nu}]\,W(\sigma)'^2= = -[\lambda\, g_{\mu\nu}+æ(T_{\mu\nu}+\mathbf{T}_{\mu\nu}^{эл})] \quad (1.17)$$

Или, окончательно, в виде:

$$k_\mu k_\nu[W(\sigma)''-(1/2)\,W(\sigma)'^2]-k_0^{*2}\eta_{\mu\nu}[W(\sigma)''+(1/4)\,W(\sigma)'^2]= =[\lambda f(\sigma)\,\eta_{\mu\nu}+æ(T_{\mu\nu}+T_{\mu\nu}^{эл})] \quad (1.18)$$

Если воспользоваться соотношением

$$R-4\lambda=æ\,f(\sigma)^{-1}\,T_0\,,\quad T_0=\eta^{\mu\nu}\,T_{\mu\nu}\,.,\;\eta^{\mu\nu}\,T_{\mu\nu}^{эл}=0 \quad (1.19)$$

где

$$T=g^{\mu\nu}\,T_{\mu\nu}=f(\sigma)^{-1}\,\eta^{\mu\nu}\,T_{\mu\nu}=f(\sigma)^{-1}T_0 \quad (1.20)$$

то получаем

$$R=4[\lambda+(1/4)\,æ\,f(\sigma)^{-1}\,T_0\,], \quad (1.21)$$

которое после учета (1.12) примет вид

$$(a\,W(\sigma)''+b\,W(\sigma)'^2)\,f(\sigma)^{-1}=+4\,[\lambda+(1/4)\,æ\,f(\sigma)^{-1}\,T_0\,], \quad (1.22)$$

где

$$a=-3\,k^\lambda k_\lambda=-3\,(\omega^2-k^2),\quad b=-(3/2)\,k^\lambda k_\lambda=-(3/2)\,(\omega^2-k^2),$$
$$k^\lambda k_\lambda=\eta^{\mu\nu}\;k_\mu k_\nu=-k_n^2+\omega^2 \quad (1.22')$$

Или, окончательно, в виде

$$\mathbf{W(\sigma)''+(1/2)\,W(\sigma)'^2=-(4/3)\,[\lambda_0 f(\sigma)+(1/4)\,æ_0\,T_0\,],} \quad (1.23)$$
$$\lambda_0=\lambda/(\omega^2-k^2),\quad æ_0=æ/(\omega^2-k^2) \quad (1.24)$$

Уравнение(1.23) после учета (1.10) можно представить и в виде

$$\mathbf{f(\sigma)f(\sigma)''-(1/2)\,f(\sigma)'^2=-(4/3)\,[\lambda_0 f(\sigma)^3+(1/4)\,æ_0\,T_0 f(\sigma)^2\,],} \quad (1.25)$$

Уравнение (1.23) будем называть **первым уравнением гравиплазмы**
Уравнение (1.23) можно получить из (1.18), если последнее
свертывать по $\eta^{\mu\nu}$.
Если уравнение (1.23) подставить в (1.18), то получаем уравнение

$$(-k_\mu k_\nu+k_0^{*2}\eta_{\mu\nu}/4)\,W(\sigma)'^2=\lambda f(\sigma)\,[\eta_{\mu\nu}+(4/3\,k_0^{*2})(k_\mu k_\nu-k_0^{*2}\eta_{\mu\nu})]+$$
$$+æ\,[\,T_{\mu\nu}+(1/3\,k_0^{*2})(k_\mu k_\nu-k_0^{*2}\eta_{\mu\nu})\,T_0\,]+æ\,T'^{эл}_{\mu\nu}, \quad (1.26)$$

$$\eta^{\mu\nu}\,T'^{эл}_{\mu\nu}=0,$$

Уравнение (1.26) будем называть **вторым уравнением гравиплазмы**
Уравнение (1.26) содержит гравитационное поле $f(\sigma)$, тензор энергии–импульса Ферми-газа $T_{\mu\nu}$ и тензор энергии–импульса электромагнитного поля $T'^{эл}_{\mu\nu}$, которое, как уже было сказано, вследствие условия $\eta^{\mu\nu}T'^{эл}_{\mu\nu}=0$, не вносит вклада в уравнение (1.23). Так как $f(\sigma)$ определяется из (1.25), кроме того, предполагается, что тензор энергии–импульса

ISSN 1512-1461

Ферми-газа $T_{\mu\nu}$ полностью определяется из теории Дирака в гравитационном поле, то, в результате, уравнение (1.26) превращается в уравнение для определения тензора энергии–импульса электромагнитного поля $T'^{эл}_{\mu\nu}$ в гравиплазме.

§ 2. Тензор энергии импульса спинорного поля с массой покоя $k_0 \neq 0$, при наличии гравитационного поля $-T_{\mu\nu}$

П1. Тензор энергии импульса спинорного поля.

$T_{\mu\nu}$ - тензор энергии импульса Ферми-газа (спинорного поля) в уравнении (1.1) представляет собой сумму тензоров энергии импульса протонов и электронов. Будем считать систему электронейтральной как в целом, так и локально, в космологических масштабах. Так как масса протона в 10^3 раза больше массы электрона, то тензором энергии импульса электронов, по сравнению с тензором энергии импульса протонов в уравнении (1.1) пренебрегаем. При этом, присутствие электронного газа в системе будем учитывать через требование электронейтральности системы.

Тензор энергии импульса спинорного поля с массой покоя $k_0 \neq 0$, при наличии гравитационного поля - $T_{\mu\nu}$, будем брать в виде [9]

$$T_{\mu\nu}=(i/4)(-g)^{1/2}\{(\psi^\wedge\gamma_\mu\psi_{,\nu}+\psi^\wedge\gamma_\nu\psi_{,\mu}) - -(\psi^\wedge_{,\nu}\gamma_\mu\psi+\psi^\wedge_{,\mu}\gamma_\nu\psi)\}+\Phi \qquad (.2.1)$$

$$\Phi=(i/4)(-g)^{1/2}\{(1/4)\psi^\wedge[(\gamma^\alpha\gamma_{\alpha;\mu}\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_{\alpha;\mu}\gamma^\alpha)+ +(\gamma^\alpha\gamma_{\alpha;\nu}\gamma_\mu-\gamma_\mu\gamma_{\alpha;\nu}\gamma^\alpha)]\psi\} \qquad (.2.2)$$

Вычисление будем вести в приближении

$$\gamma_{\alpha;\mu}=\gamma_{\alpha;\nu}=0 \quad \text{т.е.} \quad \Phi=0. \qquad (2.3)$$

В этом приближении имеем

$$T_{\mu\nu}=(i/4)(-g)^{1/2}\{(\psi^\wedge\gamma_\mu\psi_{,\nu}+\psi^\wedge\gamma_\nu\psi_{,\mu}) - -(\psi^\wedge_{,\nu}\gamma_\mu\psi+\psi^\wedge_{,\mu}\gamma_\nu\psi)\}, \qquad (2.4)$$

Зададим спиноры ψ и $\psi^\wedge$ в виде

$$\psi=\xi\,\rho(\sigma)^{1/2}\exp[-i\,\beta(\sigma)], \quad \psi^\wedge=\xi^\wedge\rho(\sigma)^{1/2}\exp[i\,\beta(\sigma)], \qquad (2.5)$$

где ξ , $\xi^\wedge$ - постоянные спиноры. При этом находим

$$\psi_{,\nu}= k_\nu\,\xi\,\rho(\sigma)^{1/2}[-i\,\beta(\sigma)'+\rho'/2\rho]\exp(-i\,\beta(\sigma)),$$

$$(\psi^\wedge\gamma_\mu\psi_{,\nu})= \rho(\sigma)[-i\,\beta(\sigma)'+\rho'/2\rho](\xi^\wedge\gamma_\mu k_\nu\xi) \qquad (.2.6)$$

$$\psi^\wedge_{,\nu}= k_\nu\,\xi\,\rho(\sigma)^{1/2}[i\,\beta(\sigma)'+\rho'/2\rho)]\exp(i\,\beta(\sigma)$$

$$(\psi^\wedge_{,\nu}\gamma_\mu\psi)= \rho(\sigma)[i\,\beta(\sigma)'+\rho'/2\rho](\xi^\wedge\gamma_\mu k_\nu\xi) \qquad (.2.7)$$

$$(\psi^\wedge\gamma_\mu\psi_{,\nu}+\psi^\wedge\gamma_\nu\psi_{,\mu})=[\xi^\wedge(\gamma_\mu k_\nu+\gamma_\nu k_\mu)\xi]\,\rho(\sigma)[-i\,\beta(\sigma)'+\rho'/2\rho]$$

$$(\psi^\wedge_{,\nu}\gamma_\mu\psi+\psi^\wedge_{,\mu}\gamma_\nu\psi)\}=[\xi^\wedge(\gamma_\mu k_\nu+\gamma_\nu k_\mu)\xi]\,\rho(\sigma)[i\,\beta(\sigma)'+\rho'/2\rho]$$

$$\{(\psi^\wedge\gamma_\mu\psi_{,\nu}+\psi^\wedge\gamma_\nu\psi_{,\mu}) -(\psi^\wedge_{,\nu}\gamma_\mu\psi+\psi^\wedge_{,\mu}\gamma_\nu\psi)\}=$$

ISSN 1512-1461

$$= -2\, i\, [\xi\hat{}(\gamma_\mu k_\nu + \gamma_\nu k_\mu)\, \xi\,]\, \beta(\sigma)'\, \rho(\sigma), \qquad (.2.8)$$

Учитывая (2.5) -(2.8), из (2.4) получаем

$$T_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}\, f(\sigma)^2\, \beta(\sigma)'\, \rho\ , \qquad (2.9)$$
$$C_{\mu\nu} = (1/2)\, [\, \xi\hat{}(\gamma_\mu k_\nu + \gamma_\nu k_\mu)\, \xi] \qquad (2.10)$$

Введем

$$T_0 = \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = C_\mu{}^\mu f(\sigma)^2\, \beta(\sigma)'\, \rho\ , \qquad (2.11)$$
$$C_\mu{}^\mu = \eta^{\mu\nu}(1/2)\, [\, \xi\hat{}(\gamma_\mu k_\nu + \gamma_\nu k_\mu)\, \xi] = (\xi\hat{}\gamma_\mu k^\mu\, \xi) = k^\mu\, (\xi\hat{}\gamma_\mu\, \xi) \qquad (2.12)$$

При этом нормировка имеет вид [10]

$$(\xi\hat{}\gamma_\mu\, \xi) = (k_\mu / k^*{}_0)\varepsilon(E), \quad (\xi\hat{}\gamma^\mu\, \xi) = (k^\mu / k^*{}_0)\varepsilon(E), \qquad (2.13)$$

$$k^\mu k_\mu = \omega^2 - k^2 = k^*{}_0{}^2 \qquad (2.14)$$

$$C_{\mu\nu} = \varepsilon(E)(\, k_\mu k_\nu\,)/\, k^*{}_0\ , \quad C_\mu{}^\nu = \varepsilon(E)\, (\, k_\mu k^\nu\,)/\, k^*{}_0$$
$$C_\mu{}^\mu = \varepsilon(E)\, (\, k_\mu k^\mu\,)/\, k^*{}_0 = \varepsilon(E)\, k^*{}_0 \qquad (2.15)$$

Таким образом, имеем

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon(E)(\, k_\mu k_\nu\,)/\, k^*{}_0)[\, f(\sigma)^2\, \beta(\sigma)'\, \rho]$$
$$T_\mu{}^\nu = \varepsilon(E)(\, k_\mu k^\nu)/\, k^*{}_0)\, [\, f(\sigma)^2\, \beta(\sigma)'\, \rho]$$
$$T_\mu{}^\mu = \varepsilon(E)\, k^*{}_0\, [\, f(\sigma)^2\, \beta(\sigma)'\, \rho]$$
$$T_4{}^4 = \varepsilon(E)(\, k_4 k^4\,)/\, k^*{}_0)\, [\, f(\sigma)^2\, \beta(\sigma)'\, \rho]$$
$$T_n{}^n = \varepsilon(E)(\, k_n k^n)/\, k^*{}_0)\, [\, f(\sigma)^2\, \beta(\sigma)'\, \rho] \qquad (.2.16)$$

Если учесть, что

$$T_4{}^4 = \varepsilon(E)\, \omega^2/\, k^*{}_0)\, [\, f(\sigma)^2\, \beta(\sigma)'\, \rho] = \varepsilon_0$$
$$T_n{}^n = -\varepsilon(E)\, k^2/\, k^*{}_0)\, [\, f(\sigma)^2\, \beta(\sigma)'\, \rho] = -3p \qquad (2.17)$$

где p-давление, ε_0 - энергия системы, то получим

$$(T_n{}^n/\, T_4{}^4) = -3p/\, \varepsilon_0 = -\, k^2/\, \omega^2\ , \quad p = (\, k^2/\, \omega^2)\, (\varepsilon_0/3)$$
$$k_4 = \omega, \quad k = (\, k_n{}^2)^{1/2}\ . \qquad (2.17')$$

При этом имеем

$$æ_0 T_0 = æ_0 T_\mu{}^\mu = \varepsilon(E)\, æ_0\, k^*{}_0\, [\, f(\sigma)^2\, \beta(\sigma)'\, \rho] \qquad (2.18)$$

Уравнение Эйнштейна (1.23) после учёта (2.17) примет вид

$$W(\sigma)'' + (1/12)\, W(\sigma)'^2 = -(\, 4/3)\, \{\lambda_0 f(\sigma) + (1/4)\, \varepsilon(E)\, æ_0 k^*{}_0\, [\, f(\sigma)^2\, \beta(\sigma)'\, \rho]\},$$
$$\lambda_0 = \lambda/(\omega^2 - k^2), \quad æ_0 = æ/(\omega^2 - k^2) \qquad (2.19)$$

Конкретный вид $\beta'(\sigma)$ и $\rho(\sigma)$ следует определить из уравнения Дирака.

ISSN 1512-1461

П2 Уравнение Дирака при наличии гравитационного поля.

В качестве уравнения Дирака в конформно-плоском пространстве при наличии гравитационного поля воспользуемся уравнением Фока-Иваненко[11]

$\{\sum_\mu \alpha_\mu H_\mu^{-1} \partial_\mu [1+(1/2)\ln H^{-1}{}_\mu (-g)^{1/2}]+ik_0 \alpha_0\} \psi =0$, $\mu=1,2,3,4$ (2.22)
где
$\alpha_n \alpha_m+ \alpha_m \alpha_n=2\delta_{nm}, \alpha_n \rho_3= \rho_3\alpha_n, \rho_3^2 =1, \alpha_\mu(\alpha_n,I), \alpha_0=\rho_3$ – (2.23)

т.н. матрицы Дирака. При этом

$ds^2=\sum_\mu e_\mu H_\mu^2 dx_\mu{}^2=\sum_\mu g^{\mu\mu}dx_\mu^2 =f(\sigma)^{-1} \eta^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$
$e_n=-1,e_4=1, \eta_{\mu\nu} =(\eta_{nn}=-1, \eta_{44} =1,)$
$g_{\mu\nu} = f(\sigma) \eta_{\mu\nu}, g^{\mu\nu} = f(\sigma)^{-1} \eta^{\mu\nu,} (-g)= f(\sigma)^4$ (2.24)

Таким образом, имеем [9]

$g_{11}=- f(\sigma)., g_{22''}=-f(\sigma) , g_{33}=-f(\sigma) , g_{44} = f(\sigma)$
$g^{11}=- f(\sigma)^{-1}., g^{22}=-f(\sigma)^{-1} , g^{33}= -f(\sigma)^{--1} ,g^{44}=f(\sigma)^{-1-}$
$H_1= H_2= H_3= H_4= \varepsilon_1 f(\sigma)^{-1/2} . \varepsilon_1=\pm1$
$[1+(1/2)\ln H^{-1}{}_\mu (-g)^{1/2}]= [1+(1/2)\ln \varepsilon_1 f(\sigma)^{3/2}]$ (2.25)

В частности, находим

$(d/d\sigma) [1+(1/2)\ln \varepsilon_1 f(\sigma)^{3/2}]\psi =[1+(1/2)\ln\varepsilon f(\sigma)^{3/2}]\psi_\sigma+(3/4)(f(\sigma)'/f(\sigma)) \psi=$
$=\{[1+(1/2)\ln\varepsilon_1 f(\sigma)^{3/2}][i\beta'(\sigma)+$
$+(1/2)(\rho'/ \rho)]+(3/4)(f(\sigma)'/f(\sigma))\}\psi=\Omega\psi,$ (2.26)

$i\Omega=\{[1+(1/2)\ln\varepsilon_1 f(\sigma)^{3/2}][i\beta'(\sigma)+(1/2)(\rho'/\rho]+(3/4)(f(\sigma)'/f(\sigma))\},$(2.27)
где
$\psi_\sigma=(d/d\sigma)[\rho^{1//2}\exp(i\beta(\sigma))\zeta]= [i\beta'(\sigma) +(1/2)(\rho'/ \rho]\psi, \quad f(\sigma)'.=(d/d\sigma)f(\sigma)$

Тогда уравнение (2.22) можно записать в виде

$\{[\alpha_n k^n \Omega + \alpha_0 k_0 \varepsilon_1 f(\sigma)^{1/2}]+k^4 \Omega \}\psi =0$ (2.28)

Перемножая на оператор

$\{-[\alpha_n k^n \Omega + \alpha_0 k_0 \varepsilon_1 f(\sigma)^{1/2}] +k^4 \Omega \}$ (2.29)

находим

$(-k_n^2+ k_4^2) \Omega^2 - k_0^2 f(\sigma)=0$
$\Omega^2= k_0^2 f(\sigma) / (k_4^2- k_n^2),$ (2.30)

Учитывая, что $k_0^{*2} = (k_4^2- k_n^2)$, получаем

$\Omega^2= (k_0/k_0^*)^2 f(\sigma),$
$\Omega=(k_0/k_0^*) \varepsilon_1 f(\sigma)^{1/2-}$ (2.31)

ISSN 1512-1461

Из уравнения (2.31)для $i\beta'(\sigma)$ получаем

$$i\beta'(\sigma)[1+(1/2)\ln\varepsilon_1 f(\sigma)^{3/2}]+[1+(1/2)\ln\varepsilon_1 f(\sigma)^{3/2}](1/2)(\rho'/\rho) + +(3/4)(f(\sigma)'/f(\sigma))= i(k_0/k_0^*)\ \varepsilon_1 f(\sigma)^{1/2} \quad , \quad (2.32)$$

из которого для $\beta'(\sigma)$ находим

$$\beta'(\sigma)\ [1+(1/2)\ \ln\varepsilon_1 f(\sigma)^{3/2}] = (k_0/k_0^*)\ \varepsilon_1\ f(\sigma)^{1/2}$$
$$[1+(1/2)\ln\varepsilon_1 f(\sigma)^{3/2}](1/2)(\rho'/\rho) + (3/4)(f(\sigma)'/f(\sigma))=0 \qquad (2.33)$$

При этом

$$\beta'(\sigma)=(k_0/k_0^*)\ \varepsilon_1 f(\sigma)^{1/2}[1+(1/2)\ln\varepsilon_1\ f(\sigma)^{3/2}]^{-1} \qquad (2.34)$$

Из (2. 32) получаем уравнение для $(\rho'/\ \rho)$

$$[1+(1/2)\ln\varepsilon_1\ f(\sigma)^{3/2}](1/2)(\rho'/\rho)+(3/4)(f(\sigma)'/f(\sigma))=0\ ,$$
$$(1/2)(\rho'/\ \rho)=-\ (3/4)(f(\sigma)'/f(\sigma))\ [1+(1/2)\ln\ \varepsilon_1\ f(\sigma)^{3/2}]^{-1} \qquad (2.35)$$

И находим решение в виде

$$(\ln\ \rho^{1/2})'=-\ (1/2)\ (\ln\ f^{3/2}(\sigma))'/[1+(1/2)\ln\ \varepsilon_1\ f(\sigma)^{3/2}]$$
$$(\ln\ \rho^{1/2})'=\ -\ (\ln[1+(1/2)\ln\ \varepsilon_1\ f(\sigma)^{3/2}])\ '$$
$$\rho(\sigma) = \rho_0[1+(1/2)\ln\ \varepsilon_1\ f(\sigma)^{3/2}]^{-2} \qquad (2.36)$$

Уравнение (2.28) при учете (2.31) примет вид

$$\{[(\alpha_n k^n + k^4) +k_0^*\alpha_0\ \}\psi =0 \qquad (2.37)$$

$$\psi= \xi\ \rho(\sigma)^{1/2}\ \exp[-i\ \beta(\sigma)], \quad \psi^\wedge= \xi^\wedge\ \rho(\sigma)^{1/2}\ \exp[\ i\ \beta(\sigma)], \qquad (2.5')$$

$$(k_0/k_0^*)= \varepsilon_1\ f(\sigma)^{-1/2}[1+(1/2)\ \ln\varepsilon_1\ f(\sigma)^{3/2}]\ \beta'(\sigma) \qquad (2.34')$$

Как видим, кванты гравиплазмы с волновым вектором $(k_4^2-\ k_n^2)=k_0^{*2}$ подчиняются уравнению Дирака (2.37) , т.е. являются Ферми-полями.
Однако соответствующие ему спиноры(2.5') - сложные функции спиноров исходных фермионов и гравитационного поля гравиплазмы. Фермионный спектр возбуждения Ферми-жидкости впервые рассмотрел Ландау.[12.] .[13]
Из (2.34) и (2.36) получаем

$$\beta'(\sigma)\ \rho(\sigma) =(k_0/k_0^*)\ \rho_0\ [1+(1/2)\ln\ \varepsilon_1\ \ \boldsymbol{f(\sigma)^{3/2}}\ ]^{-3}\ \varepsilon_1\ \ f(\sigma)^{1//2}, \quad (2.38)$$

Таким образом, имеем

$$\beta'(\sigma)\ \rho(\sigma) =(k_0/k_0^*)\ \rho_0\ [1+(1/2)\ln\ \varepsilon_1 f(\sigma)^{3//2}\ ]^{-3}\ \varepsilon_1 f(\sigma)^{1/2}, \qquad (2.38')$$

$$\rho(\sigma) = \rho_0[1+(1/2)\ln\ \varepsilon_1\ f(\sigma)^{3/2}]^{-2}$$

Учтем, что
$$[1+(1/2)\ln\ \varepsilon_1\ f(\sigma)^{3/2}]= [1+(1/4)\ln\ \varepsilon_1^2\ f(\sigma)^3\ ]= [1+(^3/4)\ln\ \ f(\sigma)\ ]\ ^-$$

ISSN 1512-1461

и находим

$\rho(\sigma) = \rho_0 /[1+(3/4)\ln f(\sigma)]^{2}$
$\beta'(\sigma)= \varepsilon_1 (k_0/k_0^*) f(\sigma)^{1/2}[1+(3/4)\ln f(\sigma)]^{-1}$
$\beta'(\sigma)\, \rho(\sigma) =(k_0/k_0^*)\, \varepsilon_1\, \rho_0\, [1+(3/4)\ln f(\sigma)]^{-3} f(\sigma)^{1/2}$,

$T_{\mu\nu}= \varepsilon(E)\, \varepsilon_1\, (k_\mu k_\nu)/ k^{*}{}_0^{2}) k_0\rho_0 f(\sigma)^{5/2} Z_0$
$T_\mu{}^\nu= \varepsilon(E)\, \varepsilon_1\, ((k_\mu k^\nu)/ k^{*}{}_0^{2})\, k_0\, \rho_0\, f(\sigma)^{5/2} Z_0$
$T_\mu{}^\mu= \varepsilon(E)\, \varepsilon_1\, [k_0\, \rho_0\, f(\sigma)^{5/2} Z_0$
$T_4{}^4= \varepsilon(E)\, \varepsilon_1\, (k_4 k^4)/ k^{*}{}_0^{2})\, k_0\, \rho_0\, f(\sigma)^{5/2} Z_0$
$T_n{}^n= \varepsilon(E)\, \varepsilon_1 (k_n k^n)/ k^{*}{}_0^{2})\, k_0\rho_0\, f(\sigma)^{5/2} Z_0$

$$æ_0T_0 = æ_0T_\mu{}^\mu= \varepsilon(E)\, \varepsilon_1\, æ_0\, k_0\, \rho_0\, f(\sigma)^{5/2} Z_0 \qquad (2.39)$$
где
$$Z_0 =[1+(1/2)\ln f(\sigma)^{3/4}]^{-3} =[1+(3/4)\ln f(\sigma)]^{-3} \qquad (2.40)$$
$\rho(\sigma) = \rho_0 /[1+(3/4)\ln f(\sigma)]^2= \rho_0\, Z_0\, [1+(3/4)\ln f(\sigma)]$

В данном случае размерность $[æT_0]=$ см$^{-2}$ и $[k_0\, \rho_0] =$ эрг/см^3. Введем ρ_0*- плотность масс в единице объема $[\rho_0^*]=$гр/см^3 соотношением

$$k_0\rho_0 =c^2 \rho_0^*, \quad \rho_0=(c^2/ k_0)\, \rho_0^* \qquad (2.41)$$

$\rho(\sigma) = (c^2/ k_0)\, \rho_0^* /[1+(3/4)\ln f(\sigma)]^2=(c^2/ k_0)\, \rho_0^*\, Z_0[1+(3/4)\ln f(\sigma)]$

Тогда (2.39) запишется в виде

$T_{\mu\nu}= \varepsilon(E)\, \varepsilon_1\, (k_\mu k_\nu)/ k^{*}{}_0^{2})\, c^2\, \rho_0^*.\ f(\sigma)^{5/2} Z_0$
$T_\mu{}^\nu= \varepsilon(E)\, \varepsilon_1\, (k_\mu\, \eta^{\nu\lambda}\, k_\lambda)/ k^{*}{}_0^{2})\, c^2\, \rho_0^*\ f(\sigma)^{5/2} Z_0$
$T_\mu{}^\mu= \varepsilon(E)\, \varepsilon_1\, c^2\, \rho_0^*\ f(\sigma)^{5/2}\ Z_0$
$T_4{}^4= \varepsilon(E)\, \varepsilon_1\, (k_4 k^4)/ k^{*}{}_0^{2})\ c^2\, \rho_0 * f(\sigma)^{5/2} * Z_0$
$T_n{}^n= \varepsilon(E)\, \varepsilon_1\, (k_n k^n)/ k^{*}{}_0^{2})\, c^2\, \rho_0^*.\ f(\sigma)^{5/2}\ Z_0$

$$æ_0T_0 = æ_0T_\mu{}^\mu=\varepsilon(E)\, \varepsilon_1\, æ_0\, c^2\, \rho_0^*\, f(\sigma)^{5/2} Z_0 \qquad (2.42)$$

§ 3. Первое уравнение гравиплазмы и его точное волновое решение

Если в **первом уравнении гравиплазмы** (1.25) учесть полученное для $æ_0T_0$ выражение (2.42) то получаем

$$f(\sigma)f(\sigma)''-(1/2)f(\sigma)'^2= -(4/3)\{ \lambda_0 f(\sigma)^3 + A_0 f(\sigma)^{5/2} \}$$
$$A_0=(1/4)\, \varepsilon(E)\, \varepsilon_1\, æ_0\, \rho^* c^2 Z_0 , \quad \lambda_0= \lambda/(\omega^2- k^2), \qquad (3.1)$$
$$Z_0=[1+(3/4)\ln f(\sigma)]^{-3}$$

Кроме того, будем считать множитель $Z_0=[1+(3/4)\ln f(\sigma)]^{-3}$ медленно меняющейся функцией, и в первом приближении примем её за постоянную. При этом

$$\rho(\sigma)=(c^2/k_0)\rho_0^*/[1+(3/4)\ln f(\sigma)]^2=(c^2/k_0)\rho_0^* Z_0[1+(3/4)\ln f(\sigma)] \qquad (3.2)$$

ISSN 1512-1461

Уравнение (3.1) имеет решение в эллиптических функциях, однако сначала укажем некоторые другие интересные формы этого уравнения.

П1. Преобразование первого уравнения гравиплазмы (3.1)
С целью избавиться от дробной степени искомой функции в (3.1) ведем преобразование

$$f(\sigma)=\varphi^2, \qquad f(\sigma)'^{\,2} = 4\,\varphi^2\,\varphi'^{\,2}, \tag{3.3}$$
$$f(\sigma)f(\sigma)'' -(1/2)\, f(\sigma)'^{\,2} =2\,\varphi^3\,\varphi'' \tag{3.4}$$

В результате из (3.1) для φ находим уравнение вида

$$\varphi'' =-(2/3)\,\lambda_0\varphi^3 -(2A_0/3)\,\varphi^2 \tag{3.5}$$

После первой квадратуры уравнения (3.5) получаем

$$\varphi'^2 = -(1/3)\,\lambda_0\varphi^4 -(4/9)\,A_0\varphi^3 -C_1 \tag{3.6}$$

где C_1 - произвольная постоянная первой квадратуры.
Используя выражение φ'^2 из (3.3)

$$\varphi'^2=f(\sigma)'^{\,2}/4f(\sigma) \tag{3.7}$$

можно вернуться к функции $f(\sigma)$. В результате из (3.6) получаем

$$f(\sigma)'^{\,2} = -(4/3)\,\lambda_0 f(\sigma)^3 -(4/3)^2\,A_0\, f(\sigma)^{5/2} -4\,C_1 f(\sigma) \tag{3.8}$$

Взяв производную от (3.8), находим уравнение

$$f(\sigma)'' = -2\,\lambda_0 f(\sigma)^2 -(20/9)\,A_0\, f(\sigma)^{3/2} +C_1/2 \tag{3.9}$$

Если на основе (3.8) и (3.9) составить форму $f(\sigma)f(\sigma)'' -(1/2)\, f(\sigma)'^{\,2}$, то получим уравнение (3.1). Таким образом, уравнение (3.1) сводится к уравнению (3.8), и уравнение (3.8) дает первую квадратуру уравнения (3.1).

П2. Частный случай уравнения (3.1) со свойством масштабной инвариантности и точными решениями
Уравнение (3.1) имеет решение **в эллиптических функциях**, однако сначала рассмотрим частный случай уравнения (3.1), когда в нем второй член в правой стороне уравнения $-A_0 f(\sigma))^{5/2}$ - отсутствует($A_0=0$), т.е. имеем уравнение вида

$$f(\sigma)f(\sigma)'' -(1/2)\, f(\sigma)'^{\,2} =-(4/3)\,\lambda_0 f(\sigma)^3\,. \tag{3.10}$$

Уравнения (3.10) интересно тем, что оно обладает свойством масштабной инвариантности и, кроме того, допускает точные решения в эллиптических функциях [14][15].

1.Масштабная инвариантность уравнения (3.10).
Если ввести преобразование вида

$f(\sigma) =Af(\sigma')$. $\sigma'=b\sigma$, $b\neq 0$,

и учесть соотношения

ISSN 1512-1461

$df(\sigma)/d\sigma = A\, b\, df(\sigma')/d\sigma'$. $[df(\sigma)/d\sigma]^2 = A^2 b^2 [df(\sigma')/d\sigma']^2$
$d^2 f(\sigma)/d\sigma^2 = A\ b^2\, d^2 f(\sigma')/d\sigma'^2$..
$f(\sigma)\, d^2 f(\sigma)/d\sigma^2 = A^2 b^2 f(\sigma')\, d^2 f(\sigma')/d\sigma'^2$
$A^2 b^2 [f(\sigma')^2\, d^2 f(\sigma')/d\sigma'^2 - (1/2)\, d^2 f(\sigma')/d\sigma'^2] == - A^3\ (4/3)\, \lambda_0 f(\sigma')^3$

то прямой подстановкой этих соотношений в уравнение (3.10) находим, что уравнение (3.10) сохраняет свой вид при условии
$A = b^2$.
Соответственно, функция $f(\sigma)$ обладает свойством масштабной инвариантности в виде

$$f(\sigma) = b^2 f(b\sigma), \quad f(b\sigma) = b^{-2} f(\sigma) \qquad (3.11)$$

2. Точные решения уравнения (3.10)
Решение уравнение (3.10) будем искать в виде

$$f = \alpha + \gamma\, cn(\sigma)^2 \qquad (3.12)$$

Если учесть соотношения

$$cn(\sigma)'' = (2k_1^2 - 1)\, cn(\sigma) - 2k_1^2\, cn(\sigma)^3$$
$$cn(\sigma)'^2 = (1 - k_1^2) + (2k_1^2 - 1)\, cn(\sigma)^2 - k_1^2\, cn(\sigma)^4, \qquad (3.13)$$

то уравнение (3.10), после постановки в него (3.12), превращается в полином вида

$$C_0 + C_2\, cn(\sigma)^2 + C_4\, cn(\sigma)^4 + C_6\, cn(\sigma)^6 = 0 \qquad (3.14)$$

В результате возникает четыре уравнения:

1).$C_0 = 2\ \alpha\ \gamma(1 - k_1^2) + \alpha^2\, b_0 = 0$,
2).$C_2 = 4\ \alpha\ \gamma\ (2k_1^2 - 1) + 3\ \gamma\ \alpha^2\, b_0 = 0$,
3).$C_4 = -6\ \alpha\ \gamma\ k_1^2 + 2\ \gamma^2\ (2k_1^2 - 1) + 3\ \alpha\ \gamma^2\, b_0 = 0$,
4).$C_6 = -4\ \gamma^2\, k_1^2 + \gamma^3\, b_0 = 0$ (3.15)
$b_0 = (4/3)\, \lambda_0$,

Система (3.15) имеет несколько решений, т.е. нелинейное уравнение (3.10) имеет ветвящиеся решения. В частности
1)Первое решение при $\alpha = 0$,

$$f_1 = \gamma\, cn(\sigma)^2, \ k_1^2 = 1/2, \ \omega^2 - k^2 = k_0^{*2} = (2/3)\, \gamma\lambda \qquad (3.16)$$

Другие решения определятся из системы при $\alpha \neq 0$

1). $k_1^2 = 1 + x^2\, (\gamma\, b_0)/2$, $x = \alpha/\gamma$
2). $2k_1^2 = 1 - (3/4)\, x\, (\gamma\, b_0)$
3). $k_1^2 = [1 - (3/2)x\, (\gamma\, b_0)]/[2 - 3x]$
4). $k_1^2 = (\gamma\, b_0)/4$ (3.17)

Из равенства k_1^2 в 1) и 4) находим

$$(\gamma\, b_0) = 4/[1 - 2\, x^2], \ k_1^2 = 1/[1 - 2\, x^2], \qquad (3.18)$$

ISSN 1512-1461

Из равенства k_1^2 в 1) и 2) получаем

$x^2+(3/2)\,x\;+(1/2)=0$

с решениями

2) $x_2= -1/2,\quad k_1^2=2$
3) $x_3= -1\,,\quad k_1^2= -1$ (3.19)

Из 4) также получаем

$\omega^2 - k^2 =(\gamma\, b)/4\, k_1^2,\quad b_0 = b/\,(\omega^2 - k^2)$

Из равенства k_1^2 в 1) и 3) возникает ещё одно уравнение, из которого можно определить γ

$\gamma =[x^3-(2x/b_0)-(2/3b_0)]\,/[(2x^2/3) +x]$

В результате находим ещё два решения

2) $x_2= \alpha_2/\gamma_2 =-1/2\,,\quad \gamma_2=3/8 +5/b_0$
3) $x_3= \alpha_3/\gamma_3=-1,\quad \gamma_3=3+8/b_0\,,$ (3.20)

Учитывая (3.19), для параметров решения получаем

2) $\alpha_2=-1/2\,,\ \gamma_2=1\,,\ k_1^2= 2,\ \omega^2 - k^2 = (k_0^{*2=})_2 = b/8 = \lambda/6$
3) $\alpha_3=-1,\quad \gamma_3=1\,,\ k_1^2=-1\,,\ \omega^2 - k^2 = (k_0^{*2=})_3= -b/4 =- \lambda/3$ (3.21)

Таким образом, получаем решения

$f_2 = -1/2+ cn(\sigma)^2$, $\mathbf{k_1^2=2,}$ $\omega^2- k^2 = (k_0^{*2=})_2 =b/8 = \lambda/6$
$f_3 = -1 + cn(\sigma)^2$, $\mathbf{k_1^2=-1,}$ $\omega^2- k^2 = ((k_0^{*2=})_3 =- b/4 = -\lambda/3$ (3.22)

В данном случае параметры решения полностью определены. Однако, ввиду масштабной инвариантности уравнения, масштаб "b" в (3.11) выступает в качестве свободного параметра в решении.

3. Специфические свойства волновых решений уравнения гравиплазмы (3.10) .

Эллиптические функции - двояко периодические функции. В случае действительных параметров решения можно ограничиться только одним периодом решения. При этом, когда главный модуль эллиптических функций $\kappa_1^2<1$, поведение эллиптических функций близко к поведению тригонометрических функций. Однако, полученные выше решения этому условию не удовлетворяют. В частности, в случае полученных решений (3.16) и (3.22)

$f_1 =\gamma\, cn(\sigma)^2$, $\mathbf{k_1^2=1/2,}$ $\omega^2- k^2 = k_0^{*2} =(2/3)\, \boldsymbol{\gamma\lambda}$
$f_2 = -1/2+ cn(\sigma)^2$, $\mathbf{k_1^2=2,}$ $\omega^2- k^2 = (k_0^{*2})_2 =b/8 = \lambda/6$
$f_3 = -1 + cn(\sigma)^2$, $\mathbf{k_1^2=-1,}$ $\omega^2- k^2 = ((k_0^{*2})_3 = -b/4 = -\lambda/3$ (3.23)

ISSN 1512-1461

в первом решении f_1 параметр $\gamma\lambda$ не всегда положителен. При этом параметр γ выступает в качестве масштабного фактора. Введем обозначение $\lambda = \varepsilon^* \lambda_1$, $\lambda_1>0$ и решение представим в виде

$$f_1 = \gamma\, \mathrm{cn}[(\varepsilon^* \boldsymbol{\gamma})^{\mathbf{1/2}} \sigma\,]^2 \;, \mathbf{k_1^2=1/2,} \quad \omega^2 - k^2 = k_0^{*2} = (2/3)\lambda_1 \qquad (3.24)$$

Согласно (3.11) получаем

$$f_1 = \varepsilon^*\, \mathrm{cn}(\sigma)^2 \;, \mathbf{k_1^2=1/2,} \quad \omega^2 - k^2 = k_0^{*2} = (2/3)\, \boldsymbol{\lambda_1} \qquad (3.25)$$

В случае второго решения f_2 - главный модуль, $\kappa_1^2>1$ и необходимо его преобразовать к виду с $\kappa_1^2<1$. Для этого проведем преобразование параметров эллиптической функции в виде

$$k_1 \rightarrow k_1^* = 1/\, k_1 = 1/2^{1/2,} \qquad \sigma \rightarrow \sigma^* = \sigma/\, k_1^* = k_1\, \sigma \;= 2^{1/2}\sigma$$

При этом функция преобразуется в виде

$$\mathrm{cn}\,(\sigma, k_1^2=2) = \mathrm{dn}(2^{1/2}\sigma,\, k_1^{*2}=1/2)$$

и получаем

$$f_2 = [-1/2 + \mathrm{dn}(2^{1/2}\sigma,,\, k_1^{*2}=1/2)^2\,]$$
$$\omega^2 - k^2 = (k_0^{*2})_2 = b/8 = \lambda/6 \qquad (3.26)$$

Представив λ в виде $\lambda = \varepsilon^* \lambda_1$, $\lambda_1>0$ и, согласно (3.11), решение f_2 можно представить в виде

$$f_2 = \varepsilon^*\, 2^{-1}\, [-1/2 + \mathrm{dn}(\sigma,\, k_1^{*2}=1/2)^2\,]$$
$$\omega^2 - k^2 = (k_0^{*2})_2 = \lambda_1/6 \qquad (3.27)$$

В случае третьего решения - f_3 - проведем преобразование параметров эллиптической функции в виде

$$k_1 \rightarrow k_1^* = 1/\, k_1' = 1/2^{1/2}, \quad \sigma \;\rightarrow \sigma^* = i\, \sigma/\, k_1^* = i\, 2^{1/2}\sigma$$

При этом функция преобразуется в виде

$$\mathrm{cn}\,(\sigma, k_1^2=-1) = \mathrm{dn}(i\, 2^{1/2}\sigma,\, k_1^{*2}=1/2)\, /\, \mathrm{cn}(i\, 2^{1/2}\sigma,\, k_1^{*2}=1/2)$$

Так как при этом

$$\omega^2 - k^2 = ((k_0^{*2})_3 = - b/4 = -\lambda/3$$

то аргумент $i\sigma = \sigma_1$ соответствует случаю

$$(\omega^2 - k^2)_1 = ((k_0^{*2})_3 = \lambda/3 = \varepsilon^*\, \lambda_1 /3$$

И получаем

ISSN 1512-1461

$cn\,(\sigma,k_1^2=-1) = dn(2^{1/2}\sigma_1,\ k_1^{*2}=1/2) / cn(2^{1/2}\sigma_1\,,k_1^{*2}=1/2)$

Используя свойство масштабной инвариантности решения (3.11), окончательно получаем

$$f_3 = \varepsilon^*\, 2^{-1}\ \{-1 +[\ dn\,(\sigma,\, k_1^{*2}=1/2) / cn(\sigma,\, k_1^{*2}=1/2)\ ]^2\ \}$$
$$\omega^2\text{-}\ k^2 = ((k_0^{*2=})_3 = = \lambda_1 /3 \qquad (3.28)$$

Таким образом, окончательно получаем следующие три ветви решения

$$f_1 = \varepsilon^*\, cn(\sigma)^2\ \ ,\mathbf{k_1^2=1/2,} \qquad \omega^2\text{-}\ k^2 = (k_0^{*2})_1 =(2\lambda_1/3)$$
$$f_2 = \varepsilon^*\, 2^{-1}\,[-1/2 + dn(\sigma,\, k_1^{*2}=1/2)^2\,], \qquad \omega^2\text{-}\ k^2 = (k_0^{*2=})_2 = \lambda_1/6$$
$$f_3 = \varepsilon^*\, 2^{-1}\ \{-1 +[\ dn\,(\sigma,\, k_1^{*2}=1/2) / cn(\sigma,\, k_1^{*2}=1/2)\ ]^2\ \}$$
$$\omega^2\text{-}\ k^2 =(k_0^{*2=})_3 =\lambda_1/3, \quad (3.29)$$

Как видим

$$(k_0^{*2})_2 = \lambda_1/6 \quad ,\ (k_0^{*2=})_3 = 2\ (k_0^{*2})_2, \quad (k_0^{*2})_1 =4\ (k_0^{*2})_2 \qquad (3.30)$$

Однако, полученные решения применимы не при любом значении аргумента. Так, например, имеем $(\,f(\,K))_1 =(\,f(\,K))_2 = 0$, $(\,f(\,K))_3 =\infty$

4. Характерные размеры системы.

Полученные решения имеют период 2К и дают возможность определить длину соответствующей периодической решетки. Так как в данной формулировке ω имеет размерность см$^{-1}$, то при k=0 (система покоя k_0^*) можно написать

$$\omega L=2K(45^0) =2*1{,}854=\mathbf{3{,}71}, \quad k_1 =(0{,}5)^{1/2}=0{,}71=\sin 45^0 \qquad (3.31)$$
$$\mathbf{3{,}708=3{,}71}$$

и для длины соответствующей решетки L получаем

$$L=3{,}71/k_0^* \qquad (3.32)$$

Так как $(k_0^{*2})_2 =\lambda_1/6$, $(k_0^{*2})_3 =2(k_0^{*2})_2$, $(k_0^{*2})_1=4(k_0^{*2})_2$, то получаем

$$L_2=3{,}71/(k_0^*)_2=2{,}45 *3{,}81/\lambda_1^{1/2}=9{,}10/\ \lambda_1^{1/2}$$
$$L_3= L_2/2^{1/2}\ ,\ \ L_1= L_2/2 \qquad (3.33)$$

Если для λ_1 принять значение, которое фигурирует в литературе

$$\lambda_1=10^{-58}\,\text{см}^{-2},\ \ \lambda_1^{1/2} =10^{-29}\ \text{см}^{-1}, \qquad (3.34)$$

то находим

$$(k_0^*)_2 = (\lambda_1/6\ )^{1/2}= (1/2{,}45\ )10^{-29}\text{см}^{-1}=0{,}41*10^{-29}\text{см}^{-1}$$
$$(k_0^*)_3= 0{,}58*10^{-29}\text{см}^{-1}\ ,\quad (k_0^*)_1= 0{,}82*10^{-29}\text{см}^{-1}\ , \qquad (3.35)$$

$$(m_G)_2=(h/2\pi c\,)(k_0^*)_2 =0{,}14*.10^{-66}\text{гр}$$
$$(m_G)_3=0{,}2\ *10^{-66}\text{гр}\ ,\ \ (m_G)_1=0{,}28\ *10^{-66}\text{гр} \qquad (3.36)$$

$$L_2=0{,}\ 91\ *10^{\ 28}\ \text{см}\ \ ,\ L_3=(0{,}\ 91\ /1{,}41)\ *10^{\ 28}\ \text{см},$$
$$L_1=0{,}\ 46\ *10^{\ 28}\ \text{см} \qquad (3.37)$$

ISSN 1512-1461

§ 4. Первое уравнение гравиплазмы и его приближенные волновые решения.

Полученные в $3 решения в эллиптических функциях являются точными решениями частного случая уравнения (3.1) в виде (3.10). Эти решения -периодические функции с периодом 2K, и они являются ограниченными функциями. Следовательно, существует среднее значение решения f_{cp} на интервале (0,2K) и можно ввести функцию $(f/f_{cp})^{1/2}$, которая будет мало отличаться от единицы. Предположим, что таким же свойством обладают и решения уравнения (3.1). На этом основании в уравнении (3.1) дробную степень нелинейности в $A_0 f(\sigma))^{5/2}$ подправим путем перемножения на $(f/f_{cp})^{1/2}$ и рассмотрим уравнение вида

$$f(\sigma)f(\sigma)'' -(1/2)\, f(\sigma)'^{\,2} = -(4/3)[\lambda_0 + B]\, f(\sigma)^3 \qquad (4.1)$$

$$B = (1/4)æ_0\, \varepsilon(E)\, \varepsilon_1\, c^2 \rho^* Z_1, \qquad \rho^*=\text{const}$$

$$Z_1=(f_{cp})^{-1/2}[1+(3/4)\ln f_{cp}]^{-3} \qquad (4.2)$$

Теперь можно использовать полученные в §3 решения, заменяя в них постоянную (4/3) λ_0 на постоянную[(4/3)[λ_0 + B]. Однако теперь нас интересует случай λ_0 =0, и, соответственно, рассмотрим уравнение

$$f(\sigma)f(\sigma)'' -(1/2)\, f(\sigma)'^{\,2} = -(4/3)B\, f(\sigma)^3 \qquad (4.3)$$

Решениями этого уравнения являются функции **(3.29)** где, однако, теперь постоянную [(4/3)λ_0] следует заменить на постоянную [(4/3)B] = [(4/3)$B_0/(\omega^2- k^2)$], т.е. параметр λ заменен на $B_0 = (1/4)æ\, \varepsilon(E)\, \varepsilon_1\, \rho^*\, c^2 Z_1$.
В результате получаем

$$f_1 = \mathrm{cn}(\sigma)^2\ ,\ \mathbf{k_1^2=1/2,} \qquad \omega^2- k^2 = (k_0^{*2})_1 = \mathbf{(2/3)}\, B_0$$
$$f_2 = 2^{-1} [-1/2 + \mathrm{dn}(\sigma, k_1^{*2}=1/2)^2]\ , \quad \omega^2- k^2 = (k_0^{*2})_2 = B_0/\mathbf{6}$$
$$f_3 =_1 2^{-1} \{-1 +[\mathrm{dn} (\sigma, k_1^{*2}=1/2) / \mathrm{cn}(\sigma, k_1^{*2}=1/2)]^2 \} \qquad (4.4)$$
$$B_0 = (1/4)æ\, \varepsilon(E)\, \varepsilon_1\, \rho^*\, c^2 Z_1, \quad \omega^2- k^2 = (k_0^{*2})_3 = B_0/3$$

Как видим

$$(k_0^{*2})_2 = B_0/\mathbf{6}\ ,\ (k_0^{*2})_3 = 2\, (k_0^{*2})_2,\quad (k_0^{*2})_1 =4\, (k_0^{*2})_2\ ,, \qquad (4.5)$$

Представим B_0 в виде

$$B_0= \varepsilon(E)\, \varepsilon_1\, \rho^*\, \Lambda\ ,\ \Lambda =(1/4)æ\ \ c^2 Z_1 \qquad (4.6)$$

И, соответственно, будем иметь

$$\omega^2- k^2 = (k_0^{*2})_2 = \varepsilon(E)\, \varepsilon_1\, \rho^*\Lambda /6$$
$$\omega^2- k^2 = (k_0^{*2})_3 = \varepsilon(E)\, \varepsilon_1\, \rho^*\, \Lambda /3$$
$$\omega^2- k^2 = (k_0^{*2})_1 = \varepsilon(E)\, \varepsilon_1\, \rho^*\, (2/3)\, \Lambda \qquad (4.7)$$

В случае $\rho^*\neq 0$ аргумент σ можно преобразовать к виду $\sigma= \rho^{*1/2}\, \sigma_1$ и решения представим в виде

$$f_1 = \mathrm{cn}(\rho^{*1/2}\ \sigma_1)^2\ ,\ \ \mathbf{k_1^2=1/2,}\ \ \omega^2- k^2 = (k_0^{*2})_1 = (2/3)\, \varepsilon(E)\, \varepsilon_1\ \ \rho^*\, \Lambda$$

ISSN 1512-1461

$f_2 = 2^{-1}$ $[-1/2 + dn(\rho^{*1/2}\ \sigma_1, k_1^{*2}=1/2)^2]$, $\omega^2 - k^2 = (k_0^{*2})_2 = \varepsilon(E)\ \varepsilon_1\ \rho^*\Lambda/6$
$f_3 = 2^{-1}$ $\{-1 +[dn(\rho^{*1/2}\ \sigma_1, k_1^{*2}=1/2) / cn(\sigma, k_1^{*2}=1/2)]^2\}$
$\omega^2 - k^2 = (k_0^{*2})_3 = \varepsilon(E)\ \varepsilon_1\rho^*\ \Lambda/3.$, (4.8)

Теперь, используя свойство масштабной инвариантности решения (3.4), получаем

$f_1 = \rho^{*-1}\, cn(\sigma, k_1^2=1/2,)^2$, $\omega^2 - k^2 = (k_0^{*2})_1 = (2/3)\ \varepsilon(E)\ \varepsilon_1\ \Lambda$,
$f_2 = 2^{-1}\ \rho^{*-1}$ $[-1/2 + dn(\sigma, k_1^{*2}=1/2)^2]$, $\omega^2 - k^2 = (k_0^{*2})_2 = \varepsilon(E)\ \varepsilon_1\Lambda/6$,
$f_3 = 2^{-1}\ \rho^{*-1}$ $\{-1 +[dn(\sigma, k_1^{*2}=1/2) / cn(\sigma, k_1^{*2}=1/2)]^2\}$
$\omega^2 - k^2 = (k_0^{*2})_3 = \varepsilon(E)\ \varepsilon_1\ \Lambda/3$, (4.9)

где обозначение σ_1 заменили на σ. В случае Ферми-газа с положительной энергией и ε_1=1имеем

$f_1 = \rho^{*-1}\, cn(\sigma, k_1^2=1/2,)^2$, $\omega^2 - k^2 = (k_0^{*2})_1 = (2/3)\ \varepsilon(E)\ \Lambda$,
$f_2 = 2^{-1}\ \rho^{*-1}\ [-1/2 + dn(\sigma, k_1^{*2}=1/2)^2]$, $\omega^2 - k^2 = (k_0^{*2})_2 = \varepsilon(E)\ \Lambda/6$
$f_3 = 2^{-1}\ \rho^{*-1}$ $\{-1 +[dn(\sigma, k_1^{*2}=1/2) / cn(\sigma, k_1^{*2}=1/2)]^2\}$
$\Lambda = (1/4)æ\ \ c^2\ Z_1$, $\omega^2 - k^2 = (k_0^{*2=})_3 = \varepsilon(E)\ \Lambda/3.$ (4.10)

П4. Анализ периодической структуры решения (4.10)

Для анализа периодической структуры решения удобнее решение (4.4) представить в виде

$f_1 = cn(\sigma, k_1^2=1/2,)^2$, $\omega^2 - k^2 = (k_0^{*2})_1 = (2/3)\ B_0$
$f_2 = 2^{-1}$ $[-1/2 + dn(\sigma, k_1^{*2}=1/2)^2]$, $\omega^2 - k^2 = (k_0^{*2})_2 = B_0/6$
$f_3 = 2^{-1}$ $\{-1 +[dn(\sigma, k_1^{*2}=1/2) / cn(\sigma, k_1^{*2}=1/2)]^2\}$
. $\omega^2 - k^2 = (k_0^{*2})_3 = B_0/3$, (4.11)
$B_0 = \rho^*\Lambda$. $\Lambda = (1/4)æ\ c^2\ Z_1$. $Z_1 = (f_{ср})^{-1/2}\ [1+(1/2)\ln f_{ср}^{\ 3/2}]^{-3}$

Все полученные решения, как уже было сказано, имеют период 2K и дают возможность определить длину соответствующей периодической решетки. Так как в данной формулировке ω имеет размерность $см^{-1}$, то при k=0 (система покоя k_0^*) можно написать

$\omega L = 2K(45^0) = 2{*}1,854 = 3,81$, $k_1 = (0,5)^{1/2} = 0,71 = \sin 45^0$ (4.12)

и для длины соответствующей решетки получаем

$L = 3,81/k_0^*$ (4.13)

Так как, согласно (3.11), в случае масштабной инвариантности решений существует связь между частотой колебания (аргументом функции) и амплитудой решения, то при определении частоты колебания возникает определенная свобода. Частоту колебания полностью можно определить только после определения амплитуды колебания. В таком случае необходима определенная калибровка решений и частоты. Свойство (3.11) решений уравнения позволяет, без потери общности, ввести понятие **стандартного нелинейного решения** и, соответственно, **стандартного нелинейного колебания** путем фиксирования амплитуды колебания в виде единицы – перебрасывая амплитуду **решения в частоту.** В таком случае решения (4.11), как стандартные решения. записываются в виде

$f_1 = cn(\sigma, k_1^2=1/2,)^2$, $\omega^2 - k^2 = (k_0^{*2})_1 = 2\ B_0/3$
$f_2 = [-1/2 + dn(2^{1/2}\sigma, k_1^{*2}=1/2)^2]$, $\omega^2 - k^2 = (k_0^{*2=})_2 = B_0/3$

ISSN 1512-1461

$f_3 = \{-1 +[\, dn\,(2^{1/2}\,\sigma\,,\, k_1^{*2}=1/2) \,/\, cn(2^{1/2}\sigma,\, k_1^{*2}=1/2)\ ]^2\ \}$

$\omega^2 - k^2 = (k_0^{*2=})_3 = 2\, B_0/3,$ (4.14)

$B_0 = \rho^*(1/4)æ\, c^2(\, f_{cp}\,)^{-1/2}\ [1+(3/4)\ln f_{cp}\ ]^{-3},\ \rho^* = const$ (4.15)

Для (k_0^{*2}) в случае стандартных решений получаем

$(k_0^{*2})_1 = (k_0^{*2=})_3 = 2\,(k_0^{*2})_2 = 2B_0/3.$ (4.16)

Для длины периодической решетки L получаем соответственно

$L_2(k=0) = (3{,}71*3^{1/2})\, B_0^{-1/2},$

$L_1(k=0) = L_3(k=0) = 2^{-1/2}\, L_2(k=0) = 3{,}71*(\,1{,}5)^{1/2}\, B_0^{-1/2},$ (4.17)

Для численной оценки $B_0 = \rho^*(1/4)æ\, c^2\,(\, f_{cp}\,)^{-1/2}\ [1+(3/4)\ln f_{cp}\,]^{-3}$
при

$f_{cp} = 1,\quad [1+(3/4)\ln f_{cp}\,]^{-2} = 1,\quad æ\ = 2{,}07*10^{-48}$ сек^2/см .гр
$c^2 = 10^{21}$ (см/сек)^2, $æ\, c^2 = 2*10^{-27}$ см/гр (4.18)
$\rho^* \approx 10^{-31}$гр/см^3

получаем

$B_0 \approx \rho^*(1/4)æ\, c^2 = 2^{-1}*10^{-58}$см$^{-2}$, $B_0^{\ 1/2} \approx 2^{-1/2}*10^{-29}$см$^{-1}$, ,

Таким образом, находим

$(k_0^*)_1 = (k_0^{*=})_3 = 2\,(k_0^*)_2 = (2B_0/3)^{1/2} \approx 3^{-1/2}.\ 10^{-29}$см$^{-1}$

$(m_G)_1 = (m_G)_3 = 2(m_G)_2 = (h/2\pi c\,)(k_0^*)_1 = 0{,}33*10^{-37}(k_0^*)_1 = 0{,}2*10^{-66}$гр

$L_1(k=0) = L_3(k=0) = 2^{-1/2}L_2(k=0) =$
$= 3{,}71*(3/2)^{1/2}B_0^{\ 1/2} = 3{,}71*1{,}73*10^{29}$см$=6{,}3*10^{29}$см (4.19) ,

§ 5. Статические решения первого уравнения гравиплазмы.

Как было показано, уравнения гравиплазмы имеют ветвящиеся периодические решения в эллиптических функциях, зависящие от $\sigma = \omega t - kr$ При этом, полученные решения зависят аналитически от частоты колебания ω, как параметра решения. Следовательно, путем предельного перехода к нулю $\omega \to 0$. $\sigma \to -kr$ в решениях (3.29) и (4.14) можно получить новые, статические решения гравиплазмы вида

$f_1 = cn(\sigma)^2\ ,\ \mathbf{k_1^2=1/2},\qquad k^2 = (k_0^{*2})_1 = (\mathbf{2/3}\,)a$
$f_2 = 2^{-1}[-1/2 + dn(\sigma,\, k_1^{*2}=1/2)^2\,],\qquad k^2 = (k_0^{*2=})_2 = a/6$
$f_3 = 2^{-1}\{-1+[dn(\sigma,\, k_1^{*2}=1/2)/cn(\sigma,\, k_1^{*2}=1/2)]^2\},\quad k^2 = (k_0^{*2=})_3 = a/3,$ (5.1)

$a = [\,\lambda + B_0]$ и при $\rho=0$ имеем $a = \lambda$, при $\lambda=0$ имеем $a = B_0$ где
$B_0 = \rho_0^*(1/4)æc^2(\, f_{cp}\,)^{-1/2}[1+(1/2)\ln f_{cp}^{\ 3/2}\,]^{-3},\quad \rho_0^* = const,.$ (5.2)

ISSN 1512-1461

§ 6. Ячеистая структура гравиплазмы и переход Ферми-газа в вырожденное состояние.

Как было показано, первое уравнение гравиплазмы имеет периодические решения. Соответственно, после того, как система Ферми-газа в гравитационном поле оформится в виде гравиплазмы, в ней возникает периодическая структура, и гравиплазма приобретет ячеистую структуру с характерным пространственным размером $L \approx 6{,}10^{29}$см (в системе с массой покоя k_0^*, k=0.)
При написании уравнения Эйнштейна система Ферми-газа в искривленном пространстве предполагается свободной, не находящейся в вырожденном состоянии. Однако, после формирования ячеистой структуры гравиплазмы, Ферми-газ, оказавшийся заключенным в ограниченном объёме ячейки гравиплазмы, будет переходить в вырожденное состояние. Ограничение объемом ячейки приводит к квантованию энергии фермионов, и принцип Паули распределяет фермионы по энергетическим уровням, т.е. возникает вырожденный Ферми-газ. Внутри каждой ячейки теперь Мир развивается по разработанному в ОТО, сценарию. Однако, ввиду того, что такая система во многом похожа на периодические структуры в металле, роль поля положительных зарядов в металле теперь берет на себя гравитационное поле.
Однако, для возникновения ячеистой структуры гравиплазмы и перехода Ферми-газа в вырожденное состояние необходимо **выполнение** и второго уравнения гравиплазмы.

§ 7. Второе уравнение гравиплазмы

Согласно решению первого уравнения, в гравиплазме возникает периодическая структура, и пространство гравиплазмы приобретает ячеистую структуру. При этом Ферми-газ переходит вырожденное состояние. Т.е. в гравиплазме происходит фазовый переход второго рода. При этом второе уравнение гравиплазмы

$$æ\, T'^{эл}_{\mu\nu} = (-k_\mu k_\nu + k_0^{*2}\eta_{\mu\nu}/4)\, W(\sigma)'^{\,2} - \lambda f(\sigma)\,[\eta_{\mu\nu} + (4/3\, k_0^{*2})(k_\mu k_\nu - k_0^{*2}\eta_{\mu\nu})] +$$
$$+\, æ\,[\,T_{\mu\nu} + (1/3\, k_0^{*2})(k_\mu k_\nu - k_0^{*2}\eta_{\mu\nu})\, T_0\,]$$
$$\eta^{\mu\nu} T'^{эл}_{\mu\nu} = 0, \qquad (1.26)$$

как уже было сказано, определяет тензор энергии–импульса электромагнитного поля $T'^{эл}_{\mu\nu}$, в точке фазового перехода. Если в (1.26) учесть соотношения

$$T_{\mu\nu} = (k_\mu k_\nu / k_0^{*2})\, T_0, \quad T_0 = \varepsilon(E)\, c^2 \rho_0 * f(\sigma)^{3/2} Z_0$$
$$1.(-k_\mu k_\nu + k_0^{*2}\eta_{\mu\nu}/4) = [\eta_{\mu\nu} - 4\,(k_\mu k_\nu / k_0^{*2})].(\,k_0^{*2}/4)$$
$$2.\ \lambda f(\sigma)\ [\eta_{\mu\nu} + (4/3\, k_0^{*2})(k_\mu k_\nu - k_0^{*2}\eta_{\mu\nu})] =$$
$$-(\lambda f(\sigma)/3)\,[\eta_{\mu\nu} - 4\,(k_\mu k_\nu / k_0^{*2})$$
$$3.\ æ\,[\,T_{\mu\nu} + (1/3\, k_0^{*2})(k_\mu k_\nu - k_0^{*2}\eta_{\mu\nu})\, T_0\,] =$$
$$-(æ\, T_0/3)\,[\eta_{\mu\nu} - 4\,(k_\mu k_\nu / k_0^{*2})] \qquad (8.1)$$

то получаем

$$æ\, T'^{эл}_{\mu\nu}, = (1/3)\,[\eta_{\mu\nu} - 4\,(k_\mu k_\nu / k_0^{*2})]\, B \qquad (8.2)$$
$$B = [(3k_0^{*2}/4)\, W(\sigma)'^{\,2} + (\ \lambda f(\sigma) + æ\, T_0)] \qquad (8.3)$$

В частности

$$æ\, T'^{эл}_{44} = -\,(1 + 4k^2/\,3\, k_0^{*2})]\, B$$
$$æ\, T'^{эл}_{nm} = -[\delta_{nm} + 4(k_n k_m / k_0^{*2})\, B \qquad (8.4)$$

ISSN 1512-1461

В случае чисто фотонного газа, если учесть, что

$(k_n k_m)_{сред} ==(1/3)\ k^2\ \delta_{nm}$

то получаем правильное, известное соотношение [8]

$$(T'^{эл}_{nm})_{сред}= (1/3)(T'^{эл}_{44})\ \delta_{nm} \qquad (8.5)$$

Если в (8.3) учесть, что

$W(\sigma)'^{2}=f(\sigma)'^{2}/f(\sigma)^2$

и $f(\sigma)'^{2}$ определить через уравнение(4.5), то получаем

$$B= [- (4 /7)\ f(\sigma)^{5/2} + (1 /4)\ f(\sigma)^{1/2} f(\sigma)]A+ (6\ k_0^{*2}\ C_1 / f(\sigma))] \qquad (8.6)$$

где

$$A=(1/4)\ æ_0\ \rho^* c^2\ Z_0, \quad Z_0=[1+(3/4)\ln f(\sigma)]^{-3} \qquad (3.2)$$

При этом C_1 - произвольная постоянная первой квадратуры.
Как видим, ввиду специфики уравнения Эйнштейна (3.1), в определение $T'^{эл}_{\mu\nu}$ через уравнение Эйнштейна в виде (8.2)-(8.5), будет входить произвольная постоянная C_1 , т.е. $T'^{эл}_{\mu\nu}$ через второе уравнение определяется только с точностью произвольной постоянной. Соответственно, второе уравнение гравиплазмы фактический не накладывает ограничения на значение $T'^{эл}_{\mu\nu}$, при котором может произойти указанный фазовый переход второго рода.
Указанную неопределенность в оределении $T'^{эл}_{\mu\nu}$ в момент фазового перехода второго рода можно снять если предположить, н апример, что в указанный момент плотност электромагнитного излучения била в дваразa большее чем современная плотность т.н. реликтовово излучения.

§8 . Аналогия теории гравиплазмы с самосогласованным полем вырожденного Ферми- газа Томаса- Ферми – Дирака в случае металлов [15][16]][17]

П1. Постановка вопроса

Уравнение Эйнштейна (3.1) в случае вырожденного Ферми-газа, с его решениями в эллиптических функциях, совершенно аналогично уравнению Томаса-Ферми-Дирака для самосогласованного поля вырожденного Ферми- газа в металле **(см. Приложение п.1).** Если учесть, что в случае разряженного газа кулоновские и ньютоновы потенциалы аналогичны, и отличие состоит только в численных значениях констант взаимодействия, то указанную выше аналогию между поведением гравитационной плазмы и вырожденного Ферми-газа в металле можно понять. Так как электродинамика линейна, а гравитационное поле нелинейно, то отличие в численных значениях констант взаимодействия отразится, главным образом, на пространственных масштабах явлений. Действительно, безразмерная константа электромагнитного взаимодействия $\alpha_e=e^2/\hbar c\approx10^{-2}$ и длина кристаллической решетки - $L_к\approx10^{-7}$см. Безразмерная константа гравитационного взаимодействия, в случае протона,$\alpha_g= æ\ k_0^p\ /\hbar c\approx10^{-38}$ и длина периода пространственной решетки в гравиплазме, как было сказано, $L_g \approx 10^{29}$см. Соответственно, находим $(\alpha_e / \alpha_g) \approx L_g/ L_к)=10^{36}$. Таким образом, при наличии объема гравиплазмы $L_g^3 =10^{87}$ см^3 гравитационное поле уравновешивает

ISSN 1512-1461

силы кулоновского отталкивания и давление вырожденного Ферми-газа. При этом образование пространственной решетки в гравиплазме стабилизирует систему. (При $\rho^*=10^{-30}$гр/см^3 плотность числа протонов n_p=1прот/м^3).

Однако аналогия между поведением гравиплазмы и поведением самосогласованного поля вырожденного Ферми-газа в металле идет значительно дальше. Уравнения поля и здесь и там нелинейные, второго порядка, с максимальной степенью нелинейности 3/2 .В обоих случаях имеем ветвящиеся решения в эллиптических функциях, и при определенных значениях аргументов появляются нефизические области. В этих областях полученные решения непригодны.

Анализ причин появления нефизических областей для решения в случае теории металлов показывает, что сам факт того, что Ферми-газ заключен в ограниченном объеме, в теории металлов учитывается только частично. В частности, учитывается, что ввиду ограниченности объема Ферми-газа спектр его энергии становится дискретным и Ферми-газ переходит в вырожденное состояние. Однако, ограничение Ферми-газа в объеме одновременно порождает и ограничение на возможные значения импульсов Ферми-газа, что в теории Томаса-Ферми-Дирака для самосогласованного поля вырожденного Ферми-газа в металле не учитывается. Область значения импульсов в интервале ($0\leq p\leq \hbar/ L_к$) теперь запрещена. Интегрирование в пространстве импульсов теперь должно проводиться только в области ($h/2\ L_к\leq p\leq\infty$). В результате плотность Ферми-газа - ρ - получает постоянную добавку, и теперь в теории Томаса-Ферми-Дирака ρ следует заменять на [ρ -($3^{1/2}/2$)п/$L_к^3$.] Последовательный учет этой поправки несколько изменяет уравнение Томаса-Ферми-Дирака, но решение вновь дается в эллиптических функциях. Однако теперь исчезают нефизические области для полученных решений.

Последовательный учет указанных выше граничных условий в случае спинорного поля, заключенного в ограниченной области пространства, потребует определенной полевой добавки в тензоре энергии импульса $T_{\mu\nu}$. В данном случае, в случае гравиплазмы, такую добавку в $T_{\mu\nu}$ мы сконструируем исходя из следующих качественных соображений. Правая сторона уравнения Эйнштейна -æ$T_{\mu\nu}$ имеет размерность [æ$T_{\mu\nu}$]=см$^{-2}$ Следовательно, соответствующая добавка к этому члену должна иметь вид -[($3^{1/2}/2$)п/$L_к^3$]$^{2/3}$ $g_{\mu\nu}$ ≈ ($2/L^2$).$g_{\mu\nu}$. Правая сторона уравнения Эйнштейна теперь будет иметь вид (æ$T_{\mu\nu}$ + ($2/L^2$) $g_{\mu\nu}$). В принципе, постоянную -п/L^2 можно принять за космологическую постоянную, т.е. написать $\lambda_{грн}\approx 2/ L^2$. Как было показано, $L\approx10^{29}$см, и, соответственно, получаем $\lambda\approx10^{-58}$см$^{-2}$. В такой интерпретации космологическая постоянная в уравнении Эйнштейна является следствием учета граничных условии в случае Ферми-газа, заключенного в ограниченном объеме L^3 . С этой точки зрения, нет надобности введения космологической постоянной в уравнение Эйнштейна. Такая постоянная появляется автоматически, как результат учета граничных условий космологической задачи.

Разумеется, возможна и компромиссная точка зрения, когда остается и космологическая постоянная $\lambda_{кос}$ и постоянная поправка от граничных условии $\lambda_{гран}$, т.е.когда имеем $\lambda = \lambda_{косм} + \lambda_{гран} = \lambda_{косм} +2/ L^2$.

(см. Приложении 1).

§9. Темная материя .

Темная материя определяется как материя, не наблюдаемая, скажем, в оптическом диапазоне, но наблюдаемая как результат гравитационного взаимодействия. Гравитационная плазма вырожденного Ферми-газа - новая материальная среда в ОТО. Из вырожденного Ферми-газа с окружающей средой могут взаимодействовать только фермионы из узкого слоя Δp_0 поверхности Ферми. Следовательно, только эти фермионы могут быть наблюдаемы. При максимальном импульсе p_0 - для полного числа фермионов в единице

ISSN 1512-1461

объёма n и n_s - для числа наблюдаемых фермионов в поверхностном слое, Δp_0 в единице объёма, имеем

$n = (8\pi/3)(p_0/h)^3$, $n_s = (8\pi/h^3)p_0^2\Delta p_0$ (9.1)

При этом для невидимой материи n_b находим

$n_b = n\,[1 - (n_s / n)]$, $(n_s / n) = 3(\Delta p_0/ p_0) = X$ (9.2)

Для отношения видимой и невидимой части материи гравиплазмы получаем

$(n_s / n_b) = X/(1-X) \approx X = 3(\Delta p_0/ p_0) << 1$, (9.3)

§10.Переход пространства гравиплазмы в пространстве Фридмана

В гравиплазме ферми газ, как было сказано, находится в вырожденном состояние. Соответственно, из ферми газ с окружающей средои взаймодействуют только фермионы находящейся на ферми поверхности. В результате этого взаймодействуия возникают сложные образования из фермионов и зараждается основы для возникновения пиловыдной материи в гравиплазме. Таким образом, со временем, начинается накапление пиловыдной материи в гравиплазме и процесс перехода пространства гравиплазми в пространстве Фридмана.

§11. Чистое гравитационное поле.

Уравнение Эйнштейна в виде уравнения гравиплазмы при отсутствии **источников гравитации** и космологической постоянной имеет вид

$(\omega^2-k^2)\{f(\sigma)f(\sigma)''-(1/2)f(\sigma)'^2\}=(4/3)\{\lambda f(\sigma)^3 + Af(\sigma))^{5/2}\}=0$ (3.1)
$A=(1/4)\ æ\,\rho^* c^2 Z_0$

И при $(\omega^2-k^2)=0$, любая функция вида $f=f(\sigma)$, $\boldsymbol{\sigma} = \omega t-kx$ является его решением. Однако, среди этих функций выделяются решения, получаемые из решений (4.4) путем предельного перехода $B_0\to 0$ и эти решения имеют вид

$f_1 = \mathrm{cn}(\sigma)^2$, $\mathbf{k_1^2=1/2}$, $\omega^2- k^2 = \mathbf{(2/3)}\ B_0 = 0$
$f_2 = 2^{-1}\,[-1/2 + \mathrm{dn}(\sigma, k_1^{*2}=1/2)^2\,]$, $\omega^2- k^2 = B_0/\mathbf{6} = 0$
$f_3 =_1 2^{-1}\,\{-1 +[\,\mathrm{dn}\,(\sigma, k_1^{*2}=1/2) / \mathrm{cn}(\sigma, k_1^{*2}=1/2)\,]^2\}$ (4.4)
$\omega^2- k^2 = B_0/3 = 0$
$B_0 = (1/4)æ\ \varepsilon(E)\ \varepsilon_1\ \rho^*\ c^2\ Z_1$,

Таким образом, согласно уравнению Эйнштейна, существует "исходное" свободное гравитационное поле, гравитационное поле без источников. При этом, характерным свойством этого гравитационного **поля излучения** является условие $\omega^2-k^2=0$. **В отличие от** "исходного" гравитационного поля, гравитационное **поле гравиплазмы**, рассматриваемой нами, характеризуется условием $\omega^2-k^2= k_0^{*2}\neq 0$

ISSN 1512-1461

Приложение 1.

Самосогласованное поле вырожденного Ферми-газа в теории металлов.

A) Без учета граничных условий [16]

1) В случае томма Томаса –Ферми имеем

$\varphi = \xi - eV(x)$, $\rho = A\,\varphi^{3/2}$, A=const
$(\partial/\partial x_n)^2 \varphi = 4\pi A\,\varphi^{3/2}$. n =1.2.3

При $\varphi = \varphi(\sigma_1)$, $\sigma_1 = k_n x_n$.

$$\varphi'^2 = (4/5)\, 4\pi A_0 \varphi^{5/2} + C_1,\ A_0 = A/\omega^2,\ \omega^2 = k_n^2 \qquad (П.5.1)$$

2) В случае Томаса–Ферми-Дирака [15] имеем

$\varphi = -\xi + eV(x) + e\tau_0$
$\rho = B(\varphi^{1/2} + \tau_0)^3$,
$B = \sigma_0 e^{-1/2}$, $\sigma_0 = 0{,}095(ea_0)^{-3/2}$, $\tau_0 = 0.{,}22(e/a_0)$, $a_0 = h/4\pi me^2$
$\partial_n^2 \varphi = -b\,(\varphi^{1/2} + b_1)^3$,
$b = \Lambda_1 4\pi\sigma_0 e^{1/2}$,. $b_1 = \Lambda_2 \tau_0 e^{1/2}$, Λ_1, Λ_2=const

$$\varphi = b_1^2 \Phi, \quad \zeta_n = (bb_1)^{1/2} x_n \qquad (П.5.2)$$

При $\varphi = \varphi(\sigma_1)$, $\sigma_1 = k_n \zeta_n$. имеем

$$\omega^2 \Phi'' = (\Phi^{1/2} + b_1)^3 \qquad (П.5.3)$$

После первой квадратуры имеем

$$2^{-1} \omega^2 \Phi'^2 = (2/5)\Phi^{5/2} + (3/2)\Phi^{3/2} + 2\Phi + C_1 \qquad (П.5.4)$$

При

$$\Phi = \psi^2,\ \varphi = (b_1\psi)^2 \qquad (П.5.5)$$

Получаем

$$2\omega^2 \psi'^2 = (2/5)\psi^3 + (3/2)\psi^2 + 2\psi + C_1 \psi^{-2} \qquad (П.5.6)$$

При $C_1=0$ уравнение (П.5.6) имеет решение **в эллиптические функции** в виде

$$\Psi = \alpha\,[\beta + e_2(\sigma_1, k_1^2)^2] \qquad (П.5.7)$$

$\Psi = -0{,}82\{1{,}95 + e_2(\sigma_1 + mK + inK')^2\}$, n.,m,=0,1,2,,,,
$\Psi_R = -0{,}82\{1{,}95 + e_2(\sigma_1 + mK + i(2n+1)K')^2\}$, n.,m,=0,1,2,,,,
$\Psi_{imj} = -0{,}82\{1{,}95 + e_2(\sigma_1 + mK + i2nK')^2\}$, n.,m,=0,1,2,,,,

$$e_2(\sigma_1, k_1^2) = dn(\sigma_1, k_1^2) + ik_1 \sin(\sigma_1, k_1^2) \qquad (П.5.8)$$

Или в виде

ISSN 1512-1461

$\Psi_1 = -0{,}82\{1{,}95- [1+cn(\sigma_1 , k_1^2]/[1-cn(\sigma_{1,} k_1^2]\}$
$\alpha_1 =0{,}82$, $\beta_1= -1{,}95$, $k_1^2=0{,}82$, $\omega^2=0{,}166(bb_1)^{1/2}$
$\Psi_2 = -0{,}82\{1{,}95+[dn(\sigma_1, k_1^2) +ik_1 \sin(\sigma_1, k_1^2)]^2 \}$
$\alpha_2 = -0{,}82$, $\beta_2= 1{,}95$, $k_1^2=0{,}82$, $\omega^2=0{,}166(bb_1)^{1/2}$ (П.5.9)
$\varphi= (b_1\psi)^2$ (П.5.10)

Для длины кристаллической решетки находим, соответственно,

$L_1=4K/\omega \approx(9{,}24/0{,}50)A^0 \approx18{,}5\ A^0$
$L_2=4K'/\omega \approx(6{,}66/0{,}50)A^0 \approx13{,}2\ A^0$ (П.5.11)

Однако плотность ρ,

$\rho= \rho_0(1+ \Psi)$ (П.5.12)

не является положительной везде.
Рассматривая $\varphi_1= (b_1\psi_1)^2$ как потенциал нормального состояния электрона в кристалле и $\varphi_2= (b_1\psi_2)^2$ – как потенциал сверхпроводящего состояния электрона в кристалле, можно попытаться определить величину энергетической щели между этими состояниями (E_1-E_2) через решения соответствующих уравнений Шредингера. Однако решения в известных функциях не дается, а значения (E_1-E_2) очень чувствительны к точности вычислений, в том числе, к значению параметров. При грубой оценке, например, в точке σ_1=2K (в температурной шкале - K^0- Кельвин) имеем
$137\ K^0 \le [E_1(2K) -E_2(2K)]\le 6000\ K^0$ (П.5.13)

B) С учетом граничных условий [17]

В случае вырожденного Ферми-газа, заключенного в ограниченном объеме, например, внутри кристалла размером L_1, L_2, L_3 возникает ограничение, как в пространственном, так и в импульсном пространствах

$0<x< L_1$, $0<y< L_2$, $0<z< L_3$,
$P_1=n_1(h/2L_1)$, $P_2=n_2(h/2L_2)$, $P_3=n_3(h/2L_3)$,
$0<n_1$, $0<n_2$, $0<n_3$ =1,2,3,,, (П.5.14)

Таким образом, для Ферми-газа оказывается запрещенным фазовый объем (например, в случае $L_1= L_2 = L_3 =L$)

$P^2=(1/3)(n_1^2+ n_2^2+ n_3^2) P_0^2> \mathbf{P_0^2}$, $(P_0/h)=3^{1/2}/2\ L$
$P_0^3=h^3/V_0$, $V_0,=(8/3^{3/2})\ L^3$ (П.5.15)

Введем обозначения

$n_{поль}=(8\pi/3)\ (P_{мах}/h)^3$, $n_L=(8\pi/3)\ V_0,= (3^{1/2}\ \pi)/L^3$
$n =(N/V)$. . $V= L^3$ (П.5.16)
N – число состояний на интервале импульсов (P_0 , $P_{мах}$). n-плотность состоянии. При этом

$n = n_{поль}- n_L$ (П.5.17)

и для средней кинетической энергии E_L^k и объемной энергии А(р) единицы объема получаем

ISSN 1512-1461

$E_L^k = \zeta_0((n+ n_L)^{5/3} - n_L^{5/3})$, $\zeta_0 = (4п/5m)h^2 (3/8п)^{5/3}$

$A(p) = - n_{поль}^{4/3}\{1-(1/2)[n_L/ n_{поль})^{1/3} + (n_L/ n_{поль})] +$

$+ (1/4)[1 - (n_L/ n_{поль})^{2/3}] \ln[1 - (n_L/ n_{поль})^{1/3}] /[1 + (n_L/ n_{поль})^{1/3}]\}$ (П.5.18)

В результате варьирования формы

$\delta(E_L^k + e(V_{внеш}+V_{элек}) + E_{0,vty} - eN V^0) = 0$ (П.5.19)

получаем уравнение самосогласованного поля, обобщающее уравнения Томаса–Ферми-Дирака

$(5 \zeta_0/3) n_{поль}^{2/3} - (4/3) n_{поль}^{1/3})\{1-(1/4))[У^{1/3} + У)] +$

$+(1/4)[1 - У^{2/3}] \ln[1 - У^{1/3}] /[1 + У^{1/3}]\} -^{-}[-\xi + e(V_{внеш}+V_{элек})] = 0$ (П.5.20)

где $У=(n_L/ n_{пол})$), и, учитывая, что $У \ll 1$, можно принять

$\ln[1 - У^{1/3}] /[1 + У^{1/3}]\} = 2\{y^{1/3}+(1/3)y+(1/5)y^{5/2}+++$ (П.5.21)

Например, в первом приближении получаем

$\varphi=[-\xi+ e(V_{внеш}+V_{элек})+e\,\tau_0^2]$
$\rho=e^{-1/2}\sigma_0[\varphi^{1/2}+ e^{1/2}\,\tau_0]^3 - e^2 n_L$ (П.5.22)

$\partial_n^2\varphi = 4пe^2 n = 4пe^{½}\{\sigma_0[\varphi^{1/2}+ e^{1/2}\,\tau_0]^3 - e^{2/3}n_L\}$ (П.5.23)

Существует решение этого уравнения как функция трехмерного волнового инварианта $\sigma_1=k_n x_n$. Оно имеет вид

$\Psi=\alpha\,[\beta + \theta(\sigma_1, k_1^2)\,^2]$ (П.5.24)
$\varphi= (b_1\psi)^2$ (П.5.25)
Однако, теперь относительно параметра $x=\alpha/\beta$ получаем кубическое алгебраическое уравнение. Задавая x, в частности, например, x= 4,7 находим

α=10,32, β=0,45, k_1^2=0,068 , ω^2=2,06 , L_x=5,5 A^0
$\Psi_1=10,32\ \{0,45 +[1+cn(\sigma_1 , k_1^2\}]/[1-cn(\sigma_1, k_1^2]\}$
$\Psi_2=10,32\ \{0,45 +[dn(\sigma_1, k_1^2) +ik_1\, ik_1 \sin(\sigma_1, k_1^2)]^2\}$ (П.5.26)
$\varphi= (b_1\psi)^2$
$L_x=4K/\omega_x \approx 6,23\ A^0$ (П.5.27)
Плотность ρ теперь везде положительна

$\rho=e^{-1/2}\sigma_0[\varphi^{1/2}+ e^{1/2}\,\tau_0]^3 - e^2 n_L > 0$ (П.5.28)

ISSN 1512-1461

Резюме.

Современные представления о структуре Вселенной начали складываться в 20-ые годы прошлого столетия на базе уравнения Эйнштейна. При этом нестатическое решение Фридмана легло в основу зарождавшегося тогда современного представления о структуре Вселенной.

Фридман получил точное решение уравнения Эйнштейна в случае космической пыли в сопутствующей системе координат (натянув координатную сетку на пылевидную материю) и при тензоре энергии импульса космической пыли как идеальной жидкости при давлении p=0. Основной результат Фридмана состоит в том, что при нынешней плотности материи ($\rho=10^{-31}$см/сек) Вселенная должна расширяться.

Для изучения предыстории развития Вселенной Фридмана в решении Фридмана стали менять направление скоростей - расширения пространства Фридмана на сжатие, - и стали рассматривать обратные процессы, -процессы сжатия пространства Фридмана. При этом предполагали, что пространства, возникшие в результате сжатия пространства Фридмана, также являются пространствами типа пространства Фридмана и будут обладать свойствами расширения и сжатия.

Таким путем было получено, что Вселенная "вышла из точки" в результате "Большого Взрыва" и что за взрывом следовал т.н."ранний" период состояния Вселенной в виде газа из гамма-фотонов. Потом следовал второй период состояния Вселенной. в виде плазмы из свободных фермионов и фотонов. И, наконец, из второго периода возникло нынешнее состояние Вселенной в виде космической пыли, звезд и галактик, т.е. пространство Фридмана. При этом, состояние Вселенной в стандартной т.н."горячей модели" Вселенной, предшествующее пространству Фридмана в виде плазмы из свободных фермионов и фотонов, является типичным объектом исследования современной теории поля теоретической физики. Соответственно, методами современной теория поля можно подробно исследовать это состояние Вселенной. В частности, тензор энергии импульса свободного Ферми-газа, в соответствии с современными представлениями теория поля, можно записать как тензор энергии импульса спинорного поля в гравитационном поле. Сами спиноры подчиняются уравнению Дирака при наличии гравитационного поля, т.е.уравнению Фока-Иваненко.

Таким образом, для исследования состояния Вселенной в стадии плазмы из свободных фермионов и фотонов получаем, с точки зрения современной теории поля, самую общую и корректную систему уравнений.

Результат исследования указанной системы уравнений и дается в данной работе. Основным результатом этого исследования является утверждение, что состояния Вселенной, предшествующие пространству Фридмана, т.е. состоянию Вселенной в виде плазмы из свободных фермионов и фотонов, не расширяются и не сжимаются, со всеми последующими выводами из этого утверждения.

Следует подчеркнуть,что в случае уравнения Эйнштейна с тензором тензора энергии импульса идиальной житкости из уравнения Эйнштейна определяются как метрический тензор так и скорости и плотность материи входящие в выражение тензора энергии импульса идиальной житкости. При этом, скорость расширения пространства идиальной житкости с однороднои плотности, по закону Хаббла, является решением уравнения неразривности в ньютоновском приближение и иявляется следствием пространственной однородности плотности идиальной житкости.

В случае гравиплазми из уравнения Эйнштейна определяется только метрический тензор, что касается скорости и плотности материи входящие в выражение тензора энергии импульса гравиплазми, то ани польностью определяются из уравнения Дирака. При этом, скорости постоянние и плотность материи не является однородной.

ISSN 1512-1461

Литература

1. Риман Б. "О гипотезах, лежащих в основании геометрии", в Сб. "Обоснования геометрии", 1956г., стр.306, Москва, Гостехиздат.,
2. Гельмгольц Г. "О фактах, лежащих в основании геометрии", в Сб. „Обоснования геометрии", 1956г, стр.366, Москва, Гостехиздат.
3. Клейн Ф. "Эральгинская программа",1956г,-в Сб."Обоснования геометрии", стр.399, Москва, Гостехиздат,
4. Эйнштейн А. „Основы Обшей Теории Относительности„ в Сб. „Обоснования геометрии", 1956г, стр.146, Москва, Гостехиздат,
5. Фридман А.А., „О кривизне пространства„ 1979г в Сб „Алберт Эйнштейн и теория гравитации„ стр. 320, Москва, Мир.
6. Зельдович Я.Б. Новиков И.Д. "Релятивистская Астрофизика", 1967г, Москва, Наука,
7. Tolman R. "Relativity Thermodinamiks and Cosmologi", Oxford, 1969,
8. Фок В. А. "Теория пространства, времени и гравитации", стр. 447.143, 1955г, Москва, Госиздат ,
9. Мицкевич Н.В. "Физические поля в ОТО",1969г, стр.140, Москва, Наука.
10. Швебер С.,"Введение в релятивистскую квантовую теорию поля" 1963г, стр.102, Москва, ИИЛ, (Перевод . Silvan S. Schweber."An intradaction to relativistic quantum field theory", Row, Peterson and Co.Evenston, 1961, IU. N. Y.)
11. Соколов А. Иваненко Д. "Квантовая теория поля" 1953, стр. 649, ГИТТЛ
12. Лифшиц Е.М. Питаевский Л.П. Статистическая физика, 1972 г, часть 2,стр.33, Москва,"Наука".
13. Курдгелаидзе Д. Ф. „Космология и эллементарные частицы„ ЖТФ, 1964г 47, 2313,
14. Курдгелаидзе Д. Ф. "SUR LA SOLUTION DES EQUATIONS NON LINEAIRES DE LA THEORIE DES CHAMPS PHYSIQUES" Cahiers de Physique" , 1961, p.149-157, N^0 128,, Avril
15. Курдгелаидзе Д. Ф. "Феноменологическое обобщение уравнения Томаса-Ферми-Дирака и его периодическое решение„"Acta Phisikae Hungarika",1958г, 9 ,стр. 185,
16. Гамбош П. "Статистическая теория атома и ее применение",1951, стр.40, ИИЛ, 1955, Госиздат, Москва.
17. Курдгелаидзе Дм. Курдгелаидзе Давид, "Новые математические методы в теории фазового перехода второго рода", 2003г. Тбилиси, "Зекари".

Article received: 2011-07-05