ISSN 1512-1461

УДК 53

КВАНТОВАЯ СТРУКТУРА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Курдгелаидзе Дмитрий

Грузинский Технический Университет ,Институт Вычислительной Математики им.Мусхелишвили.
Адрес: ул. Костава 75, почтовое отделение 01

Аннотация

Проведено вторичное квантование спинорного поля в формализме ассоциативного гиперкомплексного числа

Ключевые слова: *вторичное квантование, спинорное поле, гравитационное поле .*

Введение.

Природа гравитационного поля сложна. Первые представления о ее природе берут свое начало у Ньютона, который ввел гравитационное поле как потенциальное поле с известным гравитационным потенциалом Ньютона. Следующий шаг в сторону уточнения природы гравитационного поля был сделан Эйнштейном, когда он отождествил метрический тензор пространства Римана с гравитационным потенциалом в этом пространстве. Последующие попытки уточнения структуры и природы гравитационного поля проводятся уже в рамках указанного выше геометрического представления о природе гравитационного поля, введенного Эйнштейном. Однако остается открытым вопрос о том, достоверно ли наше существующее представление о природе гравитационного поля, хотя бы на таком уровне как, например, природа классического электромагнитного поля. О том, что этот вопрос не является праздным говорят ряд обстоятельств, о которых и будет идти речь ниже в частности

1.Проблема объединения Общей Теории Относительности Эйнштейна и Квантогой Механики (Теории поля).

В начале 20-го века возникли две фундаментальные дисциплины физики- Общая Теория Относительности Эйнштейна и Квантовая Механика. Весь 20-ый век ушел на всестороннее развитие этих дисциплин и выяснение возможности их объединения. Однако объединить их так и не удалось. Причина трудности состоить в том, что Квантовая Механика базируется на формализме матричного исчисления и понятии вероятности. Соответственно выводы Квантовой Механики носят вероятностний характер. Общая Теория Относительности Эйнштейна базируется на формализме дифференциальной геометрии и результаты выражаются через классические аналитические функции (как правило). Решение вопроса об объединении этих двух фундаментальных направлении в принципе лежит на поверхности. Необходимо обе указанные теории изложить в одном более общем математическом формализме.Таким формализмом является формализм гиперкомплексных чисел. Алгебра матричного исчисления является частным случаем алгебры гиперкомплексных чисел. Гиперкомплексные числа в общем случае матричного представления не имеют. Если в гиперкомплексные числа переписать как Квантовую Механику так и Общую Теорию Относительности Эйнштейна, то в результате отличие в математическом формализме изложения этих двух фундаментальных дисциплин физики отпадает. Что касается вероятностной природы измеряемых в физических величин, то если, например, ограничиться спинорным представлением, и реализовать спиноры через гиперкомплексные числа, то соответствующие компоненты функции будут носить спинорные индексы и соответственно измеряемые физические величины будут билинейными комбинациями соответствующих компонент спиноров. В результате в теории сохранятся характерные для спинорной теории поля вероятностные интерпретации измеряемых физических величин. Необходимие для

ISSN 1512-1461

реализации этой программы математические основы были заложены еще Зоммерфельдом[1]. Он изложил теорию Дирака в гиперкомплексные числа, записав для этой цели спиноры через кватернионы с проекционним оператором. Что касается Общей Теории Относительности, то ее изложение в гиперкомплексные числа было проведено в работах [2]. Таким образом, первая проблема в принципе разрешена, в дальнейшем предстоит только ее детальная разработка.

2 Вторичное квантование гравитационного поля. Оснавним моментом в существующей теории вторично квантованя является то, что в формализме матричного исчисления. исходним является квантование энергия гармонического осцилятора. Далее, квантуются все поля которие можно представить как набор гармонических осцилчторов. Соответственно гравитационное поле в виду ее нелинейности в таком формализме каантованию не подлежить. В случае, изложения гравитационного поля в формализме гиперкомплексного числа, в ввиду того, что операторы рождения и уничтожения в этом формализме можно записать через проекционние оператори гиперкомплексных чисел, то гравитационное поле можно квантавать. Соответственно квантуются все поля которых можно записать через гиперкомплексные числа [3].В частности, в част 1 данной работы рассмотривается вторичное квантование спинорного поля и в част 2 вторичное квантование гравиттационного поля (при c=ђ=1)

§1**Алгебра операторов ферми и их связы с γ_μ величинами Дирака**

П1Алгебра гиперкомплексных чисел квантогой теории поля [4].

В квантогой теории поля мы имеем дело с тримья типами алгебрь гиперкомплексных чисел: 1.Алгебра Грассмана. 2.Алгебра Клифорда - величин γ_μ Дирака и 3. Алгебра операторов Ферми.

1.Алгебра Грассмана. Величины $\{\tau_j\}$ j=1,2,3,,,,n являются элементами алгебры Грассмана. если они подчиняются соотношениям

$$\{\tau_i\, \tau_j\} = 0, \quad i, j=1,2,3,,,,n, \tag{1.1.1}$$
$$\tau_i\, \tau_j+ \tau_j\, \tau_i =0, \quad i\neq j,$$
$$\tau_1\, \tau_1= \tau_2\, \tau_2= ....= \tau_n\, \tau_n=0 \tag{1.1.2}$$

Обший вектор алгебры Грассмана имеет вид

$$\Phi= \varphi_1\tau_1+ \varphi_2\tau_2+++\varphi_n\, \tau_n + \varphi_{12}\tau_1\tau_2+ +\varphi_{nm}\tau_n\tau_m ++ \tag{1.1.3}$$

где φ_1, φ_2 , и.т.д.числавие коефициенты

2.Алгебра Клифорда - Алгебра величин γ_μ Дирака.

Алгебра величин $\{ \gamma_\mu \}$ -типичная алгебра Клифорда.

$$\{\gamma_\mu\, \gamma_\nu\}=2\eta_{\mu\, \nu},\ \mu,\nu =n, 4,\ n=1,2,3\ .\ \eta_{44}=-1,\ \eta_{nn}=1,\ \eta_{nm}=0,\ n \neq m,$$
$$\gamma_4^2=-1,\ \gamma_1^2=\gamma_2^2=\gamma_3^2 =1, \quad \gamma_\mu\, \gamma_\nu = - \gamma_\nu\, \gamma_\mu\ , \quad \mu \neq \nu \tag{1.1.4}$$
$$\gamma_4^+ = - \gamma_4, \quad \gamma_n^+= \gamma_n \tag{1.1.5}$$

3 Алгебра операторов Ферми. Величины a_i , a_i^* , i=1,2,3,..., n , вляются элементами алгебры операторов Ферми если они подчиняются соотношенгиям

$$\{ a_i\ a_j^* \} = \delta_{ij}, \quad \{ a_i\ a_j \} = 0, \quad \{ a_i^*\, a_j^* \} = 0, \tag{1.1.6}$$
$$a_i^2 = a_j^{*2}=0\ , \quad \{ a_i\ a_i^* \} = 1, \quad \{ a_i\ a_j^* \} = 0, \quad i \neq j\ , \tag{1.1.7}$$

ISSN 1512-1461

В случае матричного представления a_i , a_i^* имеем $a_i^* = a_i^+$ где a_i^+ Эрмитого сопряженная матрица Как выдим в отдельности $\{a_i\}$ и $\{a_j^*\}$ являются элементами алгебря Грассмана, а совместно $\{a_i, a_j^*\}$ дают т.н. алгебру операторов Ферми. В квантогой теории поля алгебру операторов Ферми подчиняются т.н.оператори униятожения и рождения.

П2.Связь между алгеброй Клифорда и алгеброй операторов Ферми

Между алгеброй Клифорда и алгеброй операторов Ферми сушествует определенная алгебраическая связь с комплексними коефицентами. Эту связь можно реализавать различними путями,. Например, в виде

$\gamma_1 = a + a^*$, $i\,\gamma_2 = a - a^*$, $\gamma_3 = b + b^*$, $\gamma_4 = b - b^*$, (1.2.1)
$a = (1/2)(\gamma_1 + i\,\gamma_2)$, $a^* = (1/2)(\gamma_1 - i\,\gamma_2)$
$b = (1/2)(\gamma_3 + \gamma_4)$, $b^* = (1/2)(\gamma_3 - \gamma_4)$ (1.2.2)

При этом под γ_n^+ понимается эрмитогое сопряжение. Прямим вычислением легко показать,что

$a^2 = a^{*2} = b^2 = b^{*2} = 0$, $\{a\ a^*\} = \{b\ b^*\} = 1$ (1.2.3)
$\{a\ b\} = \{a^*\ b^*\} = \{a\ b^*\} = \{a^*\ b\} = 0$ (1.2.4)

Таким образом опeратроы a , a^* и b , b^* в отдельности являются элементы алгебры операторов Ферми. При записе спиноров через γ_μ величин как кватерниона с проекционным оператором в качестве кватернионного базиса, как правила, мы будем пользоваться базисами

γ_1, $\gamma_3\gamma_1$; и γ_2 , $\gamma_3\,\gamma_2$; (1.2.5)

В связы с этим для нашей цели удобнее рассмотреть другую реализацию связи алгебрь Клифорда и Ферми

$\gamma_1 = a + a^*$, $\gamma_3\,\gamma_1 = a - a^*$, $\gamma_2 = b + b^*$, $\gamma_3\,\gamma_2 = b - b^*$, (1.2.6)

$a = D_3^+\gamma_1$, $a^* = D_3^-\,\gamma_1$, $b = D_3^+\gamma_2$, $b^* = D_3^-\gamma_2$, (1.2.7)
$a\,a^* = b\,b^* = D_3^+$, $a^*a = b^*b = D_3^-$, (1.2.8)

$D_3^+ = (1/2)(1 + \gamma_3)$, $D_3^{--} = (1/2)(1 - \gamma_3)$ (1.2.9)

Исходия из свойств γ_1 и $\gamma_3\gamma_1$

$\gamma_1^2 = a^2 + a^{*2} + \{a\,a^*\} = 1$, $(\gamma_3\gamma_1)^2 = a^2 - a^{*2} - \{a\,a^*\} = -1$
$\gamma_1(\gamma_3\gamma_1) = a^2 - a^{*2} - [a\,a^*] = -\gamma_3$, $(\gamma_3\gamma_1)\gamma_1 = a^2 - a^{*2} + [a\,a^*] = \gamma_3$ (1.2.10)

находим

$a^2 = a^{*2} = 0$, $\{a\,a^*\} = 1$, (1.2.11)

Аналогично имеем и в случае b, b^*

$b^2 = b^{*2} = 0$, $\{b\,b^*\} = 1$, (1.2.12)

ISSN 1512-1461

Как видим,операторы a, a^*, и. b, b^* в отдельности удовлетваряют соотношеням операторов ферми. Связь между алгебрами операторов a, a^*, и. b, b^* можно установить, рассматривая соотношение;

$$\{ \gamma_1 \gamma_2 \} = \{a\, b\}+\{ a^* b^* \}+\{ a^* b \} +\{ a\, b^* \} =0 \qquad (1.2.13)$$

Из (1.2.13) прямим вычислением находим

$$a\, b= a^* b^*= 0, \quad a^* b+ b^* a =0, \quad a\, b^* + b\, a^* =0 \qquad (1.2.14)$$
$$a\, b^*= D_3^+ \gamma_1 \gamma_2, \quad b\, a^* =- D_3^+ \gamma_1 \gamma_2,$$
$$a^* b = D_3^- \gamma_1 \gamma_2, \quad b^* a = -D_3^- \gamma_1 \gamma_2, \qquad (1.2.15)$$

Отсюда находим

$$\{ a\, b^*\} = i\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 , \quad \{b\, a^*\} = - \mathbf{i}\, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 , \qquad (1.2.17)$$
$$\{ a\, b^*\}+\{b\, a^*\}=0 \qquad (1.2.17 ‘)$$

Все приведенние выше соотношения и в частности (1.2.17) следует определить на волновие функции т.е.на решенях уравнения Дирака. Так как решеня уравнения Дирака - спинори является кватернионом с проекционным оператором, то в конечнем счете приведенние выше соотношения и в частности (1.2.17) будут определены на проекционние операторы, скажем, на проекционние операторы энергии D_4^ε, спина D_{13}^s или на их пройзведение $D_{13}^{s+} D_4^{\varepsilon+}=\Pi(s,\varepsilon)$,

$$D_4^\varepsilon =(1/2)\, (1+i\, \varepsilon\, \gamma_4), \quad i\, \gamma_4\, D_4^\varepsilon= \varepsilon\, D_4^\varepsilon, \qquad (1.2.18)$$
$$D_{13}^s=(1/2)(1+is\gamma_1\gamma_3), \quad D_{13}^{s+}=D_{13}^s, \quad i\gamma_1\gamma_3 D_{13}^s= sD_{13}^s , \qquad (1.2.19)$$
$$D_{13}^s D_4^\varepsilon =(1/2)(1+i\, s\gamma_1\gamma_3)(1/2)(1+i\varepsilon\gamma_4) =\Pi(s\ \varepsilon)), \qquad (1.2.20)$$

Так как алгебра операторов Ферми определяется через антикоммутатор то получаем

$$\Pi(s,\varepsilon)\{a\, b^*\}\Pi(s, \varepsilon) = 0, \quad \Pi(s, \varepsilon)\{a * b\}\Pi(s, \varepsilon)= 0 , \qquad (1.2.21)$$

Введем обозначения

$$a_1= a , \quad a_2 = b, \quad a_1^*= a^* , \quad a_2^* = b^*, \qquad (1.2.22)$$

Тогда алгебра операторов a_i , a_j^*, i, j =1,2, запишется в виде

$$a_i a_j = a_i^* a_j^* =0, \quad \{a_1 a_1^*\}=\{a_2 a_2^*\}=1$$
$$\Pi(s, \varepsilon)\{a_1\, a_2^*\}\Pi(s, \varepsilon)=\Pi(s, \varepsilon)\{a_2\, a_1^*\}\Pi(s, \varepsilon)= \mathbf{0}, \qquad (1.2.23)$$

В дальнейшем при построении вторично квантованной теории поля нам понодобяься операторы a, a^* и b, b^* т.е. операторы a_i , a_j^*, при i, j =1,2 со свойствоь

$$a^2= a^{*2}= b^2= b^{*2}= 0, \quad a\, b = a^* b^*= 0$$
$$\{a\, a^*\}=1, \ \{b\, b^*\}=1,$$
$$\Pi(s, \varepsilon)\{a\, b^*\}\Pi(s, \varepsilon)=\Pi(s, \varepsilon)\{a^* b\}\Pi(s, \varepsilon)=0,$$
$$a^* b + b^* a = 0 , \quad a\, b^* + b\, a^* = 0 \qquad (1.2.24)$$

ISSN 1512-1461

П3. Запись спиноров через операторы с алгеброй Ферми

Спинори, через γ_μ величин записиваются в виде

$$\psi(s\,\varepsilon,x) =(\psi_0 I + \psi_1 \gamma_1 + \psi_2 \gamma_2 + \psi_3 \gamma_1 \gamma_2)\, \Pi(s\,\varepsilon), \qquad (1.3.1)$$

Учетивая (1.2.19) спинор (1.3.1)можно представиь в виде

$$\psi(s\,\varepsilon,x) =[(\psi_1 \gamma_1 - is\, \psi_0 \gamma_3 \gamma_1)+(\psi_2 \gamma_2 +is\, \psi_3 \gamma_3 \gamma_2)]\, \Pi(s\,\varepsilon), (1.3.2)$$

или

$$\psi(s\,\varepsilon,x) =[(\psi_1^a \gamma_1+ \psi_1^b \gamma_3 \gamma_1)+(\psi_2^a \gamma_2+ \psi_2^b \gamma_3 \gamma_2)]\, \Pi(s\,\varepsilon), \quad (1.3.3)$$

$$\psi_1^a = \psi_1,\ \psi_2^a = \psi_2 ,\ \psi_1^b = -is\, \psi_0 ,\ \psi_2^b = is\, \psi_3 , \qquad (1.3.4)$$

Если в (1.3.3) величин γ_1, $\gamma_3 \gamma_1$ и γ_2 , $\gamma_3 \gamma_2$ выразить через операторы a_i, a_j^*, $i, j =1,2$ согласно (1.2.6), то (1.3.3) запищется в виде

$$\psi(s\,\varepsilon,x)=\Sigma_i\, [(\psi_i^a+\psi_i^b)a_i+(\psi_i^a -\psi_i^b)a_i^*]\Pi(s\,\varepsilon),\ i=1,2, \qquad (1.3.5)$$

или в вде

$$\psi(s\,\varepsilon,x) = [Q_1^+a_1+ Q_2^+a_2+ Q_1^- a_1^*+ Q_2^- a_2^*]\, \Pi(s\,\varepsilon), \qquad (1.3.6)$$

$$Q_1^+=(\psi_1^a+\psi_1^b)=(\psi_1-is\psi_0), \quad Q_2^+=(\psi_2^a+\psi_2^b)=(\psi_2+is\, \psi_3)$$

$$Q_1^{--}=(\psi_1^a-\psi_1^b)=(\psi_1+is\psi_0), \quad Q_2^- =(\psi_2^a-\psi_2^b)=(\psi_2 -is\psi_3) \qquad (1.3.7)$$

Для эрмитого сопряженной функции получаем

$$\psi^+(s\,\varepsilon,x) =\Pi(s\,\varepsilon)[{}^*Q_1^+a^*_1+{}^*Q_2^+a^*_2+{}^*Q_1^- a_1 + {}^*Q_2^- a_2] \qquad (1.3.8)$$

$${}^*Q_1^+=(\psi^*{}_1^a+\psi^*{}_1^b)=(\psi^*_1+is\psi^*_0), \quad {}^*Q_2^+=(\psi^*{}_2^a+\psi^*{}_2^b)=(\psi^*_2-is\, \psi^*_3)$$

$${}^*Q_1^{--}=(\psi^*{}_1^a-\psi^*{}_1^b)=(\psi^*_1-is\psi^*_0), \quad {}^*Q_2^- =(\psi^*{}_2^a-\psi^*{}_2^b)=(\psi^*_2+is\, \psi^*_3),$$

Для былинеиной форми $\psi^+(s\,\varepsilon,x)\, \psi(s\,\varepsilon,x)$ будем имееть

$$\psi^+(s\,\varepsilon,x)\, \psi(s\,\varepsilon,x)= \Pi(s\,\varepsilon)[\, a^*_1 a_1 ({}^*Q_1^+ Q_1^+)+ a^*_2 a_2 ({}^*Q_2^+ Q_2^+)+$$
$$+ a_1 a_1^*({}^*Q_1^- Q_1^-)+ a_2 a_2^* ({}^*Q_2^- Q_2^-)]\, \Pi(s\,\varepsilon) \qquad (1.3.9)$$

Таке как

$$({}^*Q_1^+ Q_1^+)= (\psi^*_1+is\psi^*_0) (\psi_1 -is\, \psi_0)=\psi^*_1 \psi_1+\psi^*_0 \psi^*_0$$
$$({}^*Q_1^- Q_1^-) =(\psi^*_1-is\psi^*_0) (\psi_1 +is\, \psi_0)=\psi^*_1 \psi_1+\psi^*_0 \psi^*_0$$
$$({}^*Q_2^+ Q_2^+)=(\psi^*_2-is\, \psi^*_3) (\psi_2 +is\, \psi_3)=\psi^*_2 \psi_2+\psi^*_3 \psi^*_3$$
$$({}^*Q_2^- Q_2^-)=(\psi^*_2 +is\, \psi^*_3)(\psi_2 -is\, \psi_3)=\psi^*_2 \psi_2+\psi^*_3 \psi^*_3 \qquad (1.3.10)$$

то получаем

$$\psi^+(s\,\varepsilon,x)\, \psi(s\,\varepsilon,x)= \Pi(s\,\varepsilon)[\, (a^*_1 a_1+ a_1 a_1^*) (\psi^*_1 \psi_1+\psi^*_0 \psi^*_0)+$$
$$+(a^*_2 a_2 + a_2 a_2^*) (\psi^*_2 \psi_2+\psi^*_3 \psi^*_3)]\Pi(s\,\varepsilon), \quad (1.3.11)$$
$$\psi^+(s\,\varepsilon,x)\psi(s\,\varepsilon,x)=[(\psi^*_1\psi_1+\psi^*_0\psi^*_0)+(\psi^*_2\psi_2+\psi^*_3\psi^*_3)]\Pi(s\,\varepsilon)$$

ISSN 1512-1461

П4 Обобщение алгебры Клифорда и алгебры операторов Ферми на случиай пространство состоянии частицы.

Введенние вышее операторы уничтожения и рождения - а, a^* не зависат от состояния системи которой они меняют. Т.е. они не зависат от характеристики частицы уничтожению и порождению которого они обеспечивают.Подобная ситуация возникла потому, что величины γ_μ через которых были введены операторы а и a^*, сами являются элементами алгебры и независят от состояния системи. Таким образом возникает настоятельная необходимость расширпния алгебры Клифорда на случаи когда величины γ_μ зависят от параметров характеризующих состояние рассмотриваемой системи. В теории поля операторы Ферми- а и a^* являются наситетелем таких свойств.

Прстранство состоянии частицы характеризуется такими параметрами как спин частицы- s, знак энергии частицы – ε, импульс –k и, вожможно, другими т.н .внутренними квантовыми числами частицы. Спин – s и знак энергии – ε в случае уравнения Дирака принимают по две значения (±1) каждое, импульс –k может меняться непреривно на заданном интервале или иметь определенний дискретный спектр значении. Введем сборные индексы параметров пространства состоянии

$J =(s , \varepsilon , k ,,,) , \quad J' = (s', \varepsilon', k',,,),$ (1.4.1)

Величины γ_μ будем считать зависящими от указанных параметров

$\gamma_\mu (s , \varepsilon , k ,,,) = \gamma_\mu (J) , \quad \gamma_\nu (s', \varepsilon', k',,,) = \gamma_\nu (J')$ (1.4.2)

Обобщение алгебры Клифорда в пространстве Минковского с сигнатурой $\eta_{\mu\mu}$ =(+,+,+,-), (по μ суммироване нет), $\eta_{\mu\nu} =0$, $\mu \neq \nu$,μ ,ν= =1,2,3,4 на случии пространство состоянии введем следующим образом

$\{ \gamma_\mu (J) \gamma_\nu (J').\} =2 \eta_{\mu\nu} \delta_{JJ'}$ (1.4.3)

В случае J =J' из (2.4.3) получаем

$\{ \gamma_\mu (J) \gamma_\nu (J) \} =2 \eta_{\mu\nu}$ (1.4.4)

Т.е. $\gamma_\mu(J)$ и $\gamma_\nu(J)$ заданной в одной точке J пространства состояния подчиниются стандартной алгебре Клифорда.В случае $J \neq J'$ векличины $\gamma_\mu (J)$ и $\gamma_\nu (J')$ в (1.4.3) определены в разние точки J и J' пространство состояниии. Однако как и в случае искривленного пространства можно сравнивать только вектора которие находяться в одной точке. Для сравнения векторов заданных в разние точки необходимо сначала их паралельный перенос в одной точке.Так как в пространстве состояния метрика не задана то, место введения паралельного переноса векторов $\gamma_\mu (J)$ и $\gamma_\nu (J')$ введем блее жесткое но более простое требование- ортогональности $\gamma_\mu (J)$ и $\gamma_\nu (J')$ векторов.

$\gamma_\mu (J) \gamma_\nu (J') = 0 , \quad J \neq J', \quad \gamma_\mu (J) \gamma_\mu (J') = 0, \quad J \neq J'$ (1.4.5)

Для эрмитгого сопряжения имеем

$\gamma_n (J)^+ = \gamma_n (J), \quad \gamma_4 (J)^+= -\gamma_4 (J)$ (1.4.6

Операторы алгебры ферми a_i, a_i*, соответствующие величинам $\gamma_\mu(J)$,
также следует снобдить сборнимы индексами состояния J, J'
$a_i(s , \varepsilon , k ,,,) = a_i(J) \qquad a^*(s', \varepsilon', k',,,)= a^*(J')$ (1.4.7)
(1.2.6.) обобщенное на случии пространство состояние пимет вид

ISSN 1512-1461

γ_1 (J) = a_1(J) + a_1^*(J)., γ_2 (J) = a_2(J) + a_2^*(J).,
γ_3 (J) γ_1 (J) = a_1(J) - a_1^*(J)., γ_3 (J) γ_2 (J) = a_2(J) - a_2^*(J), (1.4.8)

a_i(J) = (1/2) [1 + γ_3 (J)] γ_i (J) = D_3^+(J) γ_i (J) , i = 1,2
a_i^*(J) =(1/2) [1 - γ_3 (J)] γ_i (J) = D_3^-(J) γ_i (J) (1.4.9)

a_i(J) и a^*(J) заданние в одной точке пространства состоянии J подчиняются алгебре **-**(1.2.21)

a_i(J) a_j(J) = a_i^*(J)a_j^*(J) = 0, {a_i(J) a_i(J)*}= 1 ,
П (-J){ a_i(J) a_j^*(J)} П (J) **= 0,** i≠j (1.4.10)

Из условия ортогональности γ_μ (J) и γ_ν (J') определенных в разные точки J ≠J' и определения (1.4.9)следует

a_i(J) a_j(J') = a_i(J)* a_j(J')* = a_i(J) a_j(J')* = 0, J≠ J'

П5 Запись спиноров- через операторы уничтожения и рождения завысящие от сотояния системи A(J), A(J)$^+$, B(J) , B^+(J)

При записе спиноров через оператори уничтожения и порождения завысящих от сотояния системи , удобнее место операторов a_i(J) a_i(J)*, определенных согласно(1.4.9), ввести оператори A(J), A(J)$^+$, B(J), B(J)$^+$ где

A= $2^{-1/2}$(a_1(J) + ia_2(J)), A^+= $2^{-1/2}$ (a_1^*(J) - ia_2^*(J)),
B = $2^{-1/2}$ (a_1 (J) - ia_2 (J)), B^+=$2^{-1/2}$ (a_1^*(J) + ia_2^*(J)), (1.5.1)

a_1(J) =$2^{-1/2}$ (A+ B)= 2^{-1} (γ_1 (J)+ γ_3 (J) γ_1 (J))=D_3^+ γ_1 (J)
ia_2(J) =$2^{-1/2}$(A- B)=2^{-1} i (γ_2 (J)+γ_3 (J)γ_2 (J)) =i$D_3^+$$\gamma_2$ (J)

a_1^*(J) =$2^{-1/2}$(A^+ + B^+)= 2^{-1} (γ_1 (J)- γ_3 (J) γ_1 (J)) =D_3^- γ_1 (J)
ia_2^*(J)= $2^{-1/2}$(-A^++ B^+)=2^{-1}i (γ_2 (J)-γ_3 (J) γ_2 (J))= iD_3^- γ_2 (J) (1.5.2)

При этом

γ_1 (J) = a_1(J) + a_1^*(J)., γ_2 (J) = a_2(J) + a_2^*(J).,
γ_3 (J) γ_1 (J) = a_1(J) - a_1^*(J)., γ_3 (J) γ_2 (J) = a_2(J) - a_2^*(J), (1.5.3)

Тогда находим

γ_1 (J)+iγ_2 (J)=$2^{1/2}$(A+B $^+$), γ_3(J)(γ_1(J)+iγ_2(J))=$2^{1/2}$(A-B $^+$) (1.5.4)
γ_1(J)-iγ_2(J)=$2^{1/2}$(B +A $^+$), γ_3(J)(γ_1(J)-iγ_2(J))=$2^{1/2}$(B -A $^+$), (1.5.5)

A= $2^{-3/2}$((1+ γ_3 (J)) (γ_1 (J)+i γ_2 (J)))= $2^{1/2}$ D_3^+ D_{12}^- γ_1 (J)
B= $2^{-3/2}$((1+ γ_3 (J)) (γ_1 (J)-i γ_2 (J))) = $2^{1/2}$ D_3^+ D_{12}^+ γ_1 (J)

A^+= $2^{-3/2}$((1- γ_3 (J)) (γ_1 (J) - i γ_2 (J))) = $2^{1/2}$ D_3^- D_{12}^+ γ_1 (J)
B^+=$2^{-3/2}$((1- γ_3 (J)) (γ_1 (J) +i γ_2 (J))) = $2^{1/2}$ D_3^- D_{12}^- γ_1 (J) (1.5.6)

Прямим вычислением можно показать, что

A (J) A (J)$^+$ =$2^{-2}$$D_3^+$ D_{12^-} , A^+(J) A (J) =2^{-2} D_3^- D_{12}^+
B (J) B (J)$^+$ =2^{-2} D_3^+ D_{12}^+ , B $^+$(J) B (J) = $2^{-2}$$D_3^-$ D^-_{12}
(A^+A+B B^+)=2^{-2} D_{12}^+, (A A^++ B^+ B) = $2^{-2}$$D^-_{12}$

ISSN 1512-1461

$\Pi(s\,\varepsilon)(A^+A+B\,B^+)\Pi(s\,\varepsilon)=\Pi(s\,\varepsilon)(A\,A^++B^+\,B)\Pi(s\,\varepsilon)=(1/8)\,\Pi(s\,\varepsilon)$
$(A^+A+B\,B^+)+(A\,A^++B^+\,B)=1/4$ (1.5.7)

Все остальние комбинации указанных операторов обращаются в нули.
Спинори(1.3.6)теперь через опратори A, B, A^+,B^+ можно записать в виде

$2^{+1/2}\psi(s\varepsilon,x)=[Q_1^+(A+B)+Q_1^-(A^++B^+)-iQ_2^-(A-B)+iQ_2^-(A^+-B^+)]\Pi(s\,\varepsilon)$, (1.5.8)

Или в виде

$$2^{+1/2}\psi(s\varepsilon,x)=[A(Q_1^+-iQ_2^-)+A^+(Q_1^-+iQ_2^-)+ \\ +B(Q_1^++iQ_2^-)+B^+(Q_1^--iQ_2^-)]\Pi(s\varepsilon),(1.5.9)$$

Для эрмитого сопряженной функции получаем

$$2^{+1/2}\psi^+(s\varepsilon,x)=\Pi(s\varepsilon)[A^+(Q^*{}_1^++iQ^*{}_2^-)+A(Q^*{}_1^--iQ^*{}_2^-)+ \\ +B^+(Q^*{}_1^+-iQ^*{}_2^-)+B(Q^*{}_1^-+iQ^*{}_2^-)]\ (1.5.10)$$

При этом для $\psi^+(s\varepsilon,x)\psi(s\varepsilon,x)$ находим

$$2\psi^+(s\varepsilon,x)\psi(s\varepsilon,x)=\Pi(s\varepsilon)\{[A^+A(Q^*{}_1^++iQ^*{}_2^-)(Q_1^+-iQ_2^-)+ \\ +AA^+(Q^*{}_1^--iQ^*{}_2^-)(Q_1^-+iQ_2^-)]+[BB^+(Q^*{}_1^-+iQ^*{}_2^-)(Q_1^--iQ_2^-)+ \\ +B^+B(Q^*{}_1^+-iQ^*{}_2^-)(Q_1^++iQ_2^-)]\}\Pi(s\varepsilon),\qquad(1.5.11)$$

При этом

$$\Pi(s\varepsilon)\,AA^+\,\Pi(s\varepsilon)=\Pi(s\varepsilon)\,B\,B^+\,\Pi(s\varepsilon)=(1/16)\,\Pi(s\varepsilon), \\ \Pi(s\varepsilon)\,A^+A\,\Pi(s\varepsilon)=\Pi(s\varepsilon)\,B^+\,B\,\Pi(s\varepsilon)=(1/16)\,\Pi(s\varepsilon),\qquad(1.5.12)$$

и согласно (1.5.6)-(1.5.7) все другие члени равный нулью и получаем

$$32\psi^+(s\varepsilon,x)\psi(s\varepsilon,x)=\{[(Q^*{}_1^++iQ^*{}_2^-)(Q_1^+-iQ_2^-)+(Q^*{}_1^--iQ^*{}_2^-)(Q_1^-+iQ_2^-)]+ \\ +[(Q^*{}_1^-+iQ^*{}_2^-)(Q_1^--iQ_2^-)+(Q^*{}_1^+-iQ^*{}_2^-)(Q_1^++iQ_2^-)]\}\Pi(s\varepsilon)=, \\ =2[(^*Q_1^+\,Q_1^++{}^*Q_2^-\,Q_2^-)+(^*Q_1^-\,Q_1^-+{}^*Q_2^-\,Q_1^-)]\,\Pi(s\varepsilon),\qquad(1.5.13)$$

Согласно (1.3.10) получаем

$8\psi^+(s\varepsilon,x)\psi(s\varepsilon,x)=[(\psi^*{}_0\psi_0+\psi^*{}_1\psi_1)+(\psi^*{}_2\psi_2+\psi^*{}_3\psi_3)]\Pi(s\,\varepsilon)$ (1.5.14)

При записе спинора в гиперкомплексном формализме спинор содержит 4-ий свободных комлексных функции. При этом, каждая функция может находится в 4-ех состоянях.Таким образом, имеется 16-свободных комплексных функции.В таком случае операторы A,A^+,B,B^+ представляют сабой лишь проэкционные оператори алгебри.Для превращения их в оператори пораждения и уничтожения необходимо число свободных функции в спиноре привести в соответствии к числу состояния системи.Для этого необходимо построеный выше спинор подчинить уравнениюДирака. Спинори Дирака содержат только по 4- свободных комплексных функции соответствующие 4-ем возможным состляням электрона и обеспечивают совподение число свободных функции к числу состоянии системи.Для польного определения операторов A, A^+, B, B^+ как операторов порождения и уничтожения тоже самое необходимо сделать и в случае спинора построенного в гиперкомплексном формализме. Посколько в гиперкомплексном формализме оператори пораждения и уничтожения вводится через алгебры а не через рещения, то запись спинора в виде (1.5.8)-

ISSN 1512-1461

(1.5.10) независит от того подчиняется спинор линейному или нелинейному уравнению Дирака.Однако в случае нелинейного уравнения возникают дополнительние трудноси, в частности с решением нелинейного уравнения Дирака.В связы с этим, в данной работе, рассмотривается только случай линейного уравнения Дирака.

§2 Вторичное квантование спинорного поля в формализме гиперкомплексного числа

П1 Запис решения свободного уравнения Дирака с массой покоя k_0=m/ђc в формализме гиперкомплексного числа

Рассмотрим решение уравнении Дирака с массой покоя k_0=m/ђc

$(\gamma_\mu\,(\partial/\partial x_\mu) - k_0\,)\psi = 0,\qquad x_\mu(x_n , t\,)\,,\ \mu = n\,,4,\quad n = 1,2,3$

$\psi^\wedge\,(\gamma_\mu\,(\partial/\partial x_\mu) + k_0\,) = 0,\qquad (2.1.1)$

где $\gamma_\mu = \gamma_\mu(J)$, ψ-спинор записанный в гиперкомплексние числа

$\gamma_4^2 = -1,\ \ \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = 1,\ \gamma_4^+ = -\,\gamma_4,\ \ \gamma_n^+ = \gamma_n\ .\ \gamma_\mu = \gamma_\mu(\,J),\ (1.1.2)$

Решение будем искать в виде

$\psi = \Sigma_{\,J\,k}\ \varphi_{\,J\,k}\exp[i(-Kt + k_n\,x_n)]\Pi(\varepsilon, s),\qquad (2.1.3)$

$\Pi(\varepsilon, s) = \Pi(J) = D_4^{\varepsilon}(J)\ D_{13}^{s}(J),\quad J = J\,(\varepsilon, s,)$

При этом $\varphi_{\,Jk} = \varphi\,(J,k) = \varphi\,(\varepsilon, s, k)$ кватернион вида

$\varphi_{\,Jk} = (\varphi_0\,(J,k)I + \varphi_1(J,k)\gamma_1 + \varphi_2(J,k)\gamma_2 + \varphi\,(J,k)_3\gamma_1\gamma_2\,),\qquad (2.1.4)$

Наличие проэкционного оператора Π(ε,s)=Π(J) с 4-мя возможними значенями Π(+, +), Π(+, -), Π(-, +), Π(-, -) в решение (2.1.3) вводит 16 функции, котрие можно представить как 4-ий функции $\varphi_0(J)$, $\varphi_1(J)$,
$\varphi_2(J)$ и $\varphi\,(J)_3$ с 4-мя возможними состояниями – J кождое.

Деиствительно, функция φ(ε, s) нам заданно как кватернион(2.1.4) в то время как уравнении требуют задание функции φ через параметри
(ε,s) т.е.в виде

$\varphi = \varphi(\varepsilon, s)\qquad (2,1.5)$

Что бы установить выд функции φ =φ(ε, s) рассмотрим обший вектор адгебри { γ_μ }величин $\mathbf{\Psi_{16}(\varepsilon s)}$. Имеем

$$\mathbf{\Psi_{16}(\varepsilon s)} = I\boldsymbol{\varphi_0} + \gamma_1\,\boldsymbol{\varphi_1} + \gamma_2\,\boldsymbol{\varphi_2} + \gamma_3\,\boldsymbol{\varphi_3} + \gamma_4\,\boldsymbol{\varphi_4} + \gamma_1\gamma_2\,\boldsymbol{\varphi_{12}} + \gamma_1\gamma_3\,\boldsymbol{\varphi_{13}} + \\ + \gamma_1\,\gamma_4\,\boldsymbol{\varphi_{14}} + \gamma_2\,\gamma_3\boldsymbol{\varphi_{23}} + \gamma_2\,\gamma_4\,\boldsymbol{\varphi_{24}} + \gamma_3\,\gamma_4\,\boldsymbol{\varphi_{34}} + \gamma_1\gamma_2\,\gamma_3\,\boldsymbol{\varphi_{123}} + \\ + \gamma_1\gamma_2\,\gamma_4\,\boldsymbol{\varphi_{124}} + \gamma_1\gamma_3\,\gamma_4\,\boldsymbol{\varphi_{134}} + \gamma_2\gamma_3\,\gamma_4\,\boldsymbol{\varphi_{234}} + \gamma_1\gamma_2\,\gamma_3\,\gamma_4\boldsymbol{\varphi_{1234}}\qquad (2,1.6)$$

Рассмотрим форму $\mathbf{\Psi_{16}(\varepsilon s)}\,D_4^{\varepsilon}$ и учтем,что

$D_4^{\varepsilon} = (1/2)(1 + \varepsilon i\,\gamma_4\,)\,,\ \gamma_4\,D_4^{\varepsilon} = (-\,\varepsilon i)\,D_4^{\varepsilon}.$

в результате получаем

$$\mathbf{\Psi_{16}(\varepsilon s)}D_4^{\varepsilon} = [I\boldsymbol{\varphi_0} + \gamma_1\,\boldsymbol{\varphi_1} + \gamma_2\,\boldsymbol{\varphi_2} + \gamma_3\,\boldsymbol{\varphi_3} + (-\,\varepsilon i)\,\boldsymbol{\varphi_4} + \gamma_1\gamma_2\,\boldsymbol{\varphi_{12}} + \\ + \gamma_1\gamma_3\,\boldsymbol{\varphi_{13}} + (-\,\varepsilon i)\ \gamma_1\ \boldsymbol{\varphi_{14}} + \gamma_2\gamma_3\boldsymbol{\varphi_{23}} + (-\,\varepsilon i)\gamma_2\,\boldsymbol{\varphi_{24}} + \\ + (-\,\varepsilon i)\,\gamma_3\,\boldsymbol{\varphi_{34}} + \gamma_1\gamma_2\,\gamma_3\,\boldsymbol{\varphi_{123}} + (-\,\varepsilon i)\,\gamma_1\gamma_2\,\boldsymbol{\varphi_{124}} + (-\,\varepsilon i)\,\gamma_1\gamma_3\ \boldsymbol{\varphi_{134}} + \\ + (-\,\varepsilon i)\ \gamma_2\gamma_3\ \boldsymbol{\varphi_{234}} + (-\,\varepsilon i)\ \gamma_1\gamma_2\,\gamma_3\,\boldsymbol{\varphi_{1234}}]\ D_4^{\varepsilon} =$$

ISSN 1512-1461

$$=[\mathbf{I}(\varphi_0 - \varepsilon i\, \varphi_4)+\gamma_1(\varphi_1 - \varepsilon i\, \varphi_{14})+\gamma_2(\varphi_2 - \varepsilon i\, \varphi_{24})+\gamma_3(\varphi_3 - \varepsilon i \varphi_{34})+ +\gamma_1\gamma_2(\varphi_{12} - \varepsilon i\, \varphi_{124})+ +\gamma_1\gamma_3(\varphi_{13} - \varepsilon i\, \varphi_{134})+ \gamma_2\gamma_3(\varphi_{23}- -\varepsilon i\varphi_{234})+\gamma_1\gamma_2\gamma_3(\varphi_{123}- \varepsilon i\, \varphi_{1234})]\, D_4^{\varepsilon}$$

т.е.

$$\Psi_{16}(\varepsilon s)D_4^{\varepsilon} =\mathbf{I}(\varphi_0 - \varepsilon i\, \varphi_4)+ \gamma_1(\varphi_1 - \varepsilon i\, \varphi_{14})+ \gamma_2(\varphi_2 - \varepsilon i\, \varphi_{24})+ +\gamma_3(\varphi_3 - \varepsilon i\varphi_{34})+\gamma_1\gamma_2(\varphi_{12} - \varepsilon i\, \varphi_{124})+\gamma_1\gamma_3(\varphi_{13}- \varepsilon i\, \varphi_{134})+ +\gamma_2\gamma_3(\varphi_{23}- \varepsilon i\varphi_{234}))+\gamma_1\gamma_2\gamma_3(\varphi_{123}- \varepsilon i\, \varphi_{1234})]\, D_4^{\varepsilon} \qquad (2,1.7)$$

Рассмотрим также форму $\Psi_{16}(\varepsilon s)\, D_4^{\varepsilon}\, D_{13}^{s}$ и учтем,что

$D_{13}^{s} =(1/2)(1+ si\, \gamma_1\gamma_3)$, $\gamma_3 D_{13}^{s} = (- si)\, \gamma_1 D_{13}^{s}$

в результате получаем

$$\Psi_{16}(\varepsilon s)\, D_4^{\varepsilon} D_{13}^{s} = [\mathbf{I}(\varphi_0 - \varepsilon i\, \varphi_4) + \gamma_1(\varphi_1 - \varepsilon i\, \varphi_{14})+ \gamma_2(\varphi_2 - \varepsilon i\, \varphi_{24})+ +(- si)\, \gamma_1(\varphi_3 - \varepsilon i\varphi_{34})+ \gamma_1\gamma_2(\varphi_{12} - \varepsilon i\, \varphi_{124})+ (- si)\,(\varphi_{13} - \varepsilon i\, \varphi_{134})+ +(si)\, \gamma_1\gamma_2(\varphi_{23}- \varepsilon i\varphi_{234})+\gamma_2\, si\,(\varphi_{123}- \varepsilon i\, \varphi_{1234})]\, D_4^{\varepsilon} D_{13}^{s}$$

т.е.

$$\Psi_{16}(\varepsilon s)D_4^{\varepsilon}D_{13}^{s}=\{\mathbf{I}[(\varphi_0 - \varepsilon i\, \varphi_4)- si\,(\varphi_{13} - \varepsilon i\, \varphi_{134})] + +\gamma_1[(\varphi_1 - \varepsilon i\, \varphi_{14})- si\,(\varphi_3 - \varepsilon i\varphi_{34})]+ +\gamma_2[(\varphi_2 - \varepsilon i\, \varphi_{24})+ si\,(\varphi_{123}- \varepsilon i\, \varphi_{1234})]+ +\gamma_1\gamma_2[(\varphi_{12} - \varepsilon i\, \varphi_{124})+ si\,(\varphi_{23}- \varepsilon i\varphi_{234})]\}\, D_4^{\varepsilon} D_{13}^{s} \qquad (2,1.8)$$

Или вводия обозначение

$$\Psi_{16}(\varepsilon s)= \Psi(\varepsilon s) \qquad (2,1.9)$$

будем имееть

$$\Psi(\varepsilon s)\, D_4^{\varepsilon} D_{13}^{s} = \{\mathbf{I}[(\varphi_0 - \varepsilon i\, \varphi_4)- si\,(\varphi_{13} - \varepsilon i\, \varphi_{134})] + + \gamma_1[(\varphi_1 - \varepsilon i\, \varphi_{14})- si\,(\varphi_3 - \varepsilon i\varphi_{34})]+ +\gamma_2[(\varphi_2 - \varepsilon i\, \varphi_{24})+ si\,(\varphi_{123}- \varepsilon i\, \varphi_{1234})]+ +\gamma_1\gamma_2[(\varphi_{12} - \varepsilon i\, \varphi_{124})+ si\,(\varphi_{23}- \varepsilon i\varphi_{234})]\}\, D_4^{\varepsilon}D_{13}^{s} \qquad (2,1.10)$$

В частности для искомой функции $\varphi= \varphi(\varepsilon s)$ получаем

$$\Psi(\varepsilon s)= \mathbf{I}[(\varphi_0 - \varepsilon i\, \varphi_4)- si\,(\varphi_{13} - \varepsilon i\, \varphi_{134})] + +\gamma_1[(\varphi_1 - \varepsilon i\, \varphi_{14})- si\,(\varphi_3 - \varepsilon i\varphi_{34})]+ +\gamma_2[(\varphi_2 - \varepsilon i\, \varphi_{24})+ si\,(\varphi_{123}- \varepsilon i\, \varphi_{1234})]+ +\gamma_1\gamma_2[(\varphi_{12} - \varepsilon i\, \varphi_{124})+ si\,(\varphi_{23}- \varepsilon i\varphi_{234})] \qquad (2, 1.11)$$

Для компонент находим

$$\Psi(++)_1= \mathbf{I}[(\varphi_0 -i\, \varphi_4)- i\,(\varphi_{13} - i\, \varphi_{134})] + +\gamma_1[(\varphi_1 - i\, \varphi_{14})- i\,(\varphi_3 - i\varphi_{34})]+ + \gamma_2[(\varphi_2 - i\, \varphi_{24})+ i\,(\varphi_{123}- i\, \varphi_{1234})]+ +\gamma_1\gamma_2[(\varphi_{12} - i\, \varphi_{124})+ i\,(\varphi_{23}- i\varphi_{234})]$$

$$\Psi(+-)_2= \mathbf{I}[(\varphi_0 - i\, \varphi_4)+i\,(\varphi_{13} - i\, \varphi_{134})] + + \gamma_1[(\varphi_1 - i\, \varphi_{14}) +i\,(\varphi_3 - i\varphi_{34})]+ + \gamma_2[(\varphi_2 - i\, \varphi_{24}) -i\,(\varphi_{123}- i\, \varphi_{1234})]+$$

ISSN 1512-1461

$+\gamma_1\gamma_2$ $\mathbf{[(\varphi_{12} - i\, \varphi_{124})}$$-i\,\mathbf{(\varphi_{23}- i\varphi_{234})]}$

$\mathbf{\Psi\ (-+)_3= I[(\varphi_0} + i\, \mathbf{\varphi_4)}- i\, \mathbf{(\varphi_{13}} + i\, \mathbf{\varphi_{134})] +}$
$+ \gamma_1[\mathbf{(\varphi_1} + i\, \mathbf{\varphi_{14})}- i\, \mathbf{(\varphi_3} + i\mathbf{\varphi_{34})]+}$
$+ \gamma_2\ \mathbf{[(\varphi_2} + i\, \mathbf{\varphi_{24})}+ i\, \mathbf{(\varphi_{123}}+i\ \mathbf{\varphi_{1234})]+}$
$+\gamma_1\gamma_2\ \mathbf{[(\varphi_{12}} + i\, \mathbf{\varphi_{124})}+ i\,\mathbf{(\varphi_{23}}+i\mathbf{\varphi_{234})]}$

$\mathbf{\Psi\ (--)_4= I[(\varphi_0} + i\, \mathbf{\varphi_4)} + i\, \mathbf{(\varphi_{13}} + i\, \mathbf{\varphi_{134})] +}$
$+\gamma_1[\mathbf{(\varphi_1} + i\, \mathbf{\varphi_{14})} + i\, \mathbf{(\varphi_3} + i\mathbf{\varphi_{34})]+}$
$+ \gamma_2\ \mathbf{[(\varphi_2} + i\, \mathbf{\varphi_{24})- i\, (\varphi_{123}}+i\ \mathbf{\varphi_{1234})]+}$
$+ \gamma_1\gamma_2\ \mathbf{[(\varphi_{12}} + i\, \mathbf{\varphi_{124})}-\ i\,\mathbf{(\varphi_{23}}+i\mathbf{\varphi_{234})]}$ (2, 1.12)

Таким образом имеем

$\mathbf{\Psi\ (\varepsilon s)}\ D_4^{\varepsilon}\ D_3^{s}\ \mathbf{=[I\ \varphi\ (\varepsilon s)_1}+\gamma_1\ \mathbf{\varphi\ (\varepsilon s)_2}+\gamma_2\ \mathbf{\varphi\ (\varepsilon s)_3} +\gamma_1\gamma_2\mathbf{\varphi\ (\varepsilon s)_4]}\ D_4^{\varepsilon}D_3^{s}$

$\mathbf{\Psi\ (\varepsilon s)= [I\ \varphi\ (\varepsilon s)_1+}\ \gamma_1\ \mathbf{\varphi\ (\varepsilon s)_2} + \gamma_2\ \mathbf{\varphi\ (\varepsilon s)_3} + \gamma_1\ \gamma_2\ \mathbf{\varphi\ (\varepsilon s)_4]}$ (2, 1.13)

где
$\mathbf{\varphi\ (\varepsilon s)_1=[(\varphi_0} - \varepsilon i\ \mathbf{\varphi_4)}- si\ \mathbf{(\varphi_{13}} - \varepsilon i\ \mathbf{\varphi_{134})]}$
$\mathbf{\varphi\ (\varepsilon s)_2}=[\mathbf{(\varphi_1} - \varepsilon i\ \mathbf{\varphi_{14})}- si\ \mathbf{(\varphi_3} - \varepsilon i\mathbf{\varphi_{34})]+}$
$\mathbf{\varphi\ (\varepsilon s)_3}=[\mathbf{(\varphi_2} - \varepsilon i\ \mathbf{\varphi_{24})}+ si\ \mathbf{(\varphi_{123}}- \varepsilon i\ \mathbf{\varphi_{1234})]}$
$\mathbf{\varphi\ (\varepsilon s)_4=[(\varphi_{12}} - \varepsilon i\ \mathbf{\varphi_{124})}+ si\,\mathbf{(\varphi_{23}}- \varepsilon i\mathbf{\varphi_{234})]}$ (2, 1.14)

Подставляя (2.1.3) в (2.1.1) получаем

$(-i\ K\gamma_4 + i\ k_n\ \gamma_n + k_0)\ \varphi_{Jk}\,\Pi(J) = 0$ (2.1.15)

Если (2.1.4) подставить в (2.1. 15), учесть соотношения

$i\ \gamma_4\ D_4^{\varepsilon}(J) = \varepsilon\ D_4^{\varepsilon}(J)$, $i\ \gamma_3\ D_{13}^{s}(J) = s\ \gamma_1\ D_{13}^{s}(J)$
$i\ \gamma_1\ D_{13}^{s}(J) =- s\ \gamma_3\ D_{13}^{s}(J)$, $i\ \gamma_1\ \gamma_3\ D_{13}^{s}(J) = s\ D_{13}^{s}(J)$, (2.1. 16)

и коефициенти стоящие перед базисними элементами алгебры
$(I, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_1\gamma_2)$ приравнять нулю,то получаем следующие четыре уравнения

1. $(-\varepsilon K + k_0)\ \varphi_0(J,k)+ (i\ k_1 - s\ k_3)\ \varphi_1(J,k) + i\ k_2\ \varphi_2(J,k) =0$
2. $(+\varepsilon K + k_0)\ \varphi_1(J,k)+ (i\ k_1+s\ k_3)\ \varphi_0(J,k) - i\ k_2\ \varphi_3(J,k) =0$
3. $(+\varepsilon K + k_0)\varphi_2(J,k)+ (i\ k_1 - s\ k_3)\ \varphi_3(J,k) + i\ k_2\ \varphi_0(J,k) =0$
4. $(-\varepsilon K+k_0)\varphi_3(J,k)+(i\ k_1+s\ k_3)\varphi_2(J,k) - i\ k_2\ \varphi_1(J,k) =0$, (2.1. 17)

Из условии разрешимости системи получаем

$\Delta =(\varepsilon K)^2- k_1^2- k_2^2- k_3^2- k_0^2)^2 =0,\ \varepsilon =\pm 1$
$(\varepsilon K)=\pm(k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_0^2)^{1/2}$, $K=(k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_0^2)^{1/2}$, (2.1. 18)

Ограничимся рассмотрением одномерного движения $k_1= k_3=0$, $k_2 = k$, Тогда (2.1. 17) примет вид

1.$(-\varepsilon K+k_0)\varphi_0(J)+i\ k\varphi_2(J)=0$, 3.$(\varepsilon K+k_0)\varphi_2(J)+ik\varphi_0(J) =0$, (2.1. 19)

ISSN 1512-1461

$2\ (\varepsilon K+k_0)\varphi_1(J)-ik\ \varphi_3(J)=0,\ \ 4.(-\varepsilon K+k_0)\varphi_3(J)\ ik\varphi_1(J)=0,$ (2.1.20)

Откуда из возможных вариантов решении выбирем решения

$\varphi_0(J)=-i\ \eta\ (k)\ \varphi_2(J)\ ,\quad \varphi_3(J)\ =i\ \eta\ (k)\ \varphi_1(J),$
$\eta\ (k,\varepsilon)=\ k/(-\varepsilon K+k_0),\quad i\ \gamma_1\ \gamma_3\ D_{13}^s(J)=s\ D_{13}^s(J),$ (2.1. 21)

Число независимых функции в (2.1.3) соотношение (2.1. 21) уменшает в два раза.С учом (2.1.16), (2.1. 21) кватернион $\varphi(J)$ - (2.1.4) можно записать в виде

$\varphi(J)=\{\gamma_1\varphi_1(J)+s\eta\ (k,\varepsilon)\ \gamma_1\gamma_3\varphi_2\ (J)+\gamma_2\varphi_2(J)-s\eta\ (k,\varepsilon)\ \gamma_2\gamma_3\varphi_1(J)\}\Pi(J),$ (2.1. 22)

Таким образом, имеем четыре состояния- J_i , $i=1,2,3,4$ и восем функции (комплексных) - $\varphi_1(J_i)$ и $\varphi_2(J_i)$. Перенумируем эти состяния в виде

$J_1=J(\varepsilon=+,\ s=+)\ ,J_2=J(\varepsilon=+,\ s=-),\ J_3=J(\varepsilon=-,\ s=-)\ ,J_4=J(\varepsilon=-,\ s=+)$ (2.1. 23)

Тогда из (2.1. 22) и (2.1. 23) следует

$\varphi(J_i)_k\ =\{[\gamma_1\varphi_1(J_i)-s\ \eta\ (k,\varepsilon)\ \gamma_3\ \gamma_1\ \varphi_2\ (J_i)]+$
$\quad +[\gamma_2\ \varphi_2(J_i)+s\ \eta\ (k,\varepsilon)\ \gamma_3\ \gamma_2\ \varphi_1\ (J_i)\ ]\}_k\Pi(J_i)$
$\gamma_1=\gamma_1(J_i),\ \gamma_2=\gamma_2(J_i),\ \ \gamma_3=\gamma_3(J_i),\ i=1,2$ (2.1. 24)
$\varphi(J_j)_{-k}\ =\{[\gamma_1\varphi_1(J_j)+s\ \eta\ (k,\varepsilon)\ \gamma_3\ \gamma_1\ \varphi_2\ (J_j)]+$
$\quad +[\gamma_2\ \varphi_2(J_j)-s\ \eta\ (k,\varepsilon)\ \gamma_3\ \gamma_2\ \varphi_1\ (J_j)\ ]\}_{-k}\ \Pi(J_j)$
$\gamma_1=\gamma_1(J_i),\ \gamma_2=\gamma_2(J_i),\ \ \gamma_3=\gamma_3(J_i),\ j=3,4.$ (2.1. 25)

Так как согласно $\eta(-k,\ \varepsilon)=-\eta\ (k,\ \varepsilon)$ изменение знака k равносильно изменению знака s в уравнение, то состояния $\varphi(J_i)_k$ сопоставлен с $i=1,2$ и состояния $\varphi(J_i)_{-k}$ с $i=3,4$. Для уменшения числа свободных (лишных) функции введем допольнительное условие

$\varphi_2=i\ \varphi_1,\ \ \varphi_2^*=-i\ \varphi_1^*,$ (2.1. 26)

Соггласно (2,14) уравнение (2.1.26) представляет собой систему четырех уравнение, которые всегда можно удовлетворить. В результате остается четыре функции (комплексных)- $\varphi_1(J_i)$ и вырожении (2.1. 24) , (2.1. 25) упрощаются и получаем

$\varphi(J_i)_k=\{[(\gamma_1-is\ \eta\ (k,\varepsilon)\gamma_3\ \gamma_1)+(i\gamma_2+s\ \eta\ (k,\varepsilon)\ \gamma_3\ \gamma_2\ )]\varphi_1\ (J_i)\}_k\Pi(J_i).,$
$\varphi(J_i)_k=\{[(\gamma_1+i\gamma_2)-is\eta\ (k,\varepsilon)(\gamma_3\gamma_1+i\gamma_3\gamma_2)]\varphi_1(J_i)\}_k\Pi(J_i)$
$\quad \gamma_1=\gamma_1(J_i),\ \gamma_2=\gamma_2(J_i),\ \ \gamma_3=\gamma_3(J_i),\ i=1,2$

$\varphi(J_j)_{-k}\ =\{(\gamma_1+is\ \eta\ (k,\varepsilon)\gamma_3\ \gamma_1)+(i\gamma_2-s\ \eta\ (k,\varepsilon)\gamma_3\gamma_2)\ ]\ \varphi_1\ (J_i)\}_{-k}\Pi(J_j)$
$\varphi(J_j)_{-k}=\{[(\gamma_1+i\gamma_2)+is\eta\ (k,\varepsilon)(\gamma_3\gamma_1+i\gamma_3\gamma_2)]\varphi_1(J_i)]\}_{-k}\Pi(J_i)$
$\quad \gamma_1=\gamma_1(J_i),\ \gamma_2=\gamma_2(J_i),\ \ \gamma_3=\gamma_3(J_i),\ i=3,4.$ (2.1. 27)

Решение при этом запишется в виде

$\psi=\Sigma_{Jk}\varphi_{Jk}\exp[i(-Kt+k_nx_n)=\Sigma_k[\varphi(J_1,k)+\varphi(J_2k)+$
$\quad +\varphi(J_3,-k)+\varphi(J_4,-k)]\exp[i(-Kt+k_nx_n),$ (2.1. 28)

ISSN 1512-1461

Все эти функции φ_{Jk} взаимно ортогональние.Ортогональность состоянии обеспечивают проекционне оператори. Однако удобнее ортогональность собственных функции зафиксировать явно через коефициенты

$$\alpha_1 =(1/4)(1+\varepsilon)(1+s),\quad \alpha_2 =(1/4)(1+\varepsilon)(1-s),$$
$$\alpha_3 =(1/4)(1-\varepsilon)(1-s),\quad \alpha_4 =(1/4)(1-\varepsilon)(1+s), \qquad (2.1.29)$$

Тогда обшое решенре можно записать в виде

$$\psi=\Sigma_k[\alpha_1\varphi(J_1,k)+ \alpha_2\varphi(J_2,k)+$$
$$+\alpha_3\varphi(J_3,-k)+ \alpha_4\varphi(J_4,-k)]\exp[i(-Kt+k_nx_n), \qquad (2.1.30)$$

Аналогично для эрмитого сопряжонной функции имеем

$$\varphi(J_i)^+{}_k = \{[\gamma_1\varphi_1(J_i)^+ +s\,\eta(k,\varepsilon)\gamma_3\gamma_1\varphi_2(J_i)^+]_k +$$
$$+[\gamma_2\varphi_2(J_i)^+ -s\,\eta(k,\varepsilon)\gamma_3\gamma_2\varphi_1(J_i)^+]\}_k$$
$$\gamma_1=\gamma_1(J_i),\ \gamma_2=\gamma_2(J_i),\ \gamma_3=\gamma_3(J_i),\ i=1,2 \qquad (2.1.31)$$

$$\varphi(J_j)_{-k}{}^+ = -\Pi(J_j)\{[\gamma_1\varphi_1(J_j)^+ -s\,\eta(k,\varepsilon)\gamma_3\gamma_1\varphi_2(J_j)^+] +$$
$$+[\gamma_2\varphi_2(J_j)^+ +s\,\eta(k,\varepsilon)\gamma_3\gamma_2\varphi_1(J_j)^+]\}_{-k}$$
$$\gamma_1=\gamma_1(J_i),\ \gamma_2=\gamma_2(J_i),\ \gamma_3=\gamma_3(J_i),\ i=3,4. \qquad (2.1.32)$$

и после учета (2.1.16) будем имееть

$$\varphi(J_i)^+{}_k = -\Pi(J_i)\ \{(\gamma_1 - is\,\eta(k,\varepsilon)\gamma_3\gamma_1)\varphi_1(J_i)^+ +$$
$$+(-i\gamma_2 - s\,\eta(k,\varepsilon)\gamma_3\gamma_2)\varphi_1(J_i)^+]\}_k$$
$$\varphi(J_i)^+{}_k=-\Pi(J_i)\{(\gamma_1-i\gamma_2)-is\eta(k,\varepsilon)(\gamma_3\gamma_1-i\gamma_3\gamma_2)\varphi_1(J_i)^+\}_k$$
$$\gamma_1=\gamma_1(J_i),\ \gamma_2=\gamma_2(J_i),\ \gamma_3=\gamma_3(J_i),\ i=1,2 \qquad (2.1.33)$$

$$\varphi(J_j)^+{}_{-k} =-\Pi(J_i)\ \{(\gamma_1 + is\,\eta(k,\varepsilon)\gamma_3\gamma_1)\varphi_1(J_j)^+ -$$
$$-(i\gamma_2 - s\,\eta(k,\varepsilon)\gamma_3\gamma_2)\varphi_1(J_j)^+]\}_k$$
$$\varphi(J_i)^+{}_{-k}=-\Pi(J_i)\{(\gamma_1-i\gamma_2)+is\eta(k,\varepsilon)(\gamma_3\gamma_1-i\gamma_3\gamma_2)\varphi_1(J_i)^+\}_k$$
$$\gamma_1=\gamma_1(J_i),\ \gamma_2=\gamma_2(J_i),\ \gamma_3=\gamma_3(J_i),\ i=3,4 \qquad (2.1.34)$$

Тогда обшое эрмитого сопряжонное решенре можно записать в виде

$$\psi^+=\Sigma_k[\alpha_1\varphi^+(J_1,k)+ \alpha_2\varphi^+(J_2,k)+$$
$$+\alpha_3\varphi^+(J_3,-k)+ \alpha_4\varphi^+(J_4,-k)]\exp[-i(-Kt+k_nx_n), \qquad (2.1.35)$$

Аналогично имеем для сопряжонной по Дираку функции $\psi^\wedge = \Psi^+ i\gamma_4$ (учитивыая что $i\gamma_4 D_4^\varepsilon(J) = \varepsilon D_4^\varepsilon(J)$)

$$\varphi(J_i)^\wedge{}_k= -\varepsilon\,\Pi(J_i)\{(\gamma_1-i\gamma_2)+is\eta(k,\varepsilon)(\gamma_3\gamma_1-i\gamma_3\gamma_2)\varphi_1(J_i)^+\}_k$$
$$\gamma_1=\gamma_1(J_i),\ \gamma_2=\gamma_2(J_i),\ \gamma_3=\gamma_3(J_i),\ i=1,2$$
$$\varphi(J_i)^\wedge{}_{-k}=-\varepsilon\,\Pi(J_i)\{(\gamma_1-i\gamma_2)-is\eta(k,\varepsilon)(\gamma_3\gamma_1-i\gamma_3\gamma_2)\varphi_1(J_i)^+\}_k$$
$$\gamma_1=\gamma_1(J_i),\ \gamma_2=\gamma_2(J_i),\ \gamma_3=\gamma_3(J_i),\ i=3,4 \qquad (2.1.36)$$

Как выдим

$$\varphi(J_i)^\wedge{}_k= -\varepsilon\,\varphi(J_i,-\eta)^+{}_k$$

Тогда обшое сопряжонной по Дираку решение можно записать в виде

ISSN 1512-1461

ψ^= $\Sigma_k\{[\alpha_1\varphi_k(J_1,\kappa)^+ +\alpha_2\ \varphi_k(J_2,\kappa)^+]$-
$-[\alpha_3\varphi_{-k}(J_3,-\kappa)^+ +\alpha_4\varphi_{-k}(J_4,-\kappa)^+]\}\ \exp[-i(-Kt+k_n x_n)$, (2. 1. 37)

Следует подчеркнуть, что в окончательных выроженях в виде $\varphi_k(J)$ входит только компонента кватерниона (спинора) $\varphi_k(J)=\varphi_{1\ k}(J)$

П2 Запись волнлвой функйии -решения свободного уравнения Дирака через операторы рождения и уничтожения.

Полученние нами решения свободного уравнения Дирака (2.1.27)- (2.1.37) теперь следует записать чероез операторы Ферми. Из (2.1.27) после учета (2.1 .21) следует

$(\gamma_1+i\gamma_2)-is\eta_1(\gamma_3\gamma_1+i\gamma_3\gamma_2)=(1-is\eta_1)(a_1(J)+i\ a_2(J))+(1+is\eta_1)(a_1(J)^+ +ia_2(J)^+)$,
$(\gamma_1+i\gamma_2)+is\eta(\gamma_3\gamma_1+i\gamma_3\gamma_2)=(1+is\eta_2)(a_1(J)+ia_2(J))+(1-is\eta_2)(a_1(J)^+ +ia_2(J)^+)$
$\eta_1=\eta\ (k,\varepsilon=+)=k/(-K+k_0)$, $\eta_2=\eta(k,\varepsilon=-)=k/(K+k_0)$, (2.2.1)

η_1 соответствует состояням J_1 и J_2, η_2 - J_3 и J_4.Учитивая (2.2.1)получаем

$(\gamma_1+i\gamma_2)-is\eta_1\ (\gamma_3\gamma_1+i\gamma_3\gamma_2)=2^{-1/2}\ [(1-is\eta_1)A+(1+is\eta_1)B^+]$
$(\gamma_1+i\gamma_2)+is\eta_2\ (\gamma_3\gamma_1+i\gamma_3\gamma_2)=2^{-1/2}\ [(1+is\eta_2)A+(1-is\eta_2)\ B^+]$ (2.2.2)

Тогда решения (2.1.27) примут вид

$2^{1/2}\ \varphi(J_i)_k=\{[\ (1-is\eta_1)\ A+(1+is\eta_1)B^+]\varphi_1(J_i)\}_k\Pi(J_i)$
$\gamma_1=\gamma_1(J_i),\ \gamma_2=\gamma_2(J_i),\ \ \gamma_3=\gamma_3(J_i),\ \ \ i=1,.2$
$2^{1/2}\varphi(J_j)_{-k}=\{[(1+is\eta_2)A+(1-is\eta_2)B^+]\varphi_1(J_i)]\}_{-k}\Pi(J_i)$
$\gamma_1=\gamma_1(J_i),\ \gamma_2=\gamma_2(J_i),\ \ \gamma_3=\gamma_3(J_i),\ \ \ i=3,4$ (2.2.3)

В случае эрмитого сопряженной функции $\varphi(J_i)_k^+$, $\varphi(J_j)^+_{-k}$ имеем

$[(\gamma_1-i\gamma_2)+is\eta_1\ (\gamma_3\gamma_1-i\gamma_3\gamma_2)]=2^{-1/2}\ [(1+is\eta_1)A^+ +(1-is\eta_1)\ B]$
$[(\gamma_1-i\gamma_2)-is\eta_2\ (\gamma_3\gamma_1-i\gamma_3\gamma_2)]=2^{-1/2}[(1-is\eta_2)A^+ +(1+is\eta_2)B]$ (2.2.4)

И получаем

$2^{1/2}\varphi(J_i)_k^+=-\Pi(J_i)\{[(1+is\eta_1)A^+ +(1-is\eta_1)\ B\ ]\varphi_1(J_i)^+\}_k$
$\gamma_1=\gamma_1(J_i),\ \gamma_2=\gamma_2(J_i),\ \ \gamma_3=\gamma_3(J_i),\ \ \ i=1,2$
$2^{1/2}\varphi(J_j)_{-k}^+=-\Pi(J_i)\{(1-is\eta_2)A^+ +(1+is\eta_2)B]\varphi_1(J_i)^+]\}_{-k}$
$\gamma_1=\gamma_1(J_i),\ \gamma_2=\gamma_2(J_i),\ \ \gamma_3=\gamma_3(J_i),\ \ \ i=3,4$ (2.2.5)

_Аналогично имеем и для сопряженной по Дираку функции

$2^{1/2}\varphi(J_i)_k$^$=-\Pi(J_i)\{[(1+is\eta_1)B+(1-is\eta_1)A^+]\varphi_1(J_i)^+\}_k$
$\gamma_1=\gamma_1(J_i),\ \gamma_2=\gamma_2(J_i),\ \ \gamma_3=\gamma_3(J_i),\ \ \ i=1,2$ (2.2.6)
$2^{1/2}\varphi(J_j)$^$_{-k}=\Pi(J_i)\{[(1-is\eta_2)B+(1+is\eta_2)A^+]\varphi_1(J_i)^+]\}_{-k}$
$\gamma_1=\gamma_1(J_i),\ \gamma_2=\gamma_2(J_i),\ \ \gamma_3=\gamma_3(J_i),\ \ \ i=3,4$ (2.2.7)
$\varphi(J_i)_k$^$=\varphi(J_i,-\eta)_k^+$

ISSN 1512-1461

П 3. Наблюдаемие величины спинорного поля (энергия, импульс, и заряд) в формализме гиперкомплексного числа

Исходия из лагранжиана спиногного поля

$$L=(1/2)(\Psi^{\wedge}\gamma_\mu \partial_\mu\Psi-\partial_\mu\Psi^{\wedge}\gamma_\mu\Psi-2k_0\Psi^{\wedge}\Psi) \qquad (2.3.1)$$

находим соответствующие уравнения поля в виде

$$(\gamma_\mu \partial_\mu+k_0)\Psi=0, \qquad \Psi^{\wedge}(\gamma_\mu \partial_\mu-k_0)=0, \qquad (2.3.2)$$

$x_\mu(x_n, t)$, $\gamma_\mu(\gamma_n, \gamma_4)$, $\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ $\mu, \nu=(n, 4)$, n=1.2.3,

$$\gamma_n^+=\gamma_n,\ \gamma_4^+=-\gamma_4,\ \gamma_5^+=\gamma_5\ \ \gamma_n^2=1,\ \gamma_4^2=-1,\ \gamma_5^2=-1 \qquad (2.3.3)$$

При этом для тензора энергии импульса поля имеем

$$T_{\mu\nu}=(1/2)(\Psi^{\wedge}\gamma_\nu\partial_\mu\Psi-\partial_\mu\Psi^{\wedge}\gamma_\nu\Psi)$$

$$T_{\mu 4}=(1/2)(\Psi^{\wedge}\gamma_4\partial_\mu\Psi-\partial_\mu\Psi^{\wedge}\gamma_4\Psi)==-i(1/2)(\Psi^+\partial_\mu\Psi-\partial_\mu\Psi^+\Psi) \ (2.3.4)$$

Отсюда для 4-ех мерного импульса поля P_μ и заряда поля Q находим

$$P_\mu=\int T_{\mu4}dv=-i\,(1/2)\int(\Psi^+\partial_\mu\Psi-\partial_\mu\Psi^+\Psi)\,dv$$

$$Q=-e\int\Psi^+\Psi\,dv \qquad (2.3.5)$$

Спин состояния в решение уравнения учитивается через проэкционый оператор и будет входить в вырожение решения Подставляя в этих выроженях решения уравнения поля в виде (2.1.24)-(2.1.27) получаем

$$\Psi^+\Psi=\Sigma_k\{[\varphi_k(J_1)^+\varphi_k(J_1)+\varphi_k(J_2)^+\varphi_k(J_2)]+$$
$$+[\varphi_{-k}(J_3)^+\varphi_{-k}(J_3)+\varphi_{-k}(J_4)^+\varphi_{-k}(J_4))]\}$$
$$\Psi^{\wedge}\Psi=\Sigma_k\{[\varphi_k(J_1)^+\varphi_k(J_1)+\varphi_k(J_2)^+\varphi_k(J_2)]-$$
$$-[\varphi_{-k}(J_3)^+\varphi_{-k}(J_3)+\varphi_{-k}(J_4)^+\varphi_{-k}(J_4)]\}$$

$$P_\mu=L^3\Sigma_k k_\mu\{[\varphi_k(J_1)^+\varphi_k(J_1)+\varphi_k(J_2)^+\varphi_k(J_2)]+[\varphi_{-k}(J_3)^+\varphi_{-k}(J_3)+\varphi_{-k}(J_4)^+\varphi_{-k}(J_4)]\}$$
$$Q=-e\,L^3\,\Sigma_k\{[\varphi_k(J_1)^+\varphi_k(J_1)+\varphi_k(J_2)^+\varphi_k(J_2)]+$$
$$+[\varphi_{-k}(J_3)^+\varphi_{-k}(J_3)+\varphi_{-k}(J_4)^+\varphi_{-k}(J_4)]\}, \qquad (2.3.6)$$

где $\varphi(J_i)_k$,$\varphi(J_j)_{-k}$, $\varphi(J_i)^+_k$, $\varphi(J_i)^+_{-k}$ дается через (2.1.24), (2.1.25) и (2.1.33), (2.1.34). После введения операторов вторичного кваантьавания $\varphi(J_i)_k$, $\varphi(J_j)_{-k}$, $\varphi(J_i)_k^+$,$\varphi(J_j)_{-k}^+$ даются через(2.2.5 и(2.2.7) При этом для былинейной комбинации имеем (Учитивая,что $A^+B^+=BA=0$)

$$\varphi(J_i)_k^+\varphi(J_i)_k=(1/2)\,\Pi(J_i)\,(1+\eta_1^2)(A^+A+BB^+)\varphi_1(J_i)_k^+\varphi_1(J_i)_k\,\Pi(J_i)$$
$$\gamma_1=\gamma_1(J_i),\ \gamma_2=\gamma_2(J_i),\ \gamma_3=\gamma_3(J_i),\quad i=1,2$$

$$\varphi(J_j)_{-k}^+\varphi(J_j)_{-k}=(1/2)\,\Pi(J_i)\,(1+\eta_2^2)(A^+A+BB^+)\varphi_1(J_i)_{-k}^+\varphi_1(J_i)_{-k}\,\Pi(J_i)$$
$$\gamma_1=\gamma_1(J_i),\ \gamma_2=\gamma_2(J_i),\ \gamma_3=\gamma_3(J_i),\quad i=3,4 \qquad (2.3.7)$$

$$\Psi^+\Psi=\Sigma_k\ [\,(1/2)\Pi(J_i)(A^+A+BB^+)\Pi(J_i)\{(1+\eta_1^2)\varphi_1(J_i)_k^+\varphi_1(J_i)_k$$
$$+(1/2)\Pi(J_j)(A^+A+BB^+)\Pi(J_j)(1+\eta_2^2)\varphi_1(J_j)_{-k}^+\varphi_1(J_j)_{-k}],\ i=1,2,\ J=3,4$$

$$P_\mu=\int T_{\mu4}dv=(1/2)(\Psi^{\wedge}\gamma_4\partial_\mu\Psi-\partial_\mu\Psi^{\wedge}\gamma_4\Psi)=$$
$$=L^3\,\Sigma_{k\,J}\,k_\mu\,\{\Sigma_i[(1/2)\Pi(J_i)(A^+A+BB^+)\Pi(J_i)\,(1+\eta_1^2)\varphi_1(J_i)_k^+\varphi_1(J_i)_k$$
$$+\Sigma_{kJ}[(1/2)\Pi(J_j)(A^+A+BB^+)\Pi(J_j)(1+\eta_2^2)\varphi_1(J_j)_{-k}^+\varphi_1(J_j)_{-k}]\},\ i=1,2,\ J=3,4 \ (2.3.8)$$

ISSN 1512-1461

$$Q = L^3\Sigma_{kJ} [(1/2)\Pi(J_i)(A^+A+BB^+)\Pi(J_i)\{(1+\eta_1{}^2)\varphi_1(J_i)_k{}^+\varphi_1(J_i)_k$$
$$+(1/2)\Pi(J_j)(A^+A+BB^+)\Pi(J_j)(1+\eta_2{}^2)\varphi_1(J_j)_{-k}{}^+\varphi_1(J_j)_{-k}],\ i=1,2,\ J=3,4 \quad (2.3.9)$$

$$\eta (k)=k/(-\varepsilon K+k_0),\ (1+\eta_1{}^2)=2K/(K-k_0),\ (1+\eta_2{}^2)=2K/(K+k_0) \quad (2.3.10)$$

В качестве условия квантования примем для частиц с $\varepsilon=1$

$$L^3[K/(K-k_0)]\ \Pi(J_1)\ (A^+A+B\ B^+)\varphi_1\ (J_1)_k{}^+\varphi_1\ (J_1)_k\ \Pi(J_1)=N(J_1)\ \Pi(J_1)$$
$$L^3\ [K/(K-k_0)]\ \Pi(J_2)\ (A^+A+B\ B^+)\varphi_1\ (J_2)_k{}^+\varphi_1\ (J_2)_k\Pi(J_2)= N(J_2)\ \Pi(J_2) \quad (2.3.11)$$

И при нормировке

$$L^3[K/8(K-k_0)]\varphi_1\ (J_1)_k{}^+\varphi_1\ (J_1)_k =1,$$
$$L^3[K/8(K-k_0)]\varphi_1\ (J_2)_k{}^+\varphi_1\ (J_2)_k =1, \quad (2.3.12)$$
$$\varphi_1\ (J_1)_k = \varphi_1\ (J_2)_k = L^{-3/2/}[8(K-k_0)/\ K]^{1/2}$$

получаем

$$\Pi(J_1)\ 8\ (A^+A+B\ B^+)\ \Pi(J_1)=N(J_1)\ \Pi(J_1)$$
$$\Pi(J_2)\ 8\ (A^+A+B\ B^+)\ \Pi(J_2)= N(J_2)\ \Pi(J_2) \quad (2.3.13)$$

Для античастиц $\varepsilon=-1$ учтем соотношения

$$(A^+A+B\ B^+)+(A\ A^++ B^+\ B)=1/4,\quad 8(A^+A+B\ B^+)= [2-8(A\ A^++ B^+\ B)]$$

условия квантования определим в виде

$$L^3[K/8(K+k_0)]\varphi_1\ (J_3)_k{}^+\varphi_1\ (J_3)_k\ \Pi(J_3)\ [2-8(A\ A^++ B^+\ B)]\ \Pi(J_3)=$$
$$=[2- N(J_3)^*]\Pi(J_3)$$
$$L^3[K/8(K+k_0)]\varphi_1\ (J_4)_k{}^+\varphi_1\ (J_4)_k\ \Pi(J_4)\ [2-8(A\ A^++ B^+\ B)]\ \Pi(J_4)=$$
$$= [2- N(J_4)^*]\Pi(J_4) \quad (2.3.14)$$

И при нормировке в виде

$$L^3[K/8(K+k_0)]\varphi_1\ (J_3)_{-k}{}^+\varphi_1\ (J_3)_{-k}=1$$
$$L^3[K/8(K+k_0)]\varphi_1\ (J_4)_{-k}{}^+\varphi_1\ (J_4)_{-k} =1 \quad (2.3.15)$$
$$\varphi_1\ (J_3)_k = \varphi_1\ (J_4)_k = L^{-3/2/}[8(K+k_0)/\ K]^{1/2}$$

получаем

$$\Pi(J_3)\ [2-8(A\ A^++ B^+\ B)]\ \Pi(J_3) =[1- N(J_3)^*]\Pi(J_3)$$
$$\Pi(J_4)\ [2-8(A\ A^++ B^+\ B)]\ \Pi(J_4)= [1- N(J_4)^*]\Pi(J_4) \quad (2.3.16)$$

Таким образом находим

$$P_\mu= \Sigma_k\ k_\mu\{[\ N(J_1)\ \Pi(J_1)+ N(J_2)\Pi(J_2) +$$
$$- N(J_3)^*\ \Pi(J_3)- N(J_4)^*\ \Pi(J_4))]+ 2[\Pi(J_3)+ \Pi(J_4)]\} \quad (2.3.17)$$
$$Q =- e\ \{[\ N(J_1)\ \Pi(J_1)+ N(J_2)\Pi(J_2) +$$
$$- N(J_3)^*\ \Pi(J_3)- N(J_4)^*\ \Pi(J_4))]+ 2[\Pi(J_3)+ \Pi(J_4)]\} \quad (2.3.18)$$

ISSN 1512-1461

П4 Запис решения свободного уравнения Дирака без массой покоя $k_0=0$ **в формализме гиперкомплексного числа**

Как в уравнение Дирака для свободного спинорного поля с массой покря $k_0=m/\hbar c$, так и в его решенях полученных в **§1-§2** параметр k_0 входит аналитический и всегда можно переходить к пределу $k_0 \to 0$.По этому в данном параграфе мы использум результати **§1-§2** при $k_0=0$.Однако остановимся только на одном моменте в процесе решения. Ограничимся рассмотрением одномерного движения $k_1= k_2=0$, $k_3 = k$ то при $k_0=0$ из (2.1.17) получанм

$$1.\ -\varepsilon K\, \varphi_0(J,k)-sk_3\, \varphi_1(J,k)=0,\quad 2.\ +\varepsilon K\varphi_1(J,k)+sk_3\varphi_0(J,k)=0$$
$$3.+\varepsilon K\varphi_2(J,k)-s\, k_3\varphi_3(J,k)=0,\quad 4.-\varepsilon K\, \varphi_3(J,k)+s\, k_3\, \varphi_2(J,k)=0 \qquad (2.1.17')$$

Как выдим, первая пара уравнении ($\varphi_0(J,k),\varphi_1(J,k)$)c ($\varepsilon$, s) совпадает второй паре уравнении ($\varphi_2(J,k)$, $\varphi_3(J,k)$) с ($-\varepsilon$, s) =(ε, -s).Таким образом можно ограничиться рассмотрением уравнеинии для первой пари . c($\varphi_0(J,k),\varphi_1(J,k)$) с ($\varepsilon$, s) и состояния второй пари с($-\varepsilon$, s) получить путем переваротa спина согласно условию($-\varepsilon$, s) =(ε, -s).Таким образом при $k_0=0$ имеем

$$\varphi_2(J)=\varphi_3(J)=0,\quad \varphi_0(J,k)=\eta(k)\varphi_1(J,k),\ \eta(k)=k/(-\varepsilon K+k_0)=-\varepsilon \qquad (2.4.1)$$
$$\psi=\Sigma_{Jk}\, \varphi_{Jk} \exp[i\underline{æ}\,(-Kt+k_n x_n)\Pi(\varepsilon, s), \qquad (2.4.2)$$

С учетом (2.4.1) для спинорного инварианта-,,длина спинора,, получаем

$$\psi\hat{}(s\varepsilon,x)\psi(s\varepsilon,x)=-\Sigma_J\Pi(s\varepsilon)\varepsilon(\varphi_1^*\varphi_1+\varphi_2^*\varphi_2-\varphi_0^*\varphi_0-\varphi_3^*\varphi_3)\Pi(s\,\varepsilon)=0 \ (2.4.3)$$

Выпишим оснавние результаи **§1-§2** при $k_0=0$ (При $k_0=0$ поле электрическим зарядом не обладает)

$$P_\mu=\int T_{\mu 4}dv=(1/2)\int \Sigma_k\, k_\mu[\, \varphi_k(J_1)^+\, \varphi_k(J_1)+\, \varphi_k(J_2)^+\, \varphi_k(J_2)]\, dv \qquad (2.4.4)$$
$$\varphi_{Jk}=[\alpha_1\varphi_k(J_1)+\alpha_2\, \varphi_k(J_2)],\ \varphi_{Jk}^{\ +}=[\alpha_1\varphi_k(J_1)^+ +\alpha_2\varphi_k(J_2)^+], \qquad (2.4.5)$$

После перехода к втаричноквантованним полям получаем

$$2^{1/2}\varphi(J_i)_k=\{[(1-is\eta)A+(1+is\eta)B^+]\varphi_1(J_i)\}_k\Pi(J_i)$$
$$2^{1/2}\varphi(J_i)_k^{\ +}=-\Pi(J_i)\{[(1+is\eta)A^+ +(1-is\eta)\, B\,]\varphi_1(J_i)^+\}_k,\ i=1,.2$$
$$(1+\eta^2)=1+k^2/(-\varepsilon\, k)^2=2 \qquad (2.4.6)$$

$$P_\mu=(1/2)L^3\Sigma_k\, k_\mu[\Pi(J_1)(A^+A+BB^+)\varphi_{k1}(J_1)_k^{\ +}\varphi_1(J_1)_k\Pi(J_1)+$$
$$+\Pi(J_2)(A^+A+BB^+)\varphi_1(J_2)_k^{\ +}\varphi_1(J_2)_k\Pi(J_2)] \qquad (2.4.7)$$

Для частиц $\varepsilon=1$. $k_0=0$ имеем

$$2^{-1}\, \Pi(J_1)(A^+A+BB^+)\Pi(J_1)L^3\varphi_1(J_1)_k^{\ +}\varphi_1(J_1)_k\Pi(J_1)=N(J_1)\Pi(J_1)$$
$$2^{-1}\Pi(J_2)(A^+A+BB^+)\Pi(J_2)L^3\varphi_1(J_2)_k^{\ +}\varphi_1(J_2)_k\Pi(J_2)=N(J_2)\Pi(J_2),\ (2.4.8)$$

При нормировке

$$2^{-4}L^3\, \varphi_1(J_1)_k^{\ +}\varphi_1(J_1)_k=1,\quad 2^{-4}\, L^3\varphi_1(J_2)_k^{\ +}\varphi_1(J_2)_k=1 \qquad (2.4.9)$$
$$\varphi_1(J_1)_k=\varphi_1(J_2)_k=2^{\,4}L^{-3/2/}$$

Имеем

$$8(A^+A+B\, B^+)\, \Pi(J_1)=N(J_1)\, \Pi(J_1)$$

ISSN 1512-1461

$8(A^+A+B\,B^+)\,\Pi(J_2)= N(J_2)\,\Pi(J_2)$ (2.4.11)

И получаем

$P_\mu = \Sigma_k\, k_\mu \{[\, N(J_1)\,\Pi(J_1)+ N(J_2)\Pi(J_2)]$ (2.4.12)

Литература

[1] Зоммерфельд А. //Строение атома и спектры, част 2, Гостехиздат//, Москва,19336г.
[2] Д.Курдгелаидзе //Известия Вузов. Физика, N 5, стр. 18-23. 1990 г.//
[3] Д.Курдгелаидзе // Известия Вузов. Физика, N 10, стр. 93-97. 1989 г.//
[4]. Д.Курдгелаидзе//Введение в неассоцитивную теорию поля, част 1,Тбилиси,2005г , част 2,Тбилиси,2011г//s

Article received: 2012-05-20