ISSN 1512-1461

УДК 53

КВАНТОВАЯ СТРУКТУРА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Курдгелаидзе Дмитрий
Грузинский Технический Университет ,Институт Вычислительной Математики им.Мусхелишвили.
Адрес: ул. Костава 75, почтовое отделение 01

Часть 2
Вторичное квантование гравитационного поля в формализме ассоциативного гиперкомплексного числа

Аннотация
Проведено квантование гравитационного поля в формализме гиперкомплексного числа. При этом в отдельности ни гравитационное поле, ни пространство не квантуются – квантуется только гравитационное поле со своим четырехмерным объемом в виде "элементарной четырехмерной ячейки"
$dx'^{\mu} dx'^{\nu} dx'^{\lambda} dx'^{\rho} = \Delta_{(\nu)}{}^{\mu\lambda\nu\rho}(x') = l_0^4\, n_g(k)\, m^{\mu\lambda\nu\rho}$
и в качестве кванта гравитационного поля выступает элементарный четырехмерный объем - "четырехмерная ячейка" - со своим гравитационным полем. При этом "четырехмерная ячейка" имеет пространственный размер $l_0=(æ\hbar/c)^{1/2}=0{,}8.10^{-32}$ *см и временной интервал* $T_0=l_0/v_g$, , $v_g = c/\, n_g$ *-скорость гравитационных волн,* $n_g=[1+(k_{0g}/\, ck)^2]^{1/2}$, $k_{0g}=(m_g c\, /\, \hbar)=12.\, 10^{-29}$ *см,*
$m_g = 4.10^{-66}$*гр.- масса кванта гравитационного поля.*
Ключевые слова: квантование гравитационного поля , Метрический тензор.

§1 Геометрия в репере γ_μ-величин Дирака [1].
П1.Метрический тензор $g_{\mu\nu}$, как известно, можно задать через γ_μ-величины Дирака в виде

$$g_{\mu\nu} =(1/2)(.\gamma_\mu \gamma_\nu +\gamma_\nu\gamma_\mu), \quad \mu, \nu =1,2,3,4 \qquad (1.1.1)$$

Алгебра Клиффорда величин $\boldsymbol{\gamma_a}$, a=1,2,3,4, в теории поля обычно определена в плоском пространстве Минковского $\mathbf{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}(1,1,1,-1)}$ когда $\boldsymbol{\gamma_a}$ - постоянные величины. При переходе к искривленному пространству Римана, $\boldsymbol{\gamma_a}$ величины будут функциями координат. Обозначим их через $\boldsymbol{\gamma_\mu(x)}$. Соответствующая алгебра Клиффорда в искривленном пространстве согласно (1.1.1) будет иметь вид.

$$\{\gamma_\mu(x)\, \gamma_\nu (x)\}=2g_{\mu\nu}(x) \qquad (1.1.2)$$

В рамках Общей Теории Относительности Эйнштейн $\mathbf{g_{\mu\nu}(x)}$ **-** числовая функция. При этом связь $\boldsymbol{\gamma_\mu(x)}$ с постоянными величинами $\boldsymbol{\gamma_a}$, **a=1,2,3,4** плоского пространства Минковского ограничивается соотношением

$$\gamma_\mu(x) =h_\mu{}^a\, \gamma_a, \qquad (1.1.3)$$

где $\mathbf{h_\mu{}^a}$ т.н. коэффициент Ламе. Нижние индексы μ = 1,2,3,4 относятся к искривленному пространству, верхние - a=1,2,3,4 - к плоскому, касательному пространству Минковского. При этом из (1.1.3) следует ограничение и на $\mathbf{g_{\mu\nu}(x)}$ вида

$$g_{\mu\nu}(x) = h_\mu{}^a\, h_\nu{}^b\, \eta_{ab} \qquad (1.1.4)$$

ISSN 1512-1461

П2. Трудности обобщения алгебры операторов Ферми в случае Риманова пространства Общей Теории Относительности Эйнштейна.

Обобщить алгебру операторов Ферми в случае Риманова пространства Общей Теории Относительности Эйнштейна в стандартной теории поля не удается. Причина состоит в том, что в стандартной теории поля квантованию (т.н. вторичному квантованию путем введения операторов Ферми) подлежат только гармонические осцилляторы. Тем самым операторы Ферми в стандартной теории поля привязаны к гармоническим колебаниям. Для вторичного квантования того или иного поля необходимо рассмотриваемое поле представить как систему гармонических осцилляторов. Соответственно, только в этом случае можно записать поле через операторы Ферми.

В случае Риманова пространства Общей Теории Относительности Эйнштейна гравитационное поле нельзя представить как набор гармонических осцилляторов и, соответственно, нельзя его квантовать в вышеуказанном смысле, т.е. записать через операторы Ферми.

§2. Квантование Гравитационного поля в формализме ассоциативного гиперкомплексного числа .

П1. **Обобщение алгебры Клиффорда в случае искривленного пространства.**

Если на функции $\gamma_\mu(x)$ и $g_{\mu\nu}(x)$ заранее не наложены какие-либо ограничения, то их связь с величинами γ_a, $a=1,2,3,4$ плоского пространства Минковского можно установить путем разложения функций $\gamma_\mu(x)$ и $g_{\mu\nu}(x)$ по полному базису величин γ_a , $a=1,2,3,4$ с алгеброй

$$\Gamma_\alpha\Gamma_\beta=\varepsilon_{\alpha\beta}{}^\gamma\Gamma_\gamma \qquad (2.1.1)$$

где Γ_α - базисные элементы т.н. ундорного исчисления $\{\Gamma_\alpha\}$, $\alpha=0,1,2,,,,15$. $\varepsilon_{\alpha\beta}{}^\gamma$ - т.н. структурные коэффициенты алгебры $\{\Gamma_\alpha\}$. При этом, γ_a и, соответственно, $\{\Gamma_\alpha\}$ и проекционные операторы этой алгебры не зависят от координат **x**. В результате разложения получаем

$$\gamma_\mu(x)=\chi_\mu{}^\alpha\Gamma_\alpha=\chi_\mu{}^0 I+\chi_\mu{}^a\gamma_a+\chi_\mu{}^5\gamma_5+\chi_\mu{}^{5a}\gamma_{5a}+\chi_\mu{}^{[ab]}\gamma_{[ab]},$$

$$g_{\mu\nu}(x)=h^\alpha{}_{\mu\nu}\Gamma_\alpha=h_{\mu\nu}{}^0 I+h_{\mu\nu}{}^a\gamma_a+h_{\mu\nu}{}^5\gamma_5+h_{\mu\nu}{}^{5a}\gamma_{5a}+h_{\mu\nu}{}^{[ab]}\gamma_{[ab]}, \qquad (2.1.2)$$

$\mu, \nu, a, b =1,2,3,4$.

В случае (1.1.2) имеем

$$2h^\gamma{}_{\mu\nu}=(\chi_\mu{}^\alpha\chi_\nu{}^\beta+\chi_\nu{}^\alpha\chi_\mu{}^\beta)\varepsilon_{\alpha\beta}{}^\gamma \qquad (2.1.3)$$

Для эрмитово сопряженных $\gamma_\mu(x)^+$ и $g_{\mu\nu}(x)^+$ получаем

$$\gamma_\mu(x)^+=(\chi_\mu{}^\alpha\Gamma_\alpha)^+=\chi_\mu{}^{0+}I+\chi_\mu{}^{a+}\gamma_a+\chi_\mu{}^{5+}\gamma_5+\chi_\mu{}^{5a+}\gamma_{5a}+\chi_\mu{}^{[ab]+}\gamma_{[ab]},$$

$$\chi_\mu{}^{0+}=\chi_\mu{}^{0*},\ \chi_\mu{}^{n+}=\chi_\mu{}^{n*},\ \chi_\mu{}^{4+}=-\chi_\mu{}^{4*},\ \chi_\mu{}^{5+}=-\chi_\mu{}^{5*}.\ \chi_\mu{}^{54+}=-\chi_\mu{}^{54*},$$

$$\chi_\mu{}^{5n+}=\chi_\mu{}^{5n*},\ \chi_\mu{}^{[nm]+}=-\chi_\mu{}^{[nm]*},\ \chi_\mu{}^{[4m]+}=\chi_\mu{}^{[4m]*}, \qquad (2.1.4)$$

$$g_{\mu\nu}(x)^+=(h^\alpha{}_{\mu\nu}\Gamma_\alpha)^+=h_{\mu\nu}{}^{0+}I+h_{\mu\nu}{}^{a+}\gamma_a+h_{\mu\nu}{}^{5+}\gamma_5+h_{\mu\nu}{}^{5a+}\gamma_{5a}+h_{\mu\nu}{}^{[ab]+}\gamma_{[ab]},$$

$$h_{\mu\nu}{}^{0+}=h_{\mu\nu}{}^{0*},\ h_{\mu\nu}{}^{n+}=h_{\mu\nu}{}^{n*},\ h_{\mu\nu}{}^{4+}=-h_{\mu\nu}{}^{4*},\ h_{\mu\nu}{}^{5+}=-h_{\mu\nu}{}^{5*} \qquad (2.1.5)$$

$$h_{\mu\nu}{}^{54+}=-h_{\mu\nu}{}^{54*},\ h_{\mu\nu}{}^{5n+}=h_{\mu\nu}{}^{54*},\ h_{\mu\nu}{}^{[nm]+}=-h_{\mu\nu}{}^{[nm]*}, h_{\mu\nu}{}^{[4m]+}=h_{\mu\nu}{}^{[4m]*}$$

ISSN 1512-1461

П 2. Спинорные представления $\gamma_\mu(x)$ и $g_{\mu\nu}(x)$ величин [2].

В разложении (2.1.2) нижний индекс μ, ν =1,2,3,4 относится к искривленному пространству, верхний индекс **a, b** =1,2,3,4 - к плоскому касательному пространству Минковского. В плоском касательном пространстве действует группа Лоренца и индексы α нумеруют компоненты представлений группы Лоренца. В плоском касательном пространстве $\gamma_\mu(x)$ задается приводимым представлением группы Лоренца. В частности, таковыми являются (по верхнему индексу): $\chi_\mu{}^0$-скаляр, $\chi_\mu{}^a$- вектор, $\chi_\mu{}^5$-псевдоскаляр, $\chi_\mu{}^{5a}$ -псевдовектор и $\chi_\mu{}^{[ab]}$ - антисимметричный тензор 2-го ранга. Аналогично и $g_{\mu\nu}(x)$ задаются приводимыми представлениями группы Лоренца (по верхнему индексу): $h_{\mu\nu}{}^0$-скаляр, $h_{\mu\nu}{}^a$- вектор, $h_{\mu\nu}{}^5$ - псевдоскаляр, $h_{\mu\nu}{}^{5a}$ -псевдовектор и $h_{\mu\nu}{}^{[ab]}$ -антисимметричный тензор 2-го ранга. Конкретное физическое явление описывается определенным неприводимым представлением группы Лоренца. Реально необходимо выделить конкретное неприводимое представление группы Лоренца. Из разложения(2.1.2), путем использования проекционных операторов, можно построить и спинор – фундаментальное представление группы Лоренца. Спинор через гиперкомплексный базис Γ_α можно записать в виде

$$\psi=\psi^\alpha\Gamma_\alpha\Pi, \qquad \Pi=D_1D_2 , \qquad (2.2.1)$$

Например,

$$\psi=(\psi^0 I +\psi^1 \gamma_1,+ \psi^2 \gamma_2,+ \psi^3 \gamma_1\gamma_2) \Pi , \qquad (2.2.2)$$
$$\Pi=D^\varepsilon{}_{04}D^s{}_{13}= (1/2)(1+i\varepsilon\gamma_4) (1/2)(1+is\gamma_1 \gamma_3) \qquad (2.2.3)$$

где ψ^α - функции координат. Соответственно, формы вида

$$\gamma_\mu \Pi=\chi_\mu{}^\alpha\Gamma_\alpha\Pi=(\chi_\mu{}^0 I +\chi_\mu{}^1 \gamma_1,+ \chi_\mu{}^2 \gamma_2,+ \chi_\mu{}^3 \gamma_1\gamma_2) D^\varepsilon{}_{04}D^s{}_{13} \qquad (2.2.4)$$
$$\hat{g}_{\mu\nu}\Pi=h_{\mu\nu}{}^\alpha\Gamma_\alpha\Pi=,(h_{\mu\nu}{}^0I+h_{\mu\nu}{}^1\gamma_1,+h_{\mu\nu}{}^2\gamma_2,+h_{\mu\nu}{}^3\gamma_1\gamma_2)D^\varepsilon{}_{04}D^s{}_{13} \qquad (2.2.5)$$

являются спинорами в плоском касательном пространстве (по верхним индексам α) и вектором и симметричным тензором 2-го ранга в мировых координатах (по нижним индексам μ, ν). Для обозначения спин-тензоров мы ввели специальные обозначения $\hat{\gamma}_\mu$ и $\hat{g}_{\mu\nu}$

П3.Линейный интервал ds искривленного пространства как спинор в формализме гиперкомплексного числа

Линейные интервалы искривленного пространства **ds** через спин-вектор $\hat{\gamma}_\mu$ можно задавать как спинор .

$$\mathbf{ds} = \mathbf{dx}^\mu \gamma_\mu \Pi= \mathbf{dx}^\mu\chi_\mu{}^\alpha\Gamma_\alpha\Pi = \Psi \qquad (2.3.1)$$
$$\Psi =((\mathbf{dx}^\mu\chi_\mu)^0 I +(\mathbf{dx}^\mu\chi_\mu)^1 \gamma_1,+ (\mathbf{dx}^\mu\chi_\mu)^2 \gamma_2,+(\mathbf{dx}^\mu\chi_\mu)^3 \gamma_1\gamma_2)) D^\varepsilon{}_{04}D^s{}_{13}$$

Обозначим
$$\mathbf{dx}^\mu =\zeta^\mu \qquad (2.3.2)$$

ISSN 1512-1461

При этом в (2.3.2) величины $\mathbf{dx}^{\mu} = \zeta^{\mu}$ рассматриваются как постоянные параметры. Если ввести обозначения

$$\Psi^0 = (\mathbf{dx}^{\mu}\chi_{\mu})^0,\ \Psi^1 = (\mathbf{dx}^{\mu}\chi_{\mu})^1,\ \Psi^2 = (\mathbf{dx}^{\mu}\chi_{\mu})^2,\ \Psi^3 = (\mathbf{dx}^{\mu}\chi_{\mu})^3 \quad (2.3.3)$$

то линейный интервал-спинор $\mathbf{ds}=\Psi$ можно записать в виде стандартного спинора

$$\mathbf{ds} = \Psi = (\Psi^0 I + \Psi^1 \gamma_1 + \Psi^2 \gamma_2 + \Psi^3 \gamma_1\gamma_2))\, D^{\varepsilon}{}_{04} D^{s}{}_{13} \quad (2.3.4)$$

Введем сопряженный спинор - линейный интервал

$$\mathbf{ds}^+ = \Psi^+ = D^{\varepsilon}{}_{04} D^{s}{}_{13}\, (\Psi^{0+} I + \Psi^{1+} \gamma_1 + \Psi^{2+} \gamma_2 - \Psi^{3+} \gamma_1\gamma_2)$$
$$\Psi^{0+} = (\mathbf{dx}^{\mu}\chi_{\mu}{}^{0+}),\ \Psi^{1+} = (\mathbf{dx}^{\mu}\chi_{\mu}{}^{1}+),\ \Psi^{2+} = (\mathbf{dx}^{\mu}\chi_{\mu}{}^{2+}),\ \Psi^{3+} = (\mathbf{dx}^{\mu}\chi_{\mu}{}^{3}+)$$
$$\chi_{\mu}{}^{0+} = \chi_{\mu}{}^{0*},\ \chi_{\mu}{}^{n+} = \chi_{\mu}{}^{n*}, \quad (2.3.5)$$

Введем также сопряженный по Дираку спинор - линейный интервал

$$\mathbf{ds}^{\mathbf{d}} = \hat{}\mathbf{ds}^{+}\mathbf{i}\gamma_4 = \Psi^{\mathbf{d}} = \varepsilon\, \Psi^+(\Psi^{0+}, -\Psi^{1+}, -\Psi^{2+}, -\Psi^{3+}),$$
$$\Psi^{\mathbf{d}} = D^{\varepsilon}{}_{04} D^{s}{}_{13}\, \varepsilon\, (\Psi^{0\,d} I + \Psi^{1\,d} \gamma_1 + \Psi^{2\,d} \gamma_2 + \Psi^{3\,d} \gamma_1\gamma_2)) =$$
$$= D^{\varepsilon}{}_{04} D^{s}{}_{13}\, \varepsilon\, (\Psi^{0+} I - \Psi^{1+} \gamma_1 - \Psi^{2+} \gamma_2 - \Psi^{3+} \gamma_1\gamma_2))$$
$$\Psi^{0d} = \mathbf{dx}^{\mu}\chi_{\mu}{}^{0+},\ \Psi^{1d} = -\mathbf{dx}^{\mu}\chi_{\mu}{}^{1+}.\ \Psi^{2d} = -\mathbf{dx}^{\mu}\chi_{\mu}{}^{2+},\ \Psi^{3d} = -\mathbf{dx}^{\mu}\chi_{\mu}{}^{3+} \quad (2.\ 3.6)$$

Теперь можно определить спинорный инвариант линейного интервала

$$\mathbf{ds}^{\mathbf{d}}\, \mathbf{ds} = \varepsilon\, (\Psi^{0d}\Psi^0 + \Psi^{1d}\Psi^1 + \Psi^{2d}\Psi^2 - \Psi^{3d}\Psi^3)\, D^{\varepsilon}{}_{04} D^{s}{}_{13} =$$
$$= g(\mathbf{x})_{\mu\nu}{}^{\text{наб}}\, \mathbf{dx}^{\mu}\, \mathbf{dx}^{\nu}\, \varepsilon\, D^{\varepsilon}{}_{04} D^{s}{}_{13} \quad (2.\ 3.7)$$
$$g(\mathbf{x})_{\mu\nu}{}^{\text{наб}} = (\chi_{\mu}{}^{0+}\chi_{\nu}{}^{\mathbf{0}} - \chi_{\mu}{}^{1+}\chi_{\nu}{}^{1} - \chi_{\mu}{}^{2+}\chi_{\nu}{}^{2} + \chi_{\mu}{}^{3+}\chi_{\nu}{}^{3}) \quad (2.\ 3.8)$$

где $g(\mathbf{x})_{\mu\nu}{}^{\text{наб}}$ - измеряемый метрический тензор. При этом учтено, что

$$\Psi^{0d}\Psi^0 = \chi_{\mu}{}^{0+}\chi_{\nu}{}^{\mathbf{0}}\, \mathbf{dx}^{\mu}\, \mathbf{dx}^{\nu}, \qquad \Psi^{1d}\Psi^1 = -\chi_{\mu}{}^{1+}\chi_{\nu}{}^{1}\, \mathbf{dx}^{\mu}\mathbf{dx}^{\nu}$$
$$\Psi^{2d}\Psi^2 = -\chi_{\mu}{}^{2+}\chi_{\nu}{}^{2}\, \mathbf{dx}^{\mu}\mathbf{dx}^{\nu} \qquad \Psi^{3d}\Psi^3 = -\chi_{\mu}{}^{3+}\chi_{\nu}{}^{3}\, \mathbf{dx}^{\mu}\mathbf{dx}^{\nu} \quad (2.\ 3.9)$$

Так как $g(\mathbf{x})_{\mu\nu}$ должен быть симметричным тензором по индексам $\mu\nu$, то после симметризации получаем

$$g(\mathbf{x})_{\mu\nu} = (1/2)\, [(\chi_{\mu}{}^{0+}\chi_{\nu}{}^{\mathbf{0}} + \chi_{\nu}{}^{0+}\chi_{\mu}{}^{\mathbf{0}}) - (\chi_{\mu}{}^{1+}\chi_{\nu}{}^{1} + \chi_{\nu}{}^{1+}\chi_{\mu}{}^{1}) -$$
$$-(\chi_{\mu}{}^{2+}\chi_{\nu}{}^{2} + \chi_{\nu}{}^{2+}\chi_{\mu}{}^{2}) + (\chi_{\mu}{}^{3+}\chi_{\nu}{}^{3} + \chi_{\mu}{}^{3+}\chi_{\nu}{}^{3})] \quad (2.\ 3.10)$$

Пока не задано уравнение для определения $\chi_{\mu}{}^{\alpha}$, метрический тензор $g(\mathbf{x})_{\mu\nu}$ -произвольная функция, и её можно подчинить уравнению Эйштейна. В результате возникает 10 уравнений для 16-и функций $\chi_{\mu}{}^{\alpha}$

П4. Квадратичный интервал ds^2 искривленного пространства как спинор в формализме гиперкомплексного числа

$$\mathbf{ds}^2 = \mathbf{dx}^{\mu}\, \mathbf{dx}^{\nu}\mathbf{g}_{\mu\nu}\Pi = \mathbf{dx}^{\mu}\, \mathbf{dx}^{\nu} h_{\mu\nu}{}^{\alpha}\, \Gamma_{\alpha}\Pi, = \Phi \quad (2.4.1)$$
$$\Phi = (\Phi^0 I + \Phi^1 \gamma_1, + \Phi^2 \gamma_2, + \Phi^3 \gamma_1\gamma_2))\, D^{\varepsilon}{}_{04} D^{s}{}_{13} \quad (2.\ 4.2)$$

где

$$\Phi^0 = (\mathbf{dx}^{\mu}\, \mathbf{dx}^{\nu} h_{\mu\nu})^0, \qquad \Phi^2 = (\mathbf{dx}^{\mu}\, \mathbf{dx}^{\nu} h_{\mu\nu})^2$$

ISSN 1512-1461

$\Phi^{1} = (\mathbf{dx}^{\mu}\,\mathbf{dx}^{\nu} h_{\mu\nu})^{1}$, $\quad \Phi^{3} = (\mathbf{dx}^{\mu}\,\mathbf{dx}^{\nu} h_{\mu\nu})^{3}$ (2. 4.3)

При этом в компонентах (2. 4.3) величины

$\mathbf{dx}^{\mu}\mathbf{dx}^{\nu} = \zeta^{\mu}\zeta^{\nu}$ (2. 4.5)

рассматриваются как постоянные параметры. Введем сопряженный квадратичный интервал - спинор

$\mathbf{ds}^{2+} = D^{\varepsilon}{}_{04}D^{s}{}_{13}\,(\Phi^{0+} I + \Phi^{1+} \boldsymbol{\gamma_1},+ \Phi^{2+} \boldsymbol{\gamma_2},- \Phi^{3+} \boldsymbol{\gamma_1\gamma_2}))$ (2. 4.6)
$\Phi^{0+} = (\mathbf{dx}^{\mu}\,\mathbf{dx}^{\nu} h_{\mu\nu}{}^{0+})$, $\quad \Phi^{2+} = (\mathbf{dx}^{\mu}\,\mathbf{dx}^{\nu} h_{\mu\nu}{}^{2+})$
$\Phi^{1+} = (\mathbf{dx}^{\mu}\,\mathbf{dx}^{\nu} h_{\mu\nu}{}^{1+})$, $\quad \Phi^{3+} = (\mathbf{dx}^{\mu}\,\mathbf{dx}^{\nu} h_{\mu\nu}{}^{3+})$ (2. 4.7)

Введем также сопряженный квадратичный интервал по Дираку

$\mathbf{ds}^{2d} = {}^{\wedge}\mathbf{ds}^{2+}\mathbf{i}\boldsymbol{\gamma_4} = D^{\varepsilon}{}_{04}D^{s}{}_{13}\varepsilon(\Phi^{0\,d}I + \Phi^{1\,d}\boldsymbol{\gamma_1} + \Phi^{2\,d}\boldsymbol{\gamma_2} + \Phi^{3\,d}\boldsymbol{\gamma_1\gamma_2}))$ (2. 4.8)
$\Phi^{0d} = \Phi^{0+} = (\mathbf{dx}^{\mu}\,\mathbf{dx}^{\nu} h_{\mu\nu}{}^{0+})$, $\quad \Phi^{2d} = -\Phi^{2+} = (-\mathbf{dx}^{\mu}\,\mathbf{dx}^{\nu} h_{\mu\nu}{}^{2+})$
$\Phi^{1d} = -\Phi^{1+} = (-\mathbf{dx}^{\mu}\,\mathbf{dx}^{\nu} h_{\mu\nu}{}^{1+})$, $\quad \Phi^{3d} = \Phi^{3+} = (-\mathbf{dx}^{\mu}\mathbf{dx}^{\nu} h_{\mu\nu}{}^{3+})$., (2. 4.9)

Для спинорного инварианта квадратичного интервала имеем

$\mathbf{ds}^{2d}\mathbf{ds}^{2} = (\Phi^{0d}\,\Phi^{0} + \Phi^{1d}\,\Phi^{1} + \Phi^{2d}\,\Phi^{2} - \Phi^{3d}\,\Phi^{3})\,\varepsilon\, D^{\varepsilon}{}_{04}D^{s}{}_{13} =$
$= (\Phi^{0+}\,\Phi^{0} - \Phi^{1d}\,\Phi^{1+} - \Phi^{2d}\,\Phi^{2+} + \Phi^{3d}\,\Phi^{3+})\,\varepsilon\, D^{\varepsilon}{}_{04}D^{s}{}_{13} =$
$= R_{\mu\nu\lambda\rho}\;\mathbf{dx}^{\mu}\,\mathbf{dx}^{\nu}\,\mathbf{dx}^{\lambda}\,\mathbf{dx}^{\rho}\,\varepsilon\, D^{\varepsilon}{}_{04}D^{s}{}_{13}$ (2. 4.10)

Выражение для четырехзначкового тензора $\mathbf{R}_{\mu\nu\lambda\rho}{}^{\text{наб}}$ теперь можно записать прямо по аналогии с выражением $g(\mathbf{x})_{\mu\nu}{}^{\text{наб}}$, совершая в последнем подстановку $\mathbf{h}_{\mu\lambda}{}^{\mathbf{a}}$ на место $\chi_{\mu}{}^{\mathbf{a}}$ и $\mathbf{h}_{\nu\rho}{}^{\mathbf{a}}$ на место $\chi_{\nu}{}^{\mathbf{a}}$. Таким образом получаем

$R_{\mu\nu\lambda\rho} = (h_{\mu\lambda}{}^{0+}\,h_{\nu\rho}{}^{\mathbf{0}} - h_{\mu\lambda}{}^{1+}\,h_{\nu\rho}{}^{1} - h_{\mu\lambda}{}^{2+}\,h_{\nu\rho}{}^{2} + h_{\mu\lambda}{}^{3+}\,h_{\nu\rho}{}^{3})$ (2. 4.11)

Однако $\mathbf{R}_{\mu\nu\lambda\rho}$ должен быть симметричным по всем четырем индексам $(\mu\nu\lambda\rho)$. Введем символ $\sum^{*}$=суммирование по всем перестановкам $(\mu\nu\lambda\rho)$, и для $\mathbf{R}_{\mu\nu\lambda\rho}$ получаем

$R_{\lambda\rho\gamma\sigma} = (1/24)\sum^{*}(h_{\lambda\rho}{}^{0+}h_{\gamma\sigma}{}^{\mathbf{0}} - h_{\lambda\rho}{}^{1+}h_{\gamma\sigma}{}^{1} -$
$- h_{\lambda\rho}{}^{2+}h_{\gamma\sigma}{}^{2} + h_{\lambda\rho}{}^{3+}\,h_{\gamma\sigma}{}^{3})$ (2. 4.12)

Пока не задано уравнение для определения $\mathbf{h}_{\lambda\,\rho}{}^{\boldsymbol{\alpha}}$, четырехзначковый тензор $\mathbf{R}_{\mu\nu\lambda\rho}{}^{\text{наб}}$ - произвольная функция и её можно определить через уравнения Эйнштейна.
Если использовать соотношение(2.4.3), то компоненты $\boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{j}}$ можно представить в виде

$2\Phi^{j} = \mathbf{dx}^{\mu}\,\mathbf{dx}^{\nu}\,\{\chi_{\mu}{}^{\alpha}\chi_{\nu}{}^{\beta} + \chi_{\nu}{}^{\alpha}\chi_{\mu}{}^{\beta}\}\,\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{j}$, $j = 0,1,2,3$ (2. 4.13)

Соответственно, для спинорного инварианта квадратичного интервала получаем

$\mathbf{ds}^{2d}\mathbf{ds}^{2} = (\Phi^{0d}\,\Phi^{0} - \Phi^{1d}\,\Phi^{1} - \Phi^{2d}\,\Phi^{2} + \Phi^{3d}\,\Phi^{3}) =$
$= \mathbf{dx}^{\mu}\,\mathbf{dx}^{\nu}\,\mathbf{dx}^{\lambda}\,\mathbf{dx}^{\tau}\{\chi_{\mu}{}^{\alpha}\chi_{\nu}{}^{\beta} + \chi_{\nu}{}^{\alpha}\chi_{\mu}{}^{\beta}\}^{+}\{\chi_{\lambda}{}^{\gamma}\chi_{\tau}{}^{\delta} + \chi_{\tau}{}^{\gamma}\chi_{\lambda}{}^{\delta}\}(\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{0}\,\varepsilon_{\gamma\delta}{}^{0} +$
$-\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{1}\,\varepsilon_{\gamma\delta}{}^{1} - \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{2}\,\varepsilon_{\gamma\delta}{}^{2} + \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{3}\,\varepsilon_{\gamma\delta}{}^{3})\,\varepsilon\, D^{\varepsilon}{}_{04}D^{s}{}_{13}$ (2. 4.14)

ISSN 1512-1461

Как видим, $\mathbf{ds^{2d}ds^2}$ по верхнему индексу является четырехфермионным инвариантом типа гамильтониана четырехфермионного взаимодействия. Из (2. 4.14) находим

$$R_{\lambda\rho\gamma\sigma}{}^{наб}=\{\chi_\mu{}^\alpha\chi_\nu{}^\beta+\chi_\nu{}^\alpha\chi_\mu{}^\beta\}^+\{\chi_\lambda{}^\gamma\chi_\tau{}^\delta+\chi_\tau{}^\gamma\chi_\lambda{}^\delta\}(\varepsilon_{\alpha\beta}{}^0\varepsilon_{\gamma\delta}{}^0+$$
$$-\varepsilon_{\alpha\beta}{}^1\varepsilon_{\gamma\delta}{}^1-\varepsilon_{\alpha\beta}{}^2\varepsilon_{\gamma\delta}{}^2+\varepsilon_{\alpha\beta}{}^3\varepsilon_{\gamma\delta}{}^3)\quad (2.\ 4.15)$$

§3. Спинорное поле линейного интервала искривленного пространства в формализме гиперкомплексного числа.

Уравнение спинорного поля в гравитационном поле и тензор энергии импульса спинорного поля имеют вид [3]

$$\gamma^\mu\Psi_{,\mu}+(1/2)\gamma^\mu{}_{;\mu}+k_e\Psi+(1/8)(\gamma^\mu\gamma_{\nu;\mu}\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma_{\nu;\mu}\gamma^\mu)\Psi=0\quad (3.0.1)$$

$$T_{\mu\nu}=(1/4)(-g)^{1/2}\{(\psi^\wedge\gamma_\mu\psi_{,\nu}+\psi^\wedge\gamma_\nu\psi_{,\mu})-(\psi^\wedge{}_{,\nu}\gamma_\mu\psi+\psi^\wedge{}_{,\mu}\gamma_\nu\psi)\}+\Phi$$

$$\Phi=(1/4)(-g)^{1/2}\{(1/4)\psi^\wedge[(\boldsymbol{\gamma}^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{\alpha};\mu}\gamma_\nu-\gamma_\nu\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{\alpha};\mu}\boldsymbol{\gamma}^{\boldsymbol{\alpha}})+$$
$$+(\boldsymbol{\gamma}^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{\alpha};\nu}\gamma_\mu-\gamma_\mu\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{\alpha};\nu}\boldsymbol{\gamma}^{\boldsymbol{\alpha}})]\psi\}\quad (3.0.2)$$

Из требования ковариантного постоянства метрического тензора

$$\mathbf{g_{\mu\nu;}=(1/2)(\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu)_;=(1/2)(\gamma_{\mu;}\gamma_\nu+\gamma_\mu\gamma_{\nu;}+\gamma_{\nu;}\gamma_\mu+\gamma_\nu\gamma_{\mu;})=0}\quad (3.0.3)$$

следует, что требование ковариантного постоянства величин γ_μ **,т.е**
условие

$$\gamma_{\mu;}=\gamma_{\nu;}=\mathbf{0},\quad \Phi=0\quad (3.0.4)$$

является частным решением уравнения (3.0.3) Ограничиваясь этим решением для уравнения спинорного поля и тензора энергии импульса спинорного поля получаем

$$\gamma^\mu(x)\ \Psi_{,\mu}+k_e\Psi=0\quad (3.0.5)$$

$$T_{\mu\nu}=(1/4)(-g)^{1/2}\{(\psi^\wedge\gamma_\mu(x)\ \psi_{,\nu}+\psi^\wedge\gamma_\nu(x)\psi_{,\mu})-$$
$$-(\psi^\wedge{}_{,\nu}\gamma_\mu(x)\psi+\psi^\wedge{}_{,\mu}\gamma_\nu(x)\psi)\},\quad (3.\ 0.6)$$

$$\Psi=(\Psi^0 I+\Psi^1\boldsymbol{\gamma_1}+\Psi^2\boldsymbol{\gamma_2}+\Psi^3\boldsymbol{\gamma_1\gamma_2}))\ D^\varepsilon{}_{04}D^s{}_{13}\quad (3.\ 0.7)$$

$\gamma^\mu(x)$ - кватернион(см.(2.3.1))

$$\gamma^\mu(x)=(\chi^{\mu0}I+\chi^{\mu1}\boldsymbol{\gamma_1},+\chi^{\mu2}\boldsymbol{\gamma_2},+\chi^{\mu3}\boldsymbol{\gamma_1\gamma_2})\quad (3.\ 0.8)$$
$$\gamma_\mu(x)\ \mathbf{dx}^\mu=(\Psi^0 I+\Psi^1\boldsymbol{\gamma_1}+\Psi^2\boldsymbol{\gamma_2}+\Psi^3\boldsymbol{\gamma_1\gamma_2}))\quad (3.\ 0.9)$$

Подставляя (3.0.8) **в** (3.0.5) для компонент спинора получаем нелинейную систему уравнений. Как уже было сказано, в данной работе мы ограничиваемся рассмотрением только линейного уравнения Дирака. В этом случае величины γ^μ будут постоянными. С точки зрения гравитационного поля такое приближение равносильно ограничению квантования гравитационного поля в линейном приближении. В линейном приближении

ISSN 1512-1461

квантование гравитационного поля впервые было выполнено Д.Д.Иваненко, А.А. Соколовым [4]. Однако, поскольку квантование в формализме гиперкомплексного числа радикально отличается от классического формализма квантования, то оно выявляет другие аспекты проблемы. В частности, связь квантования гравитационного поля с квантованием пространства-времени.

П1.Спинорное поле линейного интервала в формализме гиперкомплексного числа.

А).Случай неизотропного интервала.

Как уже было сказано, уравнение Дирака в рассматриваемом приближении будет иметь стандартный вид

$$(\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + k_g)\,\Psi(\mathbf{x}^{\mu}) = 0 \qquad (3.1.1)$$

где

$$\Psi(\mathbf{x}^{\mu}) = (\Psi^0\, I + \Psi^1\, \boldsymbol{\gamma_1} + \Psi^2\, \boldsymbol{\gamma_2} + \Psi^3 \boldsymbol{\gamma_1\gamma_2})\, D^{\varepsilon}{}_{04} D^{s}{}_{13} \qquad (3.\ 1.2)$$

$$\Psi^0 = (\mathbf{d\, x}^{\mu}\chi_{\mu})^0 = \mathbf{dx}^1\chi_1{}^0 + \mathbf{dx}^2\chi_2{}^0 + \mathbf{dx}^3\chi_3{}^0 + \mathbf{dx}^4\chi_4{}^0 = (\zeta^{\mu}\chi_{\mu}{}^0)$$
$$\Psi^2 = (\mathbf{dx}^{\mu}\chi_{\mu})^2 = \mathbf{dx}^1\chi_1{}^2 + \mathbf{dx}^2\chi_2{}^2 + \mathbf{dx}^3\chi_3{}^2 + \mathbf{dx}^4\chi_4{}^2 = (\zeta^{\mu}\chi_{\mu}{}^1)$$
$$\Psi^1 = (\mathbf{dx}^{\mu}\chi_{\mu})^1 = \mathbf{dx}^1\chi_1{}^1 + \mathbf{dx}^2\chi_2{}^1 + \mathbf{dx}^3\chi_3{}^1 + \mathbf{dx}^4\chi_4{}^1 = (\zeta^{\mu}\chi_{\mu}{}^2)$$
$$\Psi^3 = (\mathbf{dx}^{\mu}\chi_{\mu})^3 = \mathbf{dx}^1\chi_1{}^3 + \mathbf{dx}^2\chi_2{}^3 + \mathbf{dx}^3\chi_3{}^3 + \mathbf{dx}^4\chi_4{}^3 = (\zeta^{\mu}\chi_{\mu}{}^3) \qquad (3.\ 1.3)$$

При этом в компонентах (3. 1.3) величины $\mathbf{dx}^{\mu} = \zeta^{\mu}$ рассматриваются как постоянные параметры. В спиноре (3. 1.2) из координатного представления, при помощи преобразования Фурье, перейдем в представление импульсов

$$\Psi(\mathbf{x}^{\mu}) = \Sigma_k\, \Psi_k \exp[i(-Kt + k_n\, x_n)]\Pi(\varepsilon, s), \qquad (3.\ 1.4.)$$

Теперь можно повторить метод решения уравнения Дирака (3.0.5), изложенный нами в Части 1, и искать решение в виде

$$\Psi = \Sigma_{J\,k}\, \Psi_{J\,k} \exp[i(-Kt + k_n\, x_n)]\Pi(\varepsilon, s), \qquad (3.\ 1.5)$$
$$\Pi(\varepsilon, s) = \Pi(J) = D_4{}^{\varepsilon}(J)\, D_{13}{}^{s}(J), \quad J = J(\varepsilon, s,) = J(\pm, \pm, \pm, \pm)$$

При этом $\Psi_{Jk} = \Psi(J,k) = \Psi(\varepsilon, s, k)$ - кватернион вида

$$\Psi_{Jk} = (\Psi^0(J,k)I + \Psi^1(J,k)\gamma_1 + \Psi^2(J,k)\gamma_2 + \Psi(J,k)^3\gamma_1\gamma_2), \qquad (3.\ 1.6.)$$

где теперь

$$\Psi^0(J,k) = (\zeta^{\mu}\chi_{\mu})^0 = \zeta^1\chi_1{}^0(J,k) + \zeta^2\chi_2{}^0(J,k) + \zeta^3\chi_3{}^0(J,k) + \zeta^4\chi_4{}^0(J,k)$$
$$\Psi^2(J,k) = (\zeta^{\mu}\chi_{\mu})^2 = \zeta^1\chi_1{}^2(J,k) + \zeta^2\chi_2{}^2(J,k) + \zeta^3\chi_3{}^2(J,k) + \zeta^4\chi_4{}^2(J,k)$$
$$\Psi^1(J,k) = (\zeta^{\mu}\chi_{\mu})^1 = \zeta^1\chi_1{}^1(J,k) + \zeta^2\chi_2{}^1(J,k) + \zeta^3\chi_3{}^1(J,k) + \zeta^4\chi_4{}^1(J,k)$$
$$\Psi^3(J,k) = (\zeta^{\mu}\chi_{\mu})^3 = \zeta^1\chi_1{}^3(J,k) + \zeta^2\chi_2{}^3(J,k) + \zeta^3\chi_3{}^3(J,k) + \zeta^4\chi_4{}^3(J,k) \qquad (3.\ 1.7.)$$

Ψ_{Jk} можно записать и в виде

$$\Psi_{Jk} = [(\chi_{\mu}{}^0(J,k)I + \chi_{\mu}{}^1(J,k)\gamma_1 + \chi_{\mu}{}^2(J,k)\gamma_2 + \chi_{\mu}{}^3(J,k)\gamma_1\gamma_2)]\,\mathbf{dx}^{\mu} \qquad (3.\ 1.8.)$$

При этом из уравнения Дирака возникают условия

ISSN 1512-1461

$\Psi^0(J,k) = -i\,\eta\,(k)\,\Psi^2(J,k)\,,\quad \Psi^3(J,k) = i\,\eta\,(k)\,\Psi^1(J,k)$ (3. 1.9.)

которые теперь примут вид

$\chi_\mu^0(J,k) =- i\,\eta\,(k)\chi_\mu^2(J,k)\,,\quad \chi_\mu^3(J,k) =i\,\eta\,(k)\chi_\mu^1(J,k)\,,$ (3. 1.10.)
$\eta\,(k,\varepsilon) = k/(-\varepsilon K + k_g)\,),\ K^2= k^2+ k_g^2$

И следующее условие, используемое нами

$\Psi^2(J,k) = i\,\Psi^1(J,k)\,,\quad \Psi^{2*}(J,k) = - i\,\Psi^{1*}(J,k)\,,$ (3. 1.11.)

которое теперь примет вид

$\chi_\mu^2(J,k)=i\chi_\mu^1(J,k),\quad \chi_\mu^2(J,k)^*=-i\chi_\mu^1(J,k)^*$ (3. 1.12.)

В результате получаем

$\Psi\,(J_i)_k=\{[(\gamma_1+i\gamma_2)-is\eta\,(k,\varepsilon)(\gamma_3\gamma_1+i\gamma_3\gamma_2)]\,\chi_\mu^1\,(J_i)\}_k\Pi(J_i)\,\zeta^\mu$
$\gamma_1= \gamma_1(J_i),\ \gamma_2= \gamma_2(J_i),\ \gamma_3= \gamma_3(J_i),\ i= 1,2$
$\Psi\,(J_j)_{-k}=\{[(\gamma_1+i\gamma_2)+is\eta\,(k,\varepsilon)(\gamma_3\gamma_1+i\gamma_3\gamma_2)]\,\chi_\mu^1\,(J_i)]\}_{-k}\Pi(J_i)\,\zeta^\mu$
$\gamma_1= \gamma_1(J_i),\ \gamma_2= \gamma_2(J_i),\ \gamma_3= \gamma_3(J_i),\ i= 3,4.$ (3. 1.13.)

$\Psi =\Sigma_k[\alpha_1\,\Psi\,(J_1,k)+ \alpha_2\,\Psi\,(J_2,\ k)+$
$+\alpha_3\,\Psi\,(J_3, - k)+ \alpha_4\,\Psi\,(J_4,-k)]\exp[i(-Kt+k_nx_n)$ (3. 1.14.)

.

$\Psi\,(J_i)^+{}_k=- \Pi(J_i)\{(\gamma_1-i\gamma_2)-is\eta_1\,(k,\varepsilon)(\gamma_3\gamma_1-i\gamma_3\gamma_2)\,\chi_\mu^{1+}\,(J_i)\}_k\,\zeta^\mu$
$\gamma_1= \gamma_1(J_i),\ \gamma_2= \gamma_2(J_i),\ \gamma_3= \gamma_3(J_i),\ i= 1,2$ (3. 1.15)
$\Psi\,(J_i)^+{}_{-k}=- \Pi(J_i)\{(\gamma_1-i\gamma_2)+is\eta_2\,(k,\varepsilon)(\gamma_3\gamma_1-i\gamma_3\gamma_2)\,\chi_\mu^{1+}\,(J_i)\}_{-k}\,\zeta^\mu$
$\gamma_1= \gamma_1(J_i),\ \gamma_2= \gamma_2(J_i),\ \gamma_3= \gamma_3(J_i),\ i= 3,4$ (3. 1.16.)
$\Psi^+=\Sigma_k[\alpha_1\,\Psi^+\,(J_1,k)+ \alpha_2\,\Psi^+\,(J_2,k)+$
$+\alpha_3\,\Psi^+\,(J_3,-k)+ \alpha_4\,\Psi^+\,(J_4,-k)]\exp[-i(-Kt+k_nx_n)\,,$ (3. 1.17.)

$\Psi\,(J_i)\,\hat{}_k= -\varepsilon\,\Pi(J_i)\{(\gamma_1-i\gamma_2)+is\eta\,(k,\varepsilon)(\gamma_3\gamma_1-i\gamma_3\gamma_2)\,\chi_\mu^{1+}\,(J_i)\}_k\Pi(J_i)\,\zeta^\mu$
$\gamma_1= \gamma_1(J_i),\ \gamma_2= \gamma_2(J_i),\ \gamma_3= \gamma_3(J_i),\ i= 1,2$
$\Psi\,(J_i)\,\hat{}_{-k}=- \varepsilon\,\Pi(J_i)\{(\gamma_1-i\gamma_2)-is\eta\,(k,\varepsilon)(\gamma_3\gamma_1-i\gamma_3\gamma_2)\,\chi_\mu^{1+}\,(J_i)\}_{-k}\Pi(J_i)\,\zeta^\mu$
$\gamma_1= \gamma_1(J_i),\ \gamma_2= \gamma_2(J_i),\ \gamma_3= \gamma_3(J_i),\ i= 3,4$ (3. 1.18.)

$\Psi\,\hat{}= \Sigma_k\{[\alpha_1\,\Psi_k(J_1)^+ +\alpha_2\,\Psi_k(J_2)^+]-$
$-[\alpha_3\,\Psi_{-k}(J_3)^+ +\alpha_4\,\Psi_{-k}(J_4)^+]\}\ \exp[-i(-Kt+k_nx_n),$ (3. 1.19)

Переходя к операторам вторичного квантования, будем иметь

$2^{1/2}\,\Psi\,(J_i)_k=\{[\,(1- is\eta_1)\,A +(1+ is\eta_1)B^+]\chi_\mu^1\,(J_i)\}_k\Pi(J_i)\,\zeta^\mu\,,\quad i= 1,2$
$2^{1/2}\Psi\,(J_j)_{-k}=\{[(1+is\eta_2)A+(1-is\eta_2)B^+]\chi_\mu^1(J_i)\}_{-k}\Pi(J_i)\zeta^\mu\,,\ i= 3,4\,,$(3.1.20)
$2^{1/2}\Psi(J_i)_k^+=-\Pi(J_i)\{[(1+is\eta_1)A^+ +(1-is\eta_1)B]\chi_\mu^{1+}(J_i)\}_k\zeta^\mu,\ i= 1,2$
$2^{1/2}\Psi(J_j)_{-k}^+=-\Pi(J_i)\{(1-is\eta_2)A^+ +(1+is\eta_2)B]\chi_\mu^{1+}(J_i)\}_{-k}\zeta^\mu,\ i= 3,4,$ (3.1.21)

При этом

$\Psi\,(J_i)_k^+\,\Psi\,(J_i)_k=(1/2)\,\Pi(J_i)\ \{[\,(1+ \eta_1^2)(\,A^+\,A+ B\,B^+)+$

ISSN 1512-1461

$+((1+ is\eta_1)^2 A^+B^+ +(1-is\eta_1)^2BA]\}\chi_\mu{}^1(J_i)_k{}^+\chi_\nu{}^1(J_i)_k\Pi(J_i)\zeta^\mu\zeta^\nu$, i= 1,2
$\Psi (J_j)_{-k}{}^+ \Psi (J_j)_{-k}=(1/2) \Pi(J_i)\{[(1+ \eta_2{}^2)(A^+ A+ B B^+)+$
$+((1-is\eta_2)^2A^+B^+ +(1+is\eta_2)^2BA]\}\chi_\mu{}^1(J_i)_{-k}{}^+\chi_\nu{}^1(J_i)_{-k}\Pi(J_i)\zeta^\mu \zeta^\nu$, i= 3,4
$(1+\eta_1{}^2)= 2K/(K-k_0)$, $(1+\eta_2{}^2)= 2K/(K+k_0)$ (3.1.22)

Так как $A^+ B^+= B A=0$, то получаем

$\Psi (J_i)_k{}^+\Psi(J_i)_k=(1/2)\Pi(J_i)(1+\eta_1{}^2)(A^+A+BB^+)\chi_\mu{}^1(J_i)_k{}^+\chi_\nu{}^1(J_i)_k\Pi(J_i) \zeta^\mu \zeta^\nu$
$\Psi(J_j)_{-k}{}^+\Psi(J_j)_{-k}=(1/2)\Pi(J_j)(1+\eta_2{}^2)(A^+A+B B^+)\chi_\mu{}^1(_-J_j)_{-k}{}^+\chi_\nu{}^1(J_i)_{-k} \Pi(J_j) \zeta^\mu \zeta^\nu$
$\Psi^+\Psi=\Sigma_k [(1/2)\Pi(J_i)(A^+A+BB^+)\Pi(J_i)\{(1+\eta_1{}^2)^+) \chi_\mu{}^1 (J_i)_k{}^+\chi_\nu{}^1 (J_i)_k$
$+(1/2)\Pi(J_j)(A^+A+BB^+)\Pi(J_j)(1+\eta_2{}^2) \chi_\mu{}^1(J_j)_{-k}{}^+\chi_\nu{}^1(J_j)_{-k}\Pi(J_i)] \zeta^\mu \zeta^\nu$
i= 1,2 , j= 3,4 (3.1.23)

Введем "элементарную поверхность"

$\zeta^\mu \zeta^\nu=\Delta(x')^{-\mu\nu} =l_0 (\mathbf{x'}, k)^2 m^{\mu\nu}$, $[l_0 (\mathbf{x'}, k)]=$ см (3.1.24)

где $\mathbf{m^{\mu\nu}}$ единичный тензор, $\mathbf{l_0 (x', k)}$ характерная длина. $\mathbf{l_0}$ может зависеть от координат, однако в данной работе предполагается, что
$\mathbf{l_0 (x',k)= l_0 (k)}$ и не зависит от координат **.** Введем обозначение

$\chi_\mu{}^{1+} (J_i)_k \chi_\nu{}^1(J_i)^k = n(J_i)^k{}_{\mu\nu}$. $\chi_\mu{}^{1+} (J_j)_{-k} \chi_\nu{}^1(J_j)^{-k} = n(J_j)^{-k}{}_{\mu\nu}$, (3.1.25)
i=1,2, j=3,4
где $n(J)^{\pm k}{}_{\mu\nu}$ постоянный тензор размерности $\mathbf{см^{-5}}$**.**
Если $\mathbf{l_0 (x', k)= l_0(k)}$ постоянная величина, то тогда пространство можно представить как сумму ячеек размера L_α в виде
$V= \Sigma_\alpha L_\alpha$ (3. 1.26)
где L_α - линейный размер **α=1,2,3,** ячейки. При этом имеем

$\Psi^+\Psi= l_0 (\mathbf{x'})^2 \Sigma_k[(1/2)\Pi(J_1)(A^+A+BB^+)\Pi(J_1)(1+\eta_1{}^2)^+) n(J_i)^k{}_{\mu\nu} +$
$+1/2)\Pi(J_2)(A^+A+BB^+)\Pi(J_2)(1+\eta_2{}^2) n(J_j)^{-k}{}_{\mu\nu})] m^{\mu\nu}$ (3. 1.27)

Тогда для $\mathbf{P_\mu}$ получаем

$P_\mu= \int T_{\mu 4}dv =(1/2) \int (\Psi\hat{}\gamma_4\partial_\mu\Psi-\partial_\mu\Psi\hat{}\gamma_4\Psi) dv =$
$= \mathbf{\Sigma_{k\alpha} L_\alpha{}^3 l_0 (k)_\alpha{}^2 k_\mu} \{ [(1/2)\Pi(J_1)(A^+A+BB^+)\Pi(J_1)(1+\eta_1{}^2) n(J_1)^k{}_{\mu\nu} +$
$+(1/2)\Pi(J_2)(A^+A+BB^+)\Pi(J_2)(1+\eta_2{}^2) n(J_2)^k{}_{\mu\nu}]+$
$+[(1/2)\Pi(J_3)(A^+A+BB^+)\Pi(J_3) (1+\eta_1{}^2) n(J_3)^{-k}{}_{\mu\nu} +$
$+(1/2)\Pi(J_4)(A^+A+BB^+)\Pi(J_4)(1+\eta_2{}^2) n(J_4)^{-k}{}_{\mu\nu}]\}_\alpha m^{\mu\nu}$ (3. 1.28)

В качестве условия квантования для каждой ячейки **α**, в случае частицы ε=1, примем

$\mathbf{L_\alpha{}^3 l_0 (k)_\alpha{}^2}$ $[K/(K- k_g)]\Pi(J_1)(A^+A+B B^+)\Pi(J_1)n(J_1)^k{}_{\mu\nu}m^{\mu\nu} =N(J_1) \Pi(J_1)$
$\mathbf{L_\alpha{}^3 l_0 (k)_\alpha{}^2}[K/(K- k_g)]\Pi(J_2)(A^+A+BB^+)\Pi(J_2) n(J_2)^k{}_{\mu\nu}m^{\mu\nu}=N(J_2)\Pi(J_2)$ (3. 1.29)

И при нормировке

$n(J_1)^k{}_{\mu\nu}= n(J_2)^k{}_{\mu\nu}= \mathbf{l_0 (k)_\alpha{}^{-5}}$ $[8(K- k_g)/ K]$ (3. 1.30)
и
$\mathbf{L_\alpha{}^3 l_0 (k)_\alpha{}^2}$ $[K/8(K- k_g)] n(J_1)^k{}_{\mu\nu} m^{\mu\nu} =1$

ISSN 1512-1461

$\mathbf{L_\alpha^3\, l_0\,(k)_\alpha^2}$ $[K/8(K- k_g)]\, n(J_2)^k_{\mu\nu}\, m^{\mu\nu} =1$ (3. 1.31)

получаем

$\mathbf{(L_\alpha / l_0\,(k)_\alpha)^3=1}$ (3. 1.32)

При этом условия квантования для каждой ячейки **α**, в случае частицы ε=1, примут вид

$\Pi(J_1)\, 8(A^+A+B\, B^+)\, \Pi(J_1)=N(J_1)\, \Pi(J_1)$
$\Pi(J_2)\, 8(A^+A+B\, B^+)\, \Pi(J_2)= N(J_2)\, \Pi(J_2)$ (3. 1.33)

Для античастиц ε=-1 учтем соотношения

$8(A^+A+B\, B^+)= [2\text{-}8(A\, A^+ + B^+\, B)]$ (3. 1.34)

Условия квантования для каждой ячейки **α** определим в виде

$\mathbf{L_\alpha^3\, l_0\,(k)_\alpha^2}$ $[K/8(K+ k_g)]\, \Pi(J_3)[2\text{-}8(A\, A^+ +B^+\, B)]\, \Pi(J_3)\, n(J_3)^{-k}_{\mu\nu}\, m^{\mu\nu} =$
$=[2\text{-}\, N(J_3)^*]\Pi(J_3)$
$\mathbf{L_\alpha^3\, l_0\,(k)_\alpha^2}$ $[K/8(K+ k_g)]\, n(J_4)^{-k}_{\mu\nu}\, \Pi(J_4)[2\text{-}8(AA^+ +B^+B)]\, \Pi(J_4)\, m^{\mu\nu} =$
$= [2\text{-}\, N(J_4)^*]\Pi(J_4)$ (3. 1.35)

и при нормировке в виде

$n(J_3)^{-k}_{\mu\nu} = n(J_4)^{-k}_{\mu\nu} =l_0\,(k)_\alpha^{-5}\, [8(K+ k_g)/ K]$ **]**

и

$\mathbf{L_\alpha^3\, l_0\,(k)_\alpha^2}$ $[K/8(K+ k_g)]\, n(J_3)^k_{\mu\nu}\, m^{\mu\nu}\, l_0\, \mathbf{(x')^2} =1$
$\mathbf{L_\alpha^3\, l_0\,(k)_\alpha^2}$ $[K/8(K+ k_g)]\, n(J_4)^{-k}_{\mu\nu}\, m^{\mu\nu}\, l_0\, \mathbf{(x')^2} =1$ (3. 1.37)

получаем

$\mathbf{(L_\alpha / l_0\,(k)_\alpha)^3=1}$ (3. 1.38)

При этом условия квантования для каждой ячейки **α**, в случае античастицы ε=-1, примут вид

$\Pi(J_3)\, [2\text{-}8(A\, A^+ + B^+\, B)]\, \Pi(J_3) =[2\text{-}\, N(J_3)^*]\Pi(J_3)$
$\Pi(J_4)\, [2\text{-}8(A\, A^+ + B^+\, B)]\, \Pi(J_4)= [2\text{-}\, N(J_4)^*]\Pi(J_4)$ (3. 1.39)

В результате находим

$P_\mu= \mathbf{\Sigma_{k\alpha}\, k_{\mu\alpha}}\, \{[\, N(J_1)\, \Pi(J_1)+ N(J_2)\Pi(J_2) +$
$-\, N(J_3)^*\, \Pi(J_3)\text{-}\, N(J_4)^*\, \Pi(J_4))] +2\, [\Pi(J_3)+ \Pi(J_4)]\, \}_\alpha$ (3. 1.40)

B). В случае изотропного интервала

В данном случае масса спинора линейного интервала k_g =0. Так как решения, полученные аналитически в случае неизотропного интервала, зависят от k_g , то от этих результатов в случае изотропного интервала можно переходить путем предельного перехода k_g =0. При этом получаем η= ε, и первая пара уравнений Дирака будет совпадать со второй парой, при условии, что состояние (-ε, k)= (ε, -k). Таким образом, можно ограничиться рассмотрением только состояния (ε, k) и двух первых уравнений Дирака и их решений при ε=+1

$\Psi\, (J_i)_k=\{[(\gamma_1+i\gamma_2)\text{-}is(\gamma_3\gamma_1+i\gamma_3\gamma_2)]\, \chi_\mu^{1}\, (J_i)\}_k\Pi(J_i)\, \zeta^\mu$
$\Psi\, (J_i)^+_k=\text{-}\, \Pi(J_i)\{(\gamma_1\text{-}i\gamma_2)\text{-}is(\gamma_3\gamma_1\text{-}i\gamma_3\gamma_2)\, \chi_\mu^{1+}\, (J_i)\}_k\, \zeta^\mu$
$\Psi(J_i)\,\hat{}_k= \text{-}\varepsilon\Pi(J_i)\{(\gamma_1\text{-}i\gamma_2)+is(\gamma_3\gamma_1\text{-}i\gamma_3\gamma_2)\, \chi_\mu^{1+}(J_i)\}_k\, \zeta^\mu$
$\gamma_1= \gamma_1(J_i),\ \gamma_2= \gamma_2(J_i),\ \gamma_3= \gamma_3(J_i),\ i= 1,2$ (3. 1.41)

ISSN 1512-1461

Переходя к операторам вторичного квантования, будем иметь

$2^{1/2}\,\Psi\,(J_i)_k=\{[\,(1\text{- is})\,A+(1+\text{is})B^+]\chi_\mu{}^1\,(J_i)\}_k\Pi(J_i)\,\zeta^\mu$
$2^{1/2}\,\Psi\,(J_i)_k{}^+=-\Pi(J_i)\{[(1+\text{is})A^++(1\text{-is})\,B\,]\,\chi_\mu{}^{1+}\,(J_i)\}_k\,\zeta^\mu$, $\quad i=1,2$
$\Psi\,(J_i)_k{}^+\Psi\,(J_i)_k=\Pi(J_i)(A^+A+BB^+)\chi_\mu{}^1(J_i)_k{}^+\chi_\nu{}^1(J_i)_k\Pi(J_i)\,\zeta^\mu\,\zeta^\nu$, (3. 1.42)

Тогда для $\mathbf{P}_\mu$ получаем

$P_\mu=\int T_{\mu4}dv=(1/2)\int(\Psi^\wedge\gamma_4\partial_\mu\Psi-\partial_\mu\Psi^\wedge\gamma_4\Psi)\,dv=$
$=\boldsymbol{\Sigma_{k\alpha}}\,\mathbf{L_\alpha{}^3}\,\mathbf{l_0\,(k)_\alpha{}^2}\,\mathbf{k_{\mu\,\alpha}}\,\{\,[\Pi\,(J_1)(A^+A+BB^+)\Pi(J_1)\,n(J_1)^k{}_{\mu\nu}+$
$+\Pi(J_2)(A^+A+BB^+)\Pi(J_2)\,n(J_2)^k{}_{\mu\nu}]\,\}_{\boldsymbol{\alpha}}\,m^{\mu\nu}$ (3. 1.43)

В качестве условия квантования для каждой ячейки $\boldsymbol{\alpha}$, в случае частицы $\varepsilon=1$ примем

$\mathbf{L_\alpha{}^3\,l_0\,(k)_\alpha{}^2}\,[\Pi(J_1)(A^+A+B\,B^+)\Pi(J_1)n(J_1)^k{}_{\mu\nu}m^{\mu\nu}=N(J_1)\,\Pi(J_1)$
$\mathbf{L_\alpha{}^3\,l_0\,(k)_\alpha{}^2}\,[\Pi(J_2)(A^+A+BB^+)\,\Pi(J_2)\,n(J_2)^k{}_{\mu\nu}\,m^{\mu\nu}=N(J_2)\Pi(J_2)$ (3. 1.44)

И при нормировке

$\mathbf{n(J_1)^k{}_{\mu\nu}=n(J_2)^k{}_{\mu\nu}=8l_0\,(k)_\alpha{}^{-5}}$ (3. 1.45)
и
$\mathbf{(L_\alpha/l_0\,(k)_\alpha)^3}=1,$

получаем

$\Pi(J_1)\,8(A^+A+B\,B^+)\,\Pi(J_1)=N(J_1)\,\Pi(J_1)$
$\Pi(J_2)\,8(A^+A+B\,B^+)\,\Pi(J_2)=N(J_2)\,\Pi(J_2)$ (3. 1.46)

В результате находим

$P_\mu=\Sigma_{k\,\alpha}\,k_{\mu\,\alpha}\,[\,N(J_1)\,\Pi(J_1)+N(J_2)\Pi(J_2)\,]_{\alpha}$ (3. 1.47)

§4.Спинорные поля квадратичного интервала ds^2 в формализме гиперкомплексного числа.

П1. В случае неизотропного интервала

Рассмотрим спинорное поле квадратичного интервала - спинора $\mathbf{ds^2}$. Можно развить соответствующий лагранжевый формализм. В случае неизотропного интервала уравнение Дирака будет иметь вид (3.1.1), где однако теперь спинор
$\Phi=\mathbf{ds^2}$
имеет вид

$\Phi=(\,\Phi^0\,I+\Phi^1\,\boldsymbol{\gamma_1}+\Phi^2\,\boldsymbol{\gamma_2}+\Phi^3\,i\gamma_1\gamma_2\boldsymbol{)})\,D^\varepsilon{}_{04}D^s{}_{13}$
$\Phi^0=\zeta^\mu\zeta^\nu\,h_{\mu\nu}{}^0,\ \Phi^2=\zeta^\mu\zeta^\nu\,h_{\mu\nu}{}^2,\ \Phi^1=\zeta^\mu\zeta^\nu\,h_{\mu\nu}{}^1,\ \Phi^3=\zeta^\mu\zeta^\nu\,h_{\mu\nu}{}^3$, (4.1.1)

Теперь можно повторить метод решения этого уравнения Дирака, изложенный в П3, **§4**. и решение искать в виде

$\Phi=\Sigma_{J\,k}\,\Phi_{J\,k}\exp[i(-Kt+k_n\,x_n)]\Pi(\varepsilon,s),$ (4.1.2)

ISSN 1512-1461

$\Pi(\varepsilon, s) = \Pi(J)= D_4^{\varepsilon}(J)\, D_{13}^{s}(J),\quad J = J(\varepsilon, s,) = J(\pm, \pm, \pm, \pm)$

При этом
$\Phi_{Jk} = \Phi(J,k) = \Phi(\varepsilon, s, k)$
кватернион вида

$$\Phi_{Jk} =(\Phi^0 (J,k)I+ \Phi^1(J,k)\gamma_1+ \Phi^2(J,k)\gamma_2+ \Phi^3 (J,k)\, \gamma_1\gamma_2), \qquad (4.\ 1.3)$$

где $\Phi^0 (J,k)$, $\Phi^1(J,k)$, $\Phi^2(J,k)$, $\Phi^3 (J,k)$ имеют вид (4. 1.1).
Φ_{Jk} можно записать и в виде

$$\Phi_{Jk} =[h_{\mu\nu}{}^0(J,k)I+h_{\mu\nu}{}^1(J,k)\gamma_1+h_{\mu\nu}{}^2(J,k)\gamma_2+h_{\mu\nu}{}^3 (J,k)\, \gamma_1\gamma_2)]\, \zeta^{\mu}\zeta^{\nu} \ (4.\ 1.4)$$

При этом из уравнения Дирака возникают условия

$$h_{\mu\nu}{}^0(J,k) = - i\, \eta\ (k)\, h_{\mu\nu}{}^2(J,k) ,\ \ h_{\mu\nu}{}^3(J,k) = i\, \eta\ (k)\ \ h_{\mu\nu}{}^1(J,k) , \ (4.\ 1.5)$$
$$\eta\ (k, \varepsilon) = \ k/(-\varepsilon K + k_g{}^{*})),\ \ K^2= k^2+ k_g{}^{*2}$$

И следующее условие

$$h_{\mu\nu}{}^2(J,k)= i\, h_{\mu\nu}{}^1(J,k),\quad h_{\mu\nu}{}^2(J,k)^*=- i\, h_{\mu\nu}{}^1(J,k)^*, \qquad (4.\ 1.6)$$

В результате получаем

$$\Phi(J_i)_k=\{[(\gamma_1+i\gamma_2)-is\eta\ (k, \varepsilon)(\gamma_3\gamma_1+i\gamma_3\gamma_2)]\ h_{\mu\nu}{}^1\ (J_i)\}_k\Pi(J_i)\ \zeta^{\mu}\zeta^{\nu}$$
$$\Phi(J_j)_{-k}=\{[(\gamma_1+i\gamma_2)+is\eta\ (k,\varepsilon)(\gamma_3\gamma_1+i\gamma_3\gamma_2)]h_{\mu\nu}{}^1(J_j)]\}_{-k}\Pi(J_j)\ \zeta^{\mu}\zeta^{\nu}$$
$$i= 1,2\ ,\quad j= 3,4. \qquad (4.\ 1.7)$$

Аналогично можно выписать выражения для сопряженных и сопряженных по Дираку функций.

$$\Phi\ (J_i)^+{}_k=- \Pi(J_i)\{(\gamma_1-i\gamma_2)-is\eta_1\ (k, \varepsilon)(\gamma_3\gamma_1-i\gamma_3\gamma_2)\ h_{\mu\nu}{}^{1+}\ (J_i)\}_k\ \zeta^{\mu}\zeta^{\nu}$$
$$\Phi\ (J_j)^+{}_{-k}=- \Pi(J\,j)\{(\gamma_1-i\gamma_2)+is\eta_2\ (k, \varepsilon)(\gamma_3\gamma_1-i\gamma_3\gamma_2)\ h_{\mu\nu}{}^1\ (J\,j)\}_{-k}\ \zeta^{\mu}\zeta^{\nu}$$
$$i= 1,2,\quad j = 3,4 \qquad (4.\ 1.8)$$

$$\Phi^+=\Sigma_k[\alpha_1\ \Phi^+\ (J_1,k)+ \alpha_2\ \Phi^+\ (J_2,-k)+$$
$$+\alpha_3\ \Phi^+\ (J_3,k)+ \alpha_4\ \Phi^+\ (J_4,-k)]\exp[-i(-Kt+k_nx_n) ,\ (4.\ 1.9)$$

$$\Phi\ (J_i)\,\hat{}_k= -\varepsilon\ \Pi(J_i)\{(\gamma_1-i\gamma_2)+is\eta\ (k, \varepsilon)(\gamma_3\gamma_1-i\gamma_3\gamma_2)\ h_{\mu\nu}{}^{1+}\ (J_i)\}_k\ \zeta^{\mu}\zeta^{\nu}$$
$$\Phi\ (J_i)\,\hat{}_{-k}=- \varepsilon\ \Pi(J\,j)\{(\gamma_1-i\gamma_2)-is\eta\ (k, \varepsilon)(\gamma_3\gamma_1-i\gamma_3\gamma_2)\ h_{\mu\nu}{}^{1+}\ (J_j)\}_{-k}\ \zeta^{\mu}\zeta^{\nu}$$
$$i= 1,2,\quad j = 3,4 \qquad (4.\ 1.10)$$

$$\Phi\,\hat{}= \Sigma_k\{[\alpha_1\ \Phi_k(J_1)^+ +\alpha_2\ \Phi_k(J_2)^+]-$$
$$-[\alpha_3\ \Phi_{-k}(J_3)^+ +\alpha_4\ \Phi_{-k}(J_4)^+]\}\ \exp[-i(-Kt+k_nx_n),\ (4.\ 1.11)$$

Переходя к операторам вторичного квантования будем иметь

$$2^{1/2}\ \Phi\ (J_i)_k=\{[\ (1- is\eta_1)\ A +(1+ is\eta_1)B^+]\ h_{\mu\nu}{}^1\ (J_i)\}_k\Pi(J_i)\ \zeta^{\mu}\zeta^{\nu}$$
$$2^{1/2}\ \Phi\ (J_j)_{-k}=\{[(1+is\eta_2)A+(1-is\eta_2)B^+]\ h_{\mu\nu}{}^1\ (J_j)\}_{-k}\Pi(J_j)\ \zeta^{\mu}\zeta^{\nu}$$
$$2^{1/2}\ \Phi\ (J_i)_k{}^+=-\Pi(J_i)\{[(1+is\eta_1)A^+ +(1-is\eta_1)\ B\ ]\ h_{\mu\nu}{}^1\ (J_i)\}_k\ \zeta^{\mu}\zeta^{\nu}$$

ISSN 1512-1461

$$2^{1/2}\,\Phi\,(J_j)_{-k}{}^{+}=-\Pi(J_j)\{(1-is\eta_2)A^{+}+(1+is\eta_2)B\,]\,h_{\mu\nu}{}^{1}\,(J_j)\}_{-k}\,\zeta^{\mu}\zeta^{\nu}$$
$$i=1{,}2,\quad j=3{,}4 \qquad (4.\ 1.12)$$

При этом

$$\Phi\,(J_i)_k{}^{+}\,\Phi\,(J_i)_k=(1/2)\,\Pi(J_i)\,\{[\,(1+\eta_1{}^2)(\,A^{+}\,A+B\,B^{+})+$$
$$+((1+is\eta_1)^2A^{+}B^{+}+(1-is\eta_1)^2BA]\}h_{\mu\nu}{}^{1}(J_i)_k{}^{+}h_{\lambda\rho}{}^{1}(J_i)_k\Pi(J_i)\,\zeta^{\mu}\zeta^{\nu}\,\zeta^{\lambda}\,\zeta^{\rho}$$

$$\Phi\,(J_j)_{-k}{}^{+}\,\Phi\,(J_j)_{-k}=(1/2)\,\Pi(J_j)\{[\,(1+\eta_2{}^2)(\,A^{+}\,A+B\,B^{+})+$$
$$+((1-is\eta_2)^2A^{+}B^{+}+(1+is\eta_2)^2BA]\}h_{\mu\nu}{}^{1}(J_j)_{-k}{}^{+}h_{\lambda\rho}{}^{1}(J_j)_{-k}\Pi(J_j)\,\zeta^{\mu}\zeta^{\nu}\zeta^{\lambda}\,\zeta^{\rho}$$
$$i=1{,}2,\quad j=3{,}4 \qquad (4.\ 1.13)$$

Так как $A^{+}\,B^{+}=B\,A=0$, то получаем

$$\Phi\,(J_i)_k{}^{+}\,\Phi\,(J_i)_k=(1/2)\Pi(J_i)(1+\eta_1{}^2)(A^{+}A+BB^{+})h_{\mu\nu}{}^{1}(J_i)_k{}^{+}h_{\mu\nu}{}^{1}(J_i)_k\Pi(J_i)\,\zeta^{\mu}\zeta^{\nu}\zeta^{\lambda}\zeta^{\rho}$$

$$\Phi(J_j)_{-k}{}^{+}\,\Phi(J_j)_{-k}=(1/2)\Pi(J_j)(1+\eta_2{}^2)(A^{+}A+B\,B^{+})h_{\mu\nu}{}^{1}(J_j)_{-k}{}^{+}h_{\lambda\rho}{}^{1}(J_j)_{-k}\Pi(J_j)\,\zeta^{\mu}\zeta^{\nu}\zeta^{\lambda}\zeta^{\rho}$$

$$\Phi^{+}\Phi=\Sigma_k[(1/2)\Pi(J_i)(A^{+}A+BB^{+})\Pi(J_i)(1+\eta_1{}^2)^{+}h_{\mu\nu}{}^{1}(J_i)_k{}^{+}h_{\lambda\rho}{}^{1}(J_i)_k+$$
$$+(1/2)\Pi(J_j)(A^{+}A+BB^{+})\Pi(J_j)(1+\eta_2{}^2)h_{\mu\nu}{}^{1}(J_j)_{-k}{}^{+}h_{\lambda\rho}{}^{1}(J_j)_{-k}\Pi(J_j)]\,\zeta^{\mu}\zeta^{\nu}\zeta^{\lambda}\zeta^{\rho}$$
$$i=1{,}2,\quad J=3{,}4 \qquad (4.\ 1.14)$$

Введем "элементарный четырехмерный объем", - четырехмерную ячейку

$$\zeta^{\mu}\zeta^{\nu}\zeta^{\lambda}\zeta^{\rho}=\Delta_{(v)}{}^{-\mu\lambda\nu\rho}(\mathbf{x'},\mathbf{k})=l_0(\mathbf{x'},k)^3cT^0m^{\mu\lambda\nu\rho}=l_0\,(\mathbf{x'},\mathbf{k})^4n(k)m^{\mu\lambda\nu\rho}$$

$$l_0\,(\mathbf{x'},k)=\mathbf{v_g}\,T^0=(c/n(k))T^0,\qquad cT^0=n(k)l_0\,(\mathbf{x'},k) \qquad (4.\ 1.15)$$

где $\mathbf{m}^{\mu\lambda\nu\rho}$ - единичный тензор, $\mathbf{l_0\,(x')}$ - характерная длина, $\mathbf{T^0}$ - характерное время, где будут учтены соотношения, которые будут получены в данной работе позже, и где $\mathbf{v_g}$ - скорость гравитационных волн, **n(k)** - постоянная преломления гравитационных волн в гравитационном поле.

Введем обозначение

$$h_{\mu\lambda}{}^{1+}(J_i)_k\,h_{\nu\rho}{}^{1}(J_i)_k=n_{\mu\lambda\ \nu\rho}\,(J_i)_k$$
$$h_{\mu\lambda}{}^{1+}(\,J_j)_{-k}\,h_{\nu\rho}{}^{1}(J_j)_{-k}=n_{\mu\lambda\ \nu\rho}\,(J_j)_{-k} \qquad (4.\ 1.16)$$

где $n_{\mu\lambda\,\nu\rho}(J_i)_{\pm k}$ постоянный тензор размерности $см^{-7}$.
Тогда $\Phi^{+}\Phi$ можно записать в виде

$$\Phi^{+}\,\Phi=l_0\,(\mathbf{x'})^4\,\Sigma_k[\,(1/2)\Pi(J_1)(A^{+}A+BB^{+})\Pi(J_1)(1+\eta_1{}^2)^{+})\,n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}\,(J_1)_k\,+$$
$$+(1/2)\Pi(J_2)(A^{+}A+BB^{+})\Pi(J_2)(1+\eta_2{}^2)\,n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}(J_j)_{-k}]m^{\mu\lambda\nu\rho} \qquad (4.\ 1.17)$$

Тогда для P_μ получаем

$$P_\mu=\int T_{\mu4}dv=(1/2)\int(\Phi\,\hat{}\gamma_4\partial_\mu\,\Phi-\partial_\mu\,\Phi\,\hat{}\gamma_4\,\Phi)\,dv=$$
$$==\boldsymbol{\Sigma_{k\alpha}\,L_\alpha{}^3\,l_0\,(k)_\alpha{}^2\,k_\mu}\,\{\,[(1/2)\Pi(J_1)(A^{+}A+BB^{+})\Pi(J_1)(1+\eta_1{}^2)\,n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}\,(J_1)_k\,+$$
$$+(1/2)\Pi(J_2)(A^{+}A+BB^{+})\Pi(J_2)(1+\eta_2{}^2)\,n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}\,(J_2)_k\,]+$$
$$+[(1/2)\Pi(J_3)(A^{+}A+BB^{+})\Pi(J_3)\,(1+\eta_1{}^2)\,n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}\,(J_3)_{-k}\,+$$
$$+(1/2)\Pi(J_4)(A^{+}A+BB^{+})\Pi(J_4)(1+\eta_2{}^2)\,n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}\,(J_4)_{-k}\,]\}_{\boldsymbol{\alpha}}m^{\mu\lambda\nu\rho}, \qquad (4.\ 1.18)$$

ISSN 1512-1461

В качестве условия квантования для каждой ячейки **α**, в случае частицы ε=1, примем

$$\mathbf{L_\alpha^3\, l_0\,(k)_\alpha^4}\ [K/(K-k_g)]\Pi(J_1)(A^+A+B\,B^+)\Pi(J_1)n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}(J_1)_k\, m^{\mu\lambda\nu\rho}=N(J_1)\Pi(J_1)$$
$$\mathbf{L_\alpha^3\, l_0\,(k)_\alpha^4}\ [K/(K-k_g)]\Pi(J_2)(A^+A+BB^+)\Pi(J_2)\, n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}(J_2)_k\, m^{\mu\lambda\nu\rho}= =N(J_2)\Pi(J_2) \qquad (4.\ 1.19)$$

И при нормировке

$$\mathbf{L_\alpha^3\, l_0\,(k)_\alpha^4}\ [K/(K-k_g)]n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}\,(J_1)_k\ m^{\mu\lambda\nu\rho}=1$$
$$\mathbf{L_\alpha^3\, l_0\,(k)_\alpha^4}\ [K/(K-k_g)]n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}\,(J_2)_k\ m^{\mu\lambda\nu\rho}=1 \qquad (4.\ 1.20)$$

и

$$n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}\,(J_1)_k = n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}\,(J_1)_k = \mathbf{l_0\,(k)_\alpha^{-7}}\ [8(K-k_g)/K]\ m^{\mu\lambda\nu\rho}$$

получаем

$$\mathbf{(L/l_0\,(k)_\alpha)^3=1}$$

При этом условия квантования для каждой ячейки **α**, в случае частицы ε=1, примут вид

$$\Pi(J_1)\ 8(A^+A+B\,B^+)\ \Pi(J_1)=N(J_1)\ \Pi(J_1)$$
$$\Pi(J_2)\ 8(A^+A+B\,B^+)\ \Pi(J_2)= N(J_2)\ \Pi(J_2) \qquad (4.\ 1.21)$$

Для античастиц ε=-1 учтем соотношения

$$8(A^+A+B\,B^+)= [2-8(A\,A^++ B^+\,B)] \qquad (4.\ 1.22)$$

Условия квантования для каждой ячейки **α** определим в виде

$$\mathbf{L_\alpha^3\, l_0\,(k)_\alpha^4}\ [K/4(K+k_g)]\Pi(J_3)[2-8(AA^++B^+B)]\Pi(J_3)n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}(J_3)_{-k}\, m^{\mu\lambda\nu\rho} = =[2-N(J_3)^*]\Pi(J_3)$$
$$\mathbf{L_\alpha^3\, l_0\,(k)_\alpha^4}\ [K/4(K+k_g)]\Pi(J_4)[2-8(AA^++B^+B)]\Pi(J_4)\, n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}\,(J_4)_{-k}\, m^{\mu\lambda\nu\rho} = = [2-N(J_4)^*]\Pi(J_4) \qquad (4.\ 1.23)$$

И при нормировке в виде

$$\mathbf{L_\alpha^3\, l_0\,(k)_\alpha^4}\ [K/8(K+k_g)]\ n(J_3)^{-k}\, n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}\, m^{\mu\lambda\nu\rho} =1$$
$$\mathbf{L_\alpha^3\, l_0\,(k)_\alpha^4}\ [K/8(K+k_g)]\ n(J_4)^{-k}\, n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}\, m^{\mu\lambda\nu\rho}\, l_0 =1 \qquad (4.\ 1.24)$$

и

$$n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}\,(J_3)_{-k} = n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}\,(J_4)_{-k} = \mathbf{l_0\,(k)_\alpha^{-7}}\ [8(K+k_g)/K]\ m^{\mu\lambda\nu\rho}$$

получаем

$$\mathbf{(L/l_0\,(k)_\alpha)^3=1}$$

При этом условия квантования для каждой ячейки **α**, в случае частицы ε=-1, примут вид

$$\Pi(J_3)\ [2-8(A\,A^++ B^+\,B)]\ \Pi(J_3) =[2-N(J_3)^*]\Pi(J_3)$$
$$\Pi(J_4)\ [2-8(A\,A^++ B^+\,B)]\ \Pi(J_4)= [2-N(J_4)^*]\Pi(J_4) \qquad (4.\ 1.25)$$

Таким образом, находим

$$P_\mu= \mathbf{\Sigma_{k\alpha}\ k_{\mu\alpha}}\ \{[\ N(J_1)\ \Pi(J_1)+ N(J_2)\Pi(J_2) + - N(J_3)^*\ \Pi(J_3)- N(J_4)^*\ \Pi(J_4))]+2\ [\Pi(J_3)+ \Pi(J_4)]\}_\alpha \qquad (4.\ 1.26)$$

ISSN 1512-1461

Как видим, "элементарный четырехмерный объем", четырехмерная "**α**-ячейка"

$\Delta_{(v)}^{\mu\lambda\nu\rho}(\mathbf{x'}, \mathbf{k})_{\alpha} = [l_0(\mathbf{k})^3 cT^0]_{\alpha}\, m^{\mu\lambda\nu\rho} = n(k)\mathbf{l_0}(\mathbf{k})_{\alpha}{}^{4} m^{\mu\lambda\nu\rho}$
$cT^0 = n(k) l_0(\mathbf{k})$ (4. 1.27)

выступает в качестве кванта гравитационного поля. Таким образом, в отдельности ни гравитационное поле, ни пространство не квантуются –квантуется только гравитационное поле со своим четырехмерным объемом в виде элементарной четырехмерной "ячейки"

$\Delta_{(v)}^{\mu\lambda\nu\rho}(\mathbf{x'}, \mathbf{k}) = l_0(k)^3 cT^0 m^{\mu\lambda\nu\rho} = n(k)\mathbf{l_0}(\mathbf{k})_{\alpha}{}^{4} m^{\mu\lambda\nu\rho}$ (4. 1.28)

П2.В случае изотропного интервала
В данном случае, как и в случае линейного интервала, масса спинора $k_g = 0$, и можно ограничиться рассмотрением только состояния (ε=+, k) и двух первых уравнений при $k_g = 0$, $\eta = \varepsilon$. Имеем

$\Phi\,(J_i)_k = \{[(\gamma_1 + i\gamma_2) - is(\gamma_3\gamma_1 + i\gamma_3\gamma_2)]\, h_{\mu\nu}{}^{1}\,(J_i)\}_k \Pi(J_i)\, \zeta^{\mu}\zeta^{\nu}$
$\Phi\,(J_i)^{+}{}_k = -\,\Pi(J_i)\{(\gamma_1 - i\gamma_2) - is(\gamma_3\gamma_1 - i\gamma_3\gamma_2)\, h_{\mu\nu}{}^{1+}\,(J_i)\}_k\, \zeta^{\mu}\zeta^{\nu}$ (4.2.1)
$\gamma_1 = \gamma_1(J_i),\ \gamma_2 = \gamma_2(J_i),\ \gamma_3 = \gamma_3(J_i),\ i = 1,2$ (4. 2.2)

Переходя к операторам вторичного квантования будем иметь

$2^{1/2}\,\Phi\,(J_i)_k = \{[\,(1 - is)\,A + (1 + is)B^{+}]\, h_{\mu\nu}{}^{1}\,(J_i)\}_k \Pi(J_i)\, \zeta^{\mu}\zeta^{\nu}$
$2^{1/2}\,\Phi\,(J_i)_k{}^{+} = -\Pi(J_i)\{[(1+is)A^{+} + (1-is)\,B\,]\, h_{\mu\nu}{}^{1}\,(J_i)\}_k\, \zeta^{\mu}\zeta^{\nu}$
$\gamma_1 = \gamma_1(J_i),\ \gamma_2 = \gamma_2(J_i),\ \gamma_3 = \gamma_3(J_i),\ i = 1,2$ (4. 2.3)

При этом
$\Phi\,(J_i)_k{}^{+}\, \Phi\,(J_i)_k = \Pi(J_i)\ \{[\,(A^{+}A + B\,B^{+}) +$
$+ (1+is)^2 A^{+}B^{+} + (1-is)^2 BA]\} h_{\mu\nu}{}^{1}(J_i)_k{}^{+} h_{\lambda\rho}{}^{1}(J_i)_k \Pi(J_i)\, \zeta^{\mu}\zeta^{\nu}\zeta^{\lambda}\zeta^{\rho}$. i= 1,2

$\Phi^{+}\,\Phi = l_0\,(\mathbf{x'})^4\, \Sigma_k[\Pi(J_1)(A^{+}A + BB^{+})\Pi(J_1))\, n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}\,(J_i)_k\ +$
$+ \Pi(J_2)(A^{+}A + BB^{+})\Pi(J_2) n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}\,(J_i)_k\ ]\, m^{\mu\lambda\nu\rho}$ (4. 2.4)

Тогда для P_μ получаем

$P_\mu = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{k\alpha}}\, \mathbf{L_\alpha}^{3}\, \mathbf{l_0}\,(\mathbf{k})_{\alpha}{}^{2}\ \mathbf{k}_{\mu\,\alpha}\ \{\,[\Pi(J_1)(A^{+}A + BB^{+})\Pi(J_1)\, n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}\,(J_1)_k\ +$
$+ \Pi(J_2)(A^{+}A + BB^{+})\Pi(J_2)\, n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}\,(J_2)_k\ ]\}\, m^{\mu\lambda\nu\rho}$ (4. 2.5)

В качестве условия квантования для каждой ячейки **α** в случае частицы ε=1 примем

$L^3\Pi(J_1)(A^{+}A + B\,B^{+})\Pi(J_1)\, n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}\,(J_1)_k\ m^{\mu\lambda\nu\rho}\, l_0\,(\mathbf{x'})^4 = N(J_1)\,\Pi(J_1)$
$L^3\Pi(J_2)(A^{+}A + BB^{+})\Pi(J_2)\, n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}(J_2)_k m^{\mu\lambda\nu\rho}\, l_0\,(\mathbf{x'})^4 = N(J_2)\Pi(J_2)$ (4. 2.6)

И при нормировке
$\mathbf{L_\alpha}^{3}\, n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}(J_1)_k\, m^{\mu\lambda\nu\rho}\, l_0\,(\mathbf{x'})_{\alpha}{}^{4} = 8,$
$\mathbf{L_\alpha}^{3} n_{\mu\lambda,\,\nu\rho}(J_2)_k\, m^{\mu\lambda\nu\rho}\, l_0\,(\mathbf{x'})_{\alpha}{}^{4} = 8.$ (4. 2.7)

получаем

ISSN 1512-1461

$\Pi(J_1)\ 8(A^+A+B\ B^+)\ \Pi(J_1)=N(J_1)\ \Pi(J_1)$
$\Pi(J_2)\ 8(A^+A+B\ B^+)\ \Pi(J_2)= N(J_2)\ \Pi(J_2)$ (4. 2.8)

Таким образом находим

$P_\mu= \Sigma_{k\ \alpha}\ k_{\mu\ \alpha}\ [\ N(J_1)\ \Pi(J_1)+ N(J_2)\Pi(J_2)\ ]_\alpha$ (4. 2.9)

Как видим, "элементарный четырехмерный объем" - четырехмерная "ячейка"

$$\Delta_{(v)}{}^{\mu\lambda\nu\rho}(k)_{\alpha} =[l_0(k)^3 cT^0]_{\alpha}\, m^{\mu\lambda\nu\rho} = n_g(k)\, \mathbf{l_0\,(k)_\alpha}^4 m^{\mu\lambda\nu\rho},$$
$$cT^0= n_g(k)\, \mathbf{l_{0\,\alpha}}$$
$$v_g =c/ n_g, \quad n_g=[1+ (k_{0g}/ ck)^2]^{1/2}{}_{\alpha} \qquad (4.\ 2.10)$$

со своим гравитационным полем выступает в качестве кванта гравитационного поля.
Таким образом, в отдельности ни гравитационное поле, ни пространство не квантуются – квантуется только гравитационное поле со своим
четырехмерным объемом в виде элементарной четырехмерной "ячейки" - с пространственным размером $l_0=(æħ/c)^{1/2}=0,8.10^{-32}$см и временным интервалом $T_0=l_0/v_g$, где $v_g =c/ n_g$ **-** скорость гравитационных волн, $n_g=[1+ (k_{0g}/ ck)^2]^{1/2}$, $k_{0g}= (m_g\ c\ /\ ħ)=12.\ 10^{-29}$ см, $m_g =10^{-66}$гр.- масса кванта гравитационного поля, $m^{\mu\lambda\nu\rho} m_{\mu\lambda\nu\rho} =1$

§5. Характерные размеры квантовой структуры гравитационного поля и пространственно-временной ячейки.

П1..Характерные размерные параметры, построенные из абсолютных постоянных

$c=3.10^{10}$ (см/сек), $ħ=1,06.\ 10^{-27}$гр.см^2/сек

$æ=8\pi k/c^2= 1,86.\ 10^{-27}$(см/гр) (5. 1.1)

где **k** т.н. гравитационная постоянная $k=6,68.10^{-8}$ см^3/гр.сек^2 , можно образовать две характерные размерные постоянные величины.

$\mathbf{l_0} = (æ\ ħ\ /\ c)^{1/2} =0,8.10^{-32}$см
$\mathbf{м_g}= (ħ\ /æc)^{1/2}=0.2.\ 10^{-5}$гр (т.н. масса Планка) (5. 1.2)

При этом, между ними существует соотношение

$\mathbf{l_0}= (æ\ ħ\ /\ c)^{1/2} = ħ\ /c(\ ħ/æc)^{1/2}= ħ\ /c\ м_g= \boldsymbol{\lambda_g}^{\mathbf{k}}$ (5. 1.3)

где $\boldsymbol{\lambda_g}^{\mathbf{k}}$ является длиной волны Де Бройля для $\mathbf{м_g}$

Таким образом, рассматривая $\mathbf{l_0}= (æħ/c)^{1/2}=0,8.10^{-32}$см как размер пространственной ячейки находим, что он равен длине волны
Де Бройля для $\mathbf{м_g}$

П2. О скорости гравитационных волн
Уравнение Эйнштейна допускает существование гравитационных волн. Соответственно возникает вопрос о скорости гравитационных волн. При рассмотрении этого вопроса следует учесть, что:

ISSN 1512-1461

1.Скорость электромагнитных волн и, в частности, света **–c=3.10^{10}см/сек** является постаянной только в линейной электродинамике Максвелла и в случае вакуума. В среде с коэффициентом преломления **n≥1,** скорость света

$\mathbf{v_c=c/\ n}$ (5. 2.1)

2. В случае частицы с массой покоя m_0, когда для энергии и импульса имеем соотношение

$E^2=c^2p^2+(m_0\ c^2)^2.$, $E=\hbar\omega$, $p=\hbar k$, $k=1/\lambda$

$\omega^2=c^2k^2+c^2k_0^2$. $k_0=(m_0\ c/\hbar)=1/\lambda_0$ (5. 2.2)

$(\omega/c)^2=k^2+k_0^2$, . $k_0=(m_0\ c/\hbar)$

где λ_0 - длина волны Де Бройля для $\mathbf{m_0}$

Для скорости частицы -v - имеем

$v=c^2p/E=c^2\ k/\omega=c\ k/(k^2+k_0^2)^{1/2}=c/[1+(k_0/k)^2]^{1/2}$, (5. 2.3)

т.е.

$v=c/\ n$, $n=E/cp$, $n=[1+(k_0/k)^2]^{1/2}$ (5. 2.4)

Или в виде

$v=c\ (cp/E)=c[1-(m_0\ c^2/E)^2]^{1/2}=c/\ n$

$n=[1-(m_0\ c^2/E)^2]^{-1/2}$, $\lambda=[(\omega/c)^2-k_0^2]^{-1/2}$, (5. 2.4')

3.В случае гравитационных волн нужно учесть, что уравнение Эйнштейна для гравитационного поля нелинейно, и, следовательно, гравитационные волны имеют массу, возникшую благодаря нелинейному взаимодействию.Как уже было сказано, из абсолютных постоянных можно образовать велчину размерности массы в виде т.н. масс Планка 10^{-5}гр. Соответствующая длина волны Де Бройля $\mathbf{l_0\sim10^{-32}}$**см** дает линейный размер пространственной квантовой ячейки. Масса Планка слишком велика для массы кванта гравитационного поля. Однако, учитывая связь космологических и локальных свойств материи и привлекая наряду с абсолютными постоянными один из постоянных параметров элементарных частиц для массы кванта гравитационного поля в [5] было получено значение

$m_g=4.10^{-66}$гр, (5. 2.8)

которое и укоренилось в науке как масса кванта гравитационного поля.

При этом

$k_{0g}=(m_g\ c/\hbar=12.10^{-29}=1/\lambda_g$ (5. 2.9)

где λ_g - соответствующая длина волны Де Бройля. При этом

$\lambda_g=\hbar/c\ m_g=10^{28}$см $\approx R_0$ (5. 2.10)

где R_0 - радиус нашего участка Вселенной

Таким образом, для скорости кванта гравитационного поля получаем

$v_g=c/\ n_g$, $n_g=[1+(k_{0g}/ck)^2]^{1/2}$ (5. 2.11)

$n_g=[1-(m_g\ c^2/E)^2]^{-1/2}$

$E=\hbar\omega$, $\omega^2=c^2k^2+c^2k_g^2$. $k_g=(m_g\ c/\hbar)=1/\lambda_g$

4. Когда гравитационное поле рассматривается в линейном приближении, то принимается, что

$k_{0g}=0$, $m_g=0$, $n_g=1$, $v_g=c$ (5. 2.12)

ISSN 1512-1461

Литература

1. Д.Курдгелаидзе, Известия Вузов. Физика, 1990 г. N 5, стр. 18-23.
2. Д.Курдгелаидзе, Введение в неассоциативную теорию поля, част 1,Тбилиси,2005г , част 2, 2011г.
3. Н.Мицкевич.”Физические поля в Общей Теории Относительности”, 1969г, стр 136, Изд. “Наука”,Москва.
4. Д,Д,Иваненко.А.А. Соколов ,”Квантовая теория поля”, 1952г, ГИТТЛ,Москва.
5. Д.Курдгелаидзе, жтф, 1964г , т 47,12,ст.2314.

Summary

Quantization of a gravitational field in a formalism of hypercomplex number is lead. Thus separately neither a gravitational field, nor space is not quantized– only a gravitational field with the four-dimensional volume in the form of “an elementary four-dimensional cell” is quantized.

$\mathbf{dx'^{\mu}dx'^{\nu}dx'^{\lambda}\,dx'^{\rho}} = \Delta_{(v)}{}^{\mu\lambda\nu\rho}\,\mathbf{(x')} = l_0^4\, n_g(k)\, m^{\mu\lambda\nu\rho}$

and an elementary four-dimensional volume - “a four-dimensional cell”- with its gravitational field acts as quantum of a gravitational field.

Thus ' the four-dimensional cell ' has the spatial size $l_0=(æħ/c)^{1/2}=0{,}8.10^{-32}$см and time interval $T_0=l_0/v_g$, where $v_g=c/n_g$ is a speed of gravitational waves, $n_g=[1+(k_{0g}/ck)^2]^{1/2}$, $k_{0g}=(m_g c/ħ)=12.10^{-29}$ см, $m_g=4.10^{-66}$gr is a weight of quantum of a gravitational field.

Besides , we have $m^{\mu\lambda\nu\rho} m_{\mu\lambda\nu\rho}=1$

Article received: 2012-10-03