

УДК 97М10, 97М70

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ

Темур Чилачава, Лейла Сулава

Сухумский государственный университет, г.Тбилиси, ул.Политковской 9.
temo_chilachava@yahoo.com; le83o@hotmail.com

Аннотация

В настоящей работе рассмотрена нелинейная математическая модель, описывающая административное воздействие на людей (сотрудников), с целью управления ими. В случае переменного административного воздействия (сила административного воздействия меняется во времени и прямо пропорциональна количеству граждан (сотрудников) с активной жизненной позицией) задача Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка решена аналитически точно и в зависимости от различных соотношений между параметрами модели (коэффициент активности, фактор административного воздействия) и начальными условиями получены три различных случая: количество активных сотрудников с течением времени со скоростью гиперболической функции стремится к нулю, тогда как количество конформистов стремится к общему суммарному количеству сотрудников (модель подчинения); количество людей с активной позицией с течением времени стремится к определённому количеству, которое больше их начального числа, а количество конформистов, наоборот, с течением времени стремится к числу, которое меньше их изначального значения (модель либерального управления); количество активных людей экспоненциально стремится к нулю, а количество конформистов, в свою очередь, стремится к общему суммарному количеству сотрудников (модель полного подчинения, тоталитарная модель).

Ключевые слова: нелинейная математическая модель; администрация; конформисты; активисты; переменное административное воздействие.

Синергетика является одним из самых популярных и перспективных методов изучения связей между различными научными направлениями [1 - 4]. В настоящей работе нашей задачей является описание на языке математики (создание математической модели) такого социального процесса, каковым является административное управление. Последнее может осуществляться например, на микроуровне (учебное или научно-исследовательское заведение, промышленный или финансовый объект и др.). В данной модели рассматривается три объекта:

- Администрация, целью которой является управление людьми, находящимися в ее подчинении, в соответствии со своими целями. Её цели могут быть как справедливыми (либеральное или демократическое управление), так и несправедливыми (недемократическое или тоталитарное управление);

- Конформисты;

- Граждане (сотрудники) с активной жизненной позицией.

Математическая модель описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями. Административное управление, которое может иметь различные формы, в общем случае, определяется заданной функцией времени. В случае постоянного административного воздействия задача

Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка была ранее решена аналитически точно и в зависимости от различных соотношений между параметрами модели (коэффициент активности, фактор административного воздействия) и начальными условиями получены пять различных случаев [5 - 8]:

- вне зависимости от стартовых условий количество активных сотрудников стремится к определенному равновесному значению, которое больше половины их общего количества (мягкое, либеральное управление);

- несмотря на постоянное административное воздействие и различные стартовые условия в социуме установится равное количество активных людей и конформистов (демократическое управление);

- количество активных людей, которое изначально было больше количества конформистов, стремится к равновесному значению, которое меньше половины их общего количества (слабо демократическое управление);

- количество активных людей, которое изначально было меньше или равно количеству конформистов, стремится к нулю (близко к диктаторскому управлению);

- количество активных сотрудников, которое изначально было больше количества конформистов, стремится к нулю (тоталитарное управление).

В данной работе мы рассмотрим случай, когда сила административного воздействия меняется во времени и прямо пропорциональна количеству граждан (сотрудников) с активной жизненной позицией.

Математическая модель имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t)y(t) - \beta x(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -\alpha x(t)y(t) + \beta x(t), \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t)$ – количество активных сотрудников в момент времени t , $y(t)$ количество

конформистов в момент времени t , α – показатель активности сотрудников, β

- **линейный** показатель силы административного воздействия.

Система уравнений (1) первого порядка, поэтому необходимо задать одно начальное условие Коши:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (2)$$

В период времени, в течении которого рассматривается данная модель, не учитываются количественные изменения в обеих группах (приток и отток сотрудников или предполагается, что они равны). Рассматривается непрерывная модель, т.е. у искомым функций системы (1) существуют непрерывные производные первого порядка. Количественные изменения функций $x(t)$ и $y(t)$ в момент времени t описываются нелинейной системой дифференциальных уравнений первого порядка (1).

Таким образом, получим задачу Коши (1), (2). Исходя из модели ясно, что $\alpha > 0$,

$\beta > 0$.

Единственное решение (1), (2) в случае $\alpha a - \beta \neq 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0(1+\alpha)e^{t(\alpha a-\beta)}}{1+\alpha e^{t(\alpha a-\beta)}} \\ y(t) &= \frac{a + (y_0 \alpha - x_0)e^{t(\alpha a-\beta)}}{1+\alpha e^{t(\alpha a-\beta)}} \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим два случая:

I. $\alpha a - \beta = 0$

Тогда точное решение (1), (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0}{1+\alpha x_0 t} \\ y(t) &= \frac{y_0 + \alpha a x_0 t}{1+\alpha x_0 t} \end{aligned} \quad (4)$$

Анализ точного решения (4) показывает, что в этом случае количество активных сотрудников с течением времени со скоростью гиперболической функции стремится к нулю, тогда как количество конформистов стремится к общему суммарному количеству сотрудников (модель подчинения, см.рис.1).

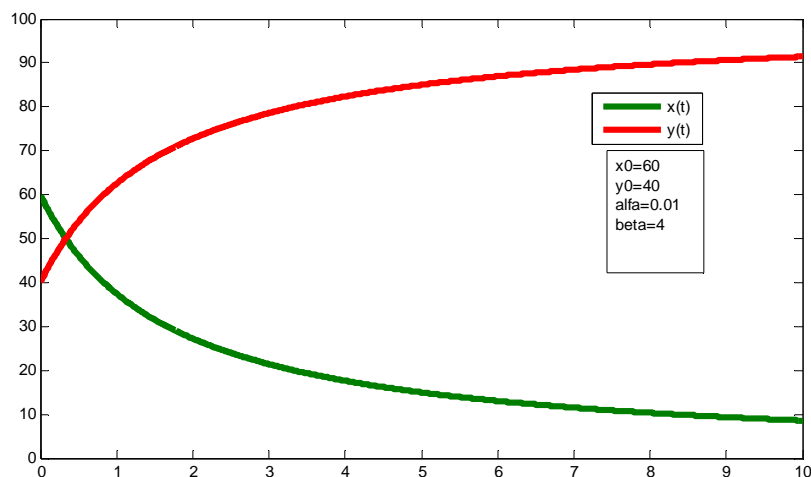


Рис.1

II. При $\alpha a - \beta \neq 0$ рассмотрим три подслучая:

а) $\alpha a - \beta > 0$, $y_0 \alpha - x_0 \geq 0$

Тогда с учётом (3) получим :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{x_0(1+\alpha)}{\alpha} > x_0 \quad (5)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{y_0 \alpha - x_0}{\alpha} < y_0$$

Анализ (5) показывает, что количество людей с активной позицией с течением времени стремится к определённому количеству, которое больше их начального числа. Количество конформистов же, наоборот, с течением времени стремится к числу, которое меньше изначального (модель демократического общества).

б) $\alpha a - \beta > 0, \quad y_0 \alpha - x_0 < 0$

В этом случае в момент времени

$$t_c = \frac{1}{\alpha a - \beta} \ln \frac{a}{x_0 - \alpha y_0} > 0 \tag{6}$$

$$x(t_c) = a, \quad y(t_c) = 0$$

В свою очередь, анализ (6) показывает, что в этом случае через промежуток времени t_c в социуме останутся только граждане (сотрудники) с активной жизненной позицией (модель абсолютно здорового общества, см.рис.2).

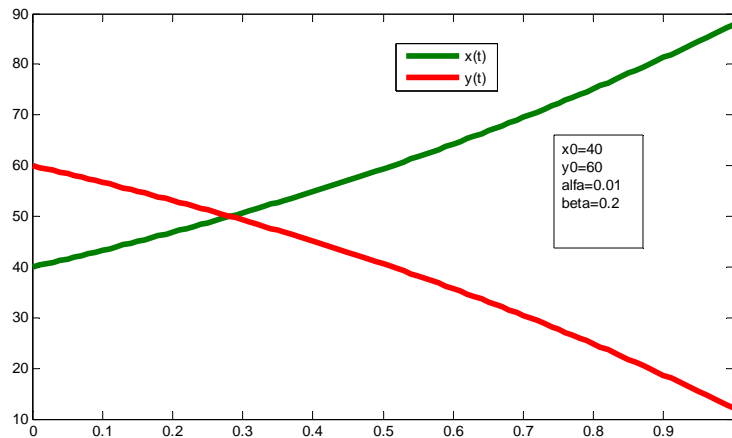


Рис.2

в) $\alpha a - \beta < 0$ и тогда с учётом (3) получим :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = a, \tag{7}$$

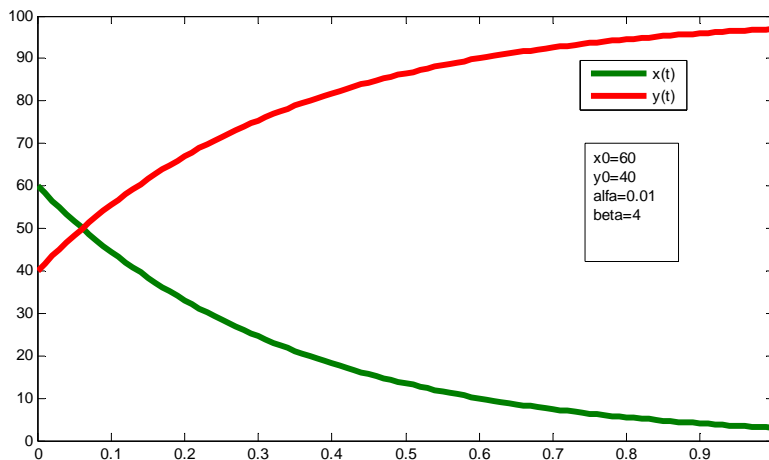


Рис.3

Анализ (7) показывает, что в этом случае количество активных людей экспоненциально стремится к нулю, а количество конформистов, в свою очередь, стремится

к общему суммарному количеству сотрудников (модель полного подчинения, тоталитарная модель, см.рис.3).

Математическая модель кроме теоретического интереса имеет и важное практическое значение, так как обе стороны могут использовать результаты в соответствии со своими целями. Решение позволяет сторонам, согласно выбранной стратегии, подбирать параметры действия и добиваться желательных для себя результатов. От действующей управленческой структуры не зависят стартовые условия сторон, поэтому для них параметром управления являются идеологические и технологические возможности, на использование которых у них имеются всевозможные экономические рычаги.

Литература

1. А.Самарский, А.Михайлов Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-ое изд., испр. Москва, Физматлит, 2005, 320 стр.
2. К.Измоденова, А.Михайлов Об оптимальном управлении процессом распространения информации. Матем. моделирование, 2005, том 17, номер 5, стр. 67 – 76.
3. Т.Чилачава, Ц.Дзидзигури Математическое моделирование, Тбилиси, 2008, 440 стр. (на груз. яз.).
4. Т.Чилачава, Н.Кереселидзе Математическое моделирование информационных войн. Информационные войны, №1(17), 2011, стр. 28 – 35.
5. Т.Чилачава, Ц.Дзидзигури, Л.Сулава, М.Чакаберия Нелинейная математическая модель административного давления. Труды Сухумского государственного университета, т.II, серия Математика и компьютерные науки, изд. СГУ, Тбилиси, 2009, стр.169 – 180 (на груз. языке).
6. T.Chilachava, M.Chakaberia, Ts. Dzidziguri, L.Sulava Nonlinear mathematical model of administrative pressure. Georgian mathematical union. First international Conference, Books of Abstracts. Batumi, September 12 – 19, 2010, p. 74 – 75.
7. Т.Чилачава, Ц.Дзидзигури, Л.Сулава, М.Чакаберия Об одной нелинейной математической модели административного управления. Тезисы докладов Международной конференции «Информационные и компьютерные технологии, моделирование, управление», посвященная 80-летию со дня рождения И.В.Прангишвили, Грузия, Тбилиси, 1 – 4 ноября, 2010, стр. 203 – 204.
8. Т.Чилачава, Л.Сулава, М.Чакаберия Об одной нелинейной математической модели административного управления. Проблемы управления безопасностью сложных систем. Труды XVIII Международной конференции, Москва, 2010, стр. 492 – 496.

Article received: 2012-12-14