ISSN 1512-1461

КЛАСТЕРНО-КАСКАДНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО ОТРИЦАТЕЛЬНОГО БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Л. Н. Абесалашвили, Л. Т. Ахобадзе, Т. Р. Джалагания, Ю. В. Тевзадзе
Институт физики высоких энергий Тбилиского Государственного Университета им. И. Джавахишвили

Аннотация
В работе дано обоснование Кластерно-Каскадной Модели (ККМ) для т. н.Обобщённого Модифицированного Отрицательного Биномиального Распределения (ОМОБР). В рамках предложенной модели, при анализе средней множественности отрицательно заряжённых адронов (рождённых в e^+e^- – столкновениях) выявлено ряд закономерностей относительно изменения параметров характеризующих ККМ. Результаты сравниваются с данными предидущих теоретических работ полученных в рамках Модифицированого Отрицательного Биномиального Распределения- МОБР.

Ключевые слова: *кластерно – каскадная модель, адроны.*

ВВЕДЕНИЕ

Кластерно-Каскадная Модель (ККМ) основанная на Отрицательном Биномиальном Распределении (ОБР) была предложена в работе [1]. В дальнейшем используя эту модель при описании P_n - распределении по множествености заряжённых адронов, рожденних в pp- протон-протонных, электрон-позитронных и pA- протон-ядерных соударениях ,в широком интервале энергии, были обнаружены ряд интересных асимптотических закономерностей в связи т. н. клановои структурой процессов столкновения [2].

С другой стороны описание экспериментальных данных для отрицательно заряжённых адронов, рожденних особенно в $\mathbf{e^+e^-}$ -электрон-позитронных столкновениях, в рамках ОБР оказался не вполне удовлетворительным. По этой причине в работе [3,4,5] было предложено и с успехом использовано т.н. Модифицированное Отрицательное Биномиальное распределение – МОБР. В этих же работах даны интересные, но несколько отличные друг от друга трактовки описания процесов множественного рождения в рамках МОБР.

Целью представленной работы является обобщение ККМ для т.н. Обобщенного – Модифицированного Отрицательного Биномиального Распределения – ОМОБР

ОБОСНОВАНИЕ МОДЕЛИ

Производящий функционал – ПФ для МОБР имеет вид

$$M(x) = [\frac{1+h(1-x)}{1+r(1-x)}]^k = M^{БР}(x)M^{ОБР}(x) \quad , \tag{1}$$

ПФ для ОМОБР имеет более общии вид

$$M(x) = \frac{[1+h(1-x)]^k}{[1+r(1-x)]^L} = M^{БР}(x)M^{ОБР}(x) \quad , \tag{2}$$

Где

$$M^{БР}(x) = [1+h(1-x)]^k \quad , \tag{3}$$

ПФ для Биномиального распределения БР, а

$$M^{ОБР}(x) = [1+r(1-x)]^{-L} \quad , \tag{4}$$

ISSN 1512-1461

ПФ для ОБР.

Параметры **h** и **r** входящие в выражениях (3) и (4) связаны с соотвутствующими средними значениями соотношениями

$$h = -\frac{< n^{БР} >}{k}, \qquad r = \frac{< n^{ОББ} >}{L} \qquad , \tag{5}$$

где $<n^{БР}>$ -средняя множественность соответствующая БР

$<n^{ОБР}>$ - средняя множественность соответствующая ОБР

Отметим , что ПФ вида (2) также была введена в работах [3,4,5] и она была записана так

$$M(x) = \frac{1}{[1+r(1-x)]^{\varepsilon}} \frac{[1+h(1-x)]^{k}}{[1+r(1-x)]^{k}} \qquad , \tag{6}$$

Однако в дальнейшем анализируя экспериментальные данные для вторичных отрицательно заряжённых адронов рожденных в $e^{+}e^{-}$ - столкновениях авторы приходят к выводу, что в рамках имеющейся статистики можно положить ε=0.

Рассмотрим теперь ПФ (2) на основе которой получаем Обобщенное Модифицированное Отрицательное Биномиальное Распределение - ОМОБР

$$p_n^{ОБР} = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n M(x)}{\partial x^n}|_{x=0} = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}[M^{БР}(x) M^{ОБР}(x)]|_{x=0} = \sum_{s=0} P_s^{БР} P_{(n-s)}^{ОБР} \qquad , \tag{7}$$

Где $p_s^{БР}$ и $p_s^{ОБР}$ являются Биномиальным и Отрицательно Биномиальным расспределениями, соответственно, они определяются соотношениями

$$p_s^{БР} = \frac{k!}{(k-s)!s!}\left(\frac{< n^{БР} >}{k}\right)^{s}\left(1-\left(\frac{< n^{БР} >}{k}\right)\right)^{k-s} \qquad , \tag{8}$$

и

$$p_s^{ОБР} = \frac{\Gamma(n+L-s)}{\Gamma(L)(n-s)!}\left(\frac{< n^{ОБР} >}{< n^{ОБР} > + L}\right)^{n-L}\left(\frac{L}{< n^{ОБР} > + L}\right)^{L} \qquad , \tag{9}$$

Как видно из форрмулы (7) ОМОБР выражается как свертка $p_s^{БР}$ и $p_{n-s}^{ОБР}$.

Подставляя выражения (8) и (9) в (7) и переходя от $<n^{БР}>$ и $<n^{ОБР}>$ (согласно выражениям (5)) к параметрам h и r , $p_n^{ОМОБР}$ можно записать в виде

$$p_0^{ОМОБР} = \frac{(1+n)^k}{(1+r)^L} \tag{10а}$$

$$p_n^{ОМОБР} = \frac{k!}{\Gamma(L)}\frac{(1+n)^k}{(1+r)^L}\left(\frac{r}{1+r}\right)^n \sum_{s=0}^{\min(n,k)} \frac{\Gamma(n+L-s)}{s!(k-s)!(n-s)!}\left(\frac{-h(1+r)}{r(1+h)}\right)^s , \quad (n\geq 1) \tag{10б}$$

Где Γ(L) и Γ(n+L-s)-являются известными Γ-функциами Эилера

Из сравнения формул (1) и (2) следует, что при L=k $p_n^{ОМОБР}$ переходит в выражение

$$p_n^{МОБР} = k\left(\frac{1+h}{1+r}\right)^k \left(\frac{r}{1+r}\right)^n \sum_{s=0}^{\min(r,k)} \frac{\Gamma(n+k-s)}{s!(k-s)!(n-s)!}\left(\frac{-h(1+r)}{r(1+n)}\right)^s \qquad , \tag{11}$$

Явный вид $p_n^{ОМОБР}$ указывает, что оно зависит от четырех параметров **k**, **L**, $\underline{<n^{ОБР}>}$, $\underline{<n^{БР}>}$ или, от k,L,h и r. Однако не все они независимы т. к. связаны между собой соотношением

$$< n > = < n^{ОБР} > + < n^{БР} > = rL - hk \qquad , \tag{11а}$$

ISSN 1512-1461

Где <n>-средняя множественность вторичных адронов, которая определяется на эксперименте, $<n^{ОБР}>=rL$- среднее число частиц соответствующая ОБР , $<n^{БР}>=-hk$- среднее число частиц соответствующая БР

ККМ для ОБР была разработана в работе [1]. Поэтому учитывая структуру выражения (7), очевидно, что для достижения цели поставленной в данной работе достаточно развить ККМ для БР. На этой пути мы следует идеологии работы [1]. Здесь мы коротко напомним некоторые основные положения ККМ.

В ККМ предполагается , что при столкновении высокоэнегичных частиц образуется некая многочастичная возбужденная система, которая формируется в виде N-кластерного состояния. Каждий кластер состоит из частиц генерируемых из одной частицы, которая со своей стороны рождается в начальном этапе процесса соударений и называется “патриархом” кластера , или клана. Патриарх который не рождает ни одной вторичной частицы сам образует одночастичный кластер. Предлагается, что “патриархи” рождаются и развиваются нзависимо друг от друга.

Для обоснования ККМ в рамках БР переобозначим в распределении (8) **s** через **n**

$$p_{k,n}^{БР} = \frac{k!}{(k-n)!n!}\left(\frac{<n^{БР}>}{k}\right)^s\left(1-\left(\frac{<n^{БР}>}{k}\right)\right)^{k-n} \quad , \qquad (12)$$

Здесь ***к*** целое число, поэтому очевидно, что $n \le k$ и $<n^{БР}> < k$.

Следуя пути обоснования ККМ для ОБР рассмотрим отношение

$$(n+1)\frac{p_{k,n+1}^{БР}}{p_{k,n}^{БР}} \quad ,$$

Подставляя сюда выражение (12) получаем

$$(n+1)\frac{p_{k,n+1}^{БР}}{p_{k,n}^{БР}} = \alpha + \beta n \quad , \qquad (13)$$

Где

$$\alpha = k\frac{<n^{БР}>}{k-<n^{БР}>} > 0 \quad , \qquad (14)$$

$$\beta = -\frac{<n^{БР}>}{k-<n^{БР}>} < 0 \quad , \qquad (15)$$

Далее, согласно идеологии ККМ представим функцию распределения (12) в виде

$$P_n = \sum_{N=1}^{n} e^{-<N>}\frac{<N>^N}{N!}\sum_{n=n_1+n_2+n_3+\ldots+n_N}^{*}\Phi_c(n_1)\Phi_c(n_2)\ldots\Phi_c(n_N) \quad , \qquad (16)$$

Где <N> - среднее число кластеров (кланов), $\Phi_c(n_c)$ функция распределения частиц внутри кластера, n_c- число частиц в кластере, а Σ^* – суммирование по всем разбиением **n** по $\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}, \ldots \mathbf{n_N}$.

Рекуретное соотношение для функции $\Phi_c(n_c)$ запишем в виде

$$(n_c+1)\frac{\Phi_c(n_c+1)}{\Phi_c(n_c)} = -\beta n_c \quad , \qquad (17)$$

Причем

$$\Phi_c(0)=0 \quad , \qquad (18)$$

Итерируя соотношения (17) получаем

ISSN 1512-1461

$$\Phi_c(n_c) = \frac{1}{n_c}(-\beta)^{n_c-1}\Phi_c(1) \qquad , \qquad (19)$$

Где $\Phi_c(1)$ определяется из условия нормировки

$$\sum_{n_c=1}^{n}\frac{1}{n_c}(-\beta)^{n_c-1}\Phi_c(1) = 1 \qquad , \qquad (20)$$

Откуда

$$\Phi_c(1) = \frac{1}{\sum\limits_{n_c=1}^{n}\frac{1}{n_c}(-\beta)^{n_c-1}} = \frac{-\beta}{\sum\limits_{n_c=1}^{n}\frac{1}{n_c}(-\beta)^{n_c}} \qquad , \qquad (21)$$

Подставляя (21) в (19) получаем

$$\Phi_c(n_c) = \frac{1}{n_c}(-\beta)^{n}\frac{1}{\sum\limits_{n_c=1}^{n}\frac{1}{n_c}(-\beta)^{n_c}} \qquad (22)$$

Или, учитывая (15) окончательно для $\Phi_c(n_c)$ функции распределения частиц внутри кластера получаем

$$\Phi_c(n_c) = \frac{\frac{1}{n_c}\left(\frac{n^{БР}}{k-n^{БР}}\right)^{n_c}}{\sum\limits_{n_c=1}^{n}\frac{1}{n_c}\left(\frac{<n^{БР}>}{k-<n^{БР}>}\right)^{n_c}} \qquad , \qquad (23)$$

Для среднего числа частиц в кластере имеем выражение

$$<n_c^n> = \sum_{n_c=1}^{n} n_c\Phi_c(n_c) = \frac{\sum\limits_{n_c=1}^{n}\left(\frac{<n^{<БР}>}{k-<n^{БР}>}\right)^{n_c}}{\sum\limits_{n_c=1}^{n}\frac{1}{n_c}\left(\frac{<n^{БР}>}{<n^{БР}>}\right)^{n_c}} \qquad , \qquad (24)$$

Здесь необходимо отметить важное отличие этих формул от соответствующих выражений полученных для ОБР. Разница обусловлена тем фактором, что в случае ОБР в условии нормировки (20) суммирование производится от нуля до бесконечности, сумма берётся аналитически и последующие выражения существенно упрощаются.

Далее в выражении (24) мы ввели в $<n_c>$ добавочный индекс n, учитивая тот факт, что оно зависит от n и представляет собой среднее число частиц в кластере (при условии, что полное число частиц равно n). Полное же число частиц в кластере в ККМ для Биномиального распределения определим следующим образом

$$<n_c^{БР}> = \sum_{n=1}^{k} P_{k,n}^{БР} <n_c^n> \qquad , \qquad (25)$$

Для среднего числа кластеров будем иметь

$$<N(БР)> = \frac{<n^{БР}>}{<n_c^{БР}>} \qquad , \qquad (26)$$

Соответствующие выражения в случае ОБР имеют [1,2]

$$<n_c^{ОБР}> = -\frac{p}{(1-p)\ln(1-p)} \qquad (27)$$

где

$$p = \frac{<n^{ОБР}>}{1+<n^{ОБР}>} \qquad (28)$$

ISSN 1512-1461

а для среднего числа кластеров имеем

$$< N(ОБР) >= \frac{< n^{ОБР} >}{< n_c^{ОБР} >} \tag{29}$$

В ОМОБР полное среднее число кластеров (кланов), также как и полное среднее число вторичных адронов (11), определяется выражением

$$< N >=< N(ОБР) > + < N(БР) > \tag{30}$$

АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

ККМ – кластерно-каскадная модель которая основана на ОМОБР нами используется для анализа распределения по множественности отрицательно заряжённых вторичных адронов рождённых в e^+e^- - столкновениях в интервале энергии $(14 \leq \sqrt{s} \leq 206) GeV$.

Для сравнения приводим также результаты полученные в рамках МОБР, которое является частным случаем ОМОБР, при L=k. Результаты представленны в табл. 1, в которой для каждой энергий верхняя строка соответствует случаю МОБР а нижнная ОМОБР. Как видно из таблицы описание экспериментальных данных в рамках ОМОБР, особенно при относительно низких энергиях несколько лучше чем в МОБР, хотя и в последнем случае описание оказывается в полне удовлетварительным. Исключение составляет эксперимент L3 при энергии $\sqrt{s} = 91.2 GeV$ Этот случаи отличается от остальных относительно высокой статистикой и как результат этого удовлетварительное описание эксперимента получается только в рамках ОМОБР. Что касается энергии $\sqrt{s} > 130 GeV$ результаты расчётов показывают что описание в рамках ОМОБР и МОБР практически одинаковое, поэтому для энергии $\sqrt{s} = 200.2 GeV$ и $\sqrt{s} = 206 GeV$ мы приводим только данные полученные в рамках МОБР.

Характеристики ККМ для отрицательно заряжённых вторичных адронов в e^+e^- - столкновениях полученные в рамках ОМОБР представленны в табл. 2. Результаты для $\sqrt{s} = 200.2 GeV$ и $\sqrt{s} = 206 GeV$ полученны в рамках МОБР. При анализе приведенных в этой таблице данных мы будем исходить из следующих предположении: как отмечалось выше как ОМОБР так и МОБР представляют собой свёртку ОБР и БР. С другой стороны ОБР и соответствующий производящии функционал связаны с распределением Бозе-Эйнштейна, а БР и соответствующий производящии функционал связаны с распределением Ферми-Дирака. Исходя из этого , мы делаем предположение, что генератором вторичных адронов в секторе БР являются фермионы т. е. кварки, а генератором вторичных адронов в секторе ОБР являются Бозе-частицы т. е. глюоны.

Как видно из таблицы 2, при относительно низких энергиях в средней множествености вторичных адронов преобладают адроны рождённые в фермионом секторе. Так, например: при $\sqrt{s} = 14 GeV$ $< n^{БР} >= 3.18$, a $< n^{ОБР} >= 1.47$ причём $< n >=< n^{БР} > + < n^{ОБР} >= 4.65$;

С ростом энергии растут как $< n^{БР} >$, так и $< n^{ОБР} >$, но последнее растёт гораздо быстрее и постепенно преобладающими становятся вторичные адроны рождённые в бозоном секторе. В частности при $\sqrt{s} = 206 GeV$ $< n^{ОБР} >= 8.06$, a $< n^{БР} >= 5.80$;

Следует обратить внимание на то что, N-среднее число кластеров (кланов) в фермионов секторе практически постоянно и равно $< N(БР) > \approx 1$, в то время как с ростом энергии $< N^{ОББ} >$ растёт от 1.37 (при $\sqrt{s} = 14 GeV$), до 5.5 при энергии $\sqrt{s} = 182.2 GeV$.

ISSN 1512-1461

Рассмотрим теперь вопрос о физическом содержании параметров **k** и **L** входящих в ОМОБР. В работе [4] при анализе экспериментальных данных в рамках МОБР, было высказано предположение, что параметр k=L можно интерпретировать, как число ароматов кварков. Однако если при относительно низких энергиях такое предположение оказывается вполне удовлетворительным (т. к. к=L≤5), то при более высоких энергиях, в частности уже при энергии больше (или равно) 34 GeV принимает значения в к=L=7÷8. Для объснения этого результата в работе [4] было приведено несколько возможных альтернативных предположении но, все они носят весьма спекулативный характер и требуют дальнейших экспериментальных и теоретических подтверждений.

Как показывают наши расчёты проведенние в рамках ОМОБР в котором k≠L (см. Табл.1.) параметр к соответствующий фермионному (кварковому) сектору принимает значения k≤5 гораздо в широком интервале энергии и только при энергии $\sqrt{s}\geq 150GeV$ становится $k\geq 6$. Вопрос требует дальнеишей теоретической дороботки, для чего необходимо иметь экспериментальние данные более высокой статистикой.

Табл. 1. Параметры МОБР и ОМОБР для отрицательно заряжённых вторичных адронов в e^+e^- -электрон-позитронных столкновениях

$\sqrt{s}GeV$	$<n>$		k	L	H	χ^2/NDF
14 TASSO[6]	4.65	МОБР	5	5	-0.713	11.5/12
		ОМОБР	4	10	-0.795	3/11
22 ,TASSO[6]	5.65	МОБР	6	6	-0.693	8.1/12
		ОМОБР	4	32	-0.819	3.1/11
34.8 , TASSO[6]	6.79	МОБР	7	7	-0.669	14.1/16
		ОМОБР	6	9	-0.725	7.1/15
43.6 , TASSO[6]	7.54	МОБР	9	9	-0.571	12.9/17
		ОМОБР	4	129	-0.783	7.2/16
56, AMY[7]	8.635	МОБР	8	8	-0.698	11.7/17
		ОМОБР	4	43	-0.876	5.5/16
60.8 ,AMY[7]	8.83	МОБР	8	8	-0.735	16/18
		ОМОБР	4	70	-0.897	8.3/17
91.2, ALEPH [8]	10.46	МОБР	7	7	-0.762	4/24
		ОМОБР	4	12	-0.895	3/23
91.2 , L3[9]	10.23	МОБР	7	7	-0.754	77/26
		ОМОБР	5	11	-0.857	26.6/25
130.1 , L3[9]	11.74	МОБР	8	8	-0.696	7/18
		ОМОБР	5	11	-0.903	5/17
182.2 , L3[9]	13.317	МОБР	7	7	-0.815	4.7/20
		ОМОБР	6	8	-0.879	4.5/19
200.2 , L3[9]	13.71	МОБР	7	7	-0.819	17.3/20
		ОМОБР	8	5	-0.807	15.3/19
206 , L3[9]	13.86	МОБР	7	7	-0.828	7.7/20
		ОМОБР	8(9)	6(5)	-0.782 (-0748)	7/19

Табл. 2 Характеристики ККМ для отрицательно заряжённых вторичных адронов в (e^+e^-) столкновениях, в рамках ОМОБР

$\sqrt{s}GeV$	< n>	ОБР			БР		
		< n>	$<n_c>$	<N>	< n>	$<n_c>$	<N>
14 TASSO[6]	4.65	1.47	1.07	1.37	3.18	2.71	1.17
22 TASSO[6]	5.65	2.37	1.04	2.29	3.28	2.88	1.14
34.8 TASSO[6]	6.79	2.44	1.13	2.16	4.35	3.52	1.24
43.6 TASSO[6]	7.54	4.41	1.02	4.33	3.14	2.64	1.19

ISSN 1512-1461

56 AMY[7]	8.635	5.13	1.06	4.85	3.51	3.26	1.08
91.2 ALEPH [8]	10.46	6.52	1.25	5.21	3.94	3.19	1.01
182.2 L3[9]	13.317	8.05	1.45	5.57	5.27	5.06	1.04
200.2 L3[9]	13.71	7.25	1.62	4.48	6.46	6.04	1.07
206 L3[9]	13.86	2.06	1.50	5.36	5.80	5.44	1.06

$<n>$-средняя множественность отрицательно заряжёных частиц.
$<n^{БР}>$-средняя множественность частиц рождённых в фермионном секторе.
$<n^{ОБР}>$-средняя множественность частиц рождённых в бозонном секторе.
$<N>$-среднее число кластеров (кланов).
$<N^{БР}>$--среднее число кластеров (кланов) в фермионном секторе.
$<N^{ОБР}>$- среднее число кластеров (кланов) в бозонном секторе.
$<n_c^{БР}>$- средняя множественность частиц кластере в фермионном секторе
$<n_c^{ОБР}>$- средняя множественность частиц кластере в бозонном секторе

Полученные результаты можно формулировать так:

1. Дано обоснование ККМ-Кластерно-каскадной Модели для Обобщённого Модифицированного Отрицательного Биномиального Распределения (ОМОБР);
2. Показано, что описание экспериментальных данных в e^+e^- - соударениях при относительно низких энергиях в рамках ОМОБР несколько улучшается по сравнению с МОБР;
3. Выявлено ряд закономерностей изменения параметров ККМ с ростом энергии. В частности: если среднее число кластеров в Бозонном секторе $<N(ОБР)>$ растёт с энергией от 1.37 при $(\sqrt{s} = 14GeV)$ до 5.5 (при $\sqrt{s} \gg 130GeV)$, то среднее число кластеров в фермонном секторе $<N(ОБР)>$ практически постоянно ≈ 1 в этом же интервале энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Giovannini and L. Van Hove. Acta. Phys. Poln. B 19 (1988) 495. CERN-TH 4230/85
2. L. Akhobadze, V. Garsevanishvili, T. Jalagania, Yu. Tevzadze. Procedings of I. Javakhishvili Tbilisi State University, PHYSICS 39 (2004) 44.
3. P.V. Chliapnikov and O. G. Tchikilev, Phys. Lett. B 242. (1990) 275
4. P.V. Chliapnikov and O. G. Tchikilev, V.A. Uvarov Phys. Lett. B 352. (1995) 461
5. N. Suzuki, M. Biyajima, G. Vilk, Phys. Lett B 282, (1992), 471
6. TASSO Colab, W. Braunschweig et al Z. Phys. C 45 (1989) 193
7. AMY Collab H.W. Zeng et al, Phys. Rev. D 42, (1990) 737
8. ALEPH Collab D. Decamp et. At. Phys. Lett B. 273 (1991) 121
9. L3 Collab. P. Achard Phys. Rept. 399 (2004)71

Article received: 2012-12-27