

УДК 621.382

МОДЕЛИ АДАПТАЦИИ ФОРМАЛЬНОГО НЕЙРОНААрчил Прангишвили¹, Олег Намичейшвили², Майя Гогиашвили³^{1,2}Грузинский технический университет, ул. Костава 77, 0175 Тбилиси, Грузия³Грузинский университет им. Св. Андрея Первозванного при Патриархии Грузии, пр. И. Чавчавадзе, 53з, 0162 Тбилиси, Грузия¹a_prangi@gtu.ge, ²oleg_namichishvili@hotmail.com, ³m.gogiasvili@hotmail.com 10**Аннотация:**

В работе изучаются методы адаптации формального нейрона при его использовании в качестве устройства, восстанавливающего правильное значение двоичного сигнала. Подразумевается, что на вход формального нейрона по каналам с различной надёжностью подаются разные версии одного и того же двоичного сигнала, а нейрон должен восстановить истинное значение исходного сигнала по этим версиям. Для осуществления этого становится необходимой адаптация формального нейрона. Адаптация интерпретируется как процесс управления весами входов формального нейрона для приведения этих весов в соответствие с текущими вероятностями ошибок входных каналов. Задачей такого управления является обеспечение более надёжным входам большего влияния на принимаемое нейроном решение (т.е. на восстанавливаемый нейроном сигнал) по сравнению с менее надёжными входами. Вместе с тем адаптация может осуществляться различными методами, по различным алгоритмам.

Ключевые слова: формальный нейрон, адаптация, непрерывная и циклическая адаптации, релейная адаптация, обратная связь, алгоритм Уидроу-Хоффа, махаланобисово (обобщённое) расстояние, веса входов нейрона

ВВЕДЕНИЕ.**КЛАССИФИКАЦИЯ ВИДОВ АДАПТАЦИИ ФОРМАЛЬНОГО НЕЙРОНА**

Под адаптацией понимается процесс управления весами входов формального нейрона с целью их приведения в соответствие с текущими вероятностями ошибок последних.

Задачей такого управления является обеспечение более надёжным входам большего влияния на принимаемое решение по сравнению с менее надёжными входами.

Следовательно, в каждый момент времени t вес a_i ($-\infty < a_i < +\infty$) i -го входа формального нейрона должен определяться вероятностью ошибки этого входа $q_i(t)$ в указанный момент:

$$a_i = f_a(q_i(t)).$$

Процесс управления весами усложнён тем обстоятельством, что мы не располагаем используемыми те или иные физические явления датчиками вероятностей $q_i(t)$ ошибок.

Могут определяться лишь статистические оценки этих вероятностей по рассогласованию сигнала X_i , выданного информационным каналом B_i , либо с истинным значением X предъявленной к распознаванию двоичной переменной (кодируемой как ± 1), либо с принятым формальным нейроном решением Y .

В зависимости от этого дело могут иметь с двумя типами адаптации, когда сравнение происходит либо с правильным ответом, подаваемым извне, либо с решением на выходе.

Формально допускается, что порог $\Theta \equiv a_{n+1}$, а $X_{n+1} \equiv -1$.

Последнее означает, что имеется некоторый воображаемый информационный канал B_{n+1} , всегда выдающий сигнал $X_{n+1} \equiv -1$, какой бы сигнал X на его вход ни поступал.

Поэтому величина q_{n+1} есть априорная вероятность подачи на вход формального нейрона сигнала $X = +1$.

Модель формального нейрона даётся на рисунке 1.

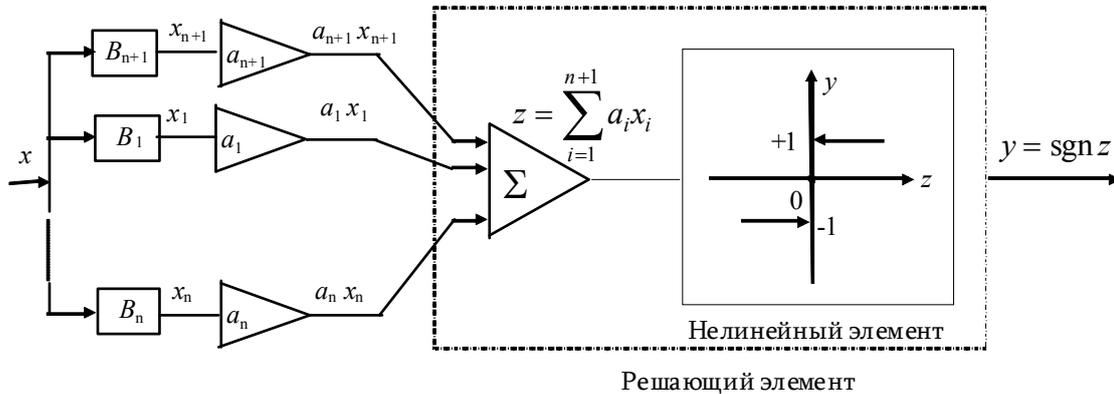


Рис.1 Модель формального нейрона

Независимо от наличия обратной связи, в процессе адаптации можно либо фиксировать число наблюдений в тактовые моменты и веса входов формального нейрона устанавливать в конце определённых циклов, включающих заданное число наблюдений в тактовые моменты, либо для оценки вероятностей ошибок на каждом входе использовать устройства, корректирующие веса после каждого сравнения, происходящего в тактовые моменты времени. Исходя из этого признака, различают адаптации с циклической и непрерывной коррекцией весов. По способу фиксации тактового момента для осуществления коррекции можно указать и третий вид адаптации, когда изменения весов происходят в случайные моменты времени по достижении информационными каналами некоторых состояний. В частности критическое состояние канала B_i может определяться и соответствующим предельно допустимым значением q_0 вероятности ошибки q_i .

ГЛАВА ПЕРВАЯ. ЦИКЛИЧЕСКАЯ АДАПТАЦИЯ ФОРМАЛЬНОГО НЕЙРОНА

1.1 ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

При реализации циклической адаптации задаётся число M сравнений сигнала $X_i (i = \overline{1, n+1})$ либо с правильным ответом, подаваемым извне, либо с решением Y , принимаемым формальным нейроном. Эти сравнения проводятся в тактовые моменты времени и охватывают определённый период, именуемый циклом. В конце цикла адаптации случайное число N_i ошибок на каком-либо $i - v$ входе, обнаруженных за M наблюдений, даёт либо оценку $\hat{q}_i = N_i / M$ вероятности q_i ошибки на соответствующем входе, либо оценку $v = \hat{d}_i$ вероятности d_i несовпадения сигнала X_i с решением Y , если, разумеется, M достаточно велико. Эти оценки используются для установки весов a_i входов в конце цикла адаптации. Новый цикл начинается лишь после указанной операции, и он по-прежнему включает M сравнений в тактовые моменты. Во время этих сравнений подсчитывается число случаев несовпадения сигнала X_i на $i - v$ входе с правильным ответом X , подаваемым извне, или с решением Y на выходе формального нейрона. Определённые таким образом величины вероятностей ошибок на входах используются для установки новых весов, после чего начинается следующий цикл.

1.2 ЦИКЛИЧЕСКАЯ АДАПТАЦИЯ БЕЗ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Методы адаптации без обратной связи имеют ограниченное применение из-за необходимости подавать извне правильный ответ. У них в основном две области использования:

- начальная адаптация устройства;
- периодическая подстройка весов во время эксплуатации решающего органа путём использования контрольных программ с известными ответами.

Каждый результат сравнения в цикле адаптации может попасть в одну из двух взаимоисключающих групп, формируемых по признакам совпадения и расхождения анализируемых двоичных сигналов.

Событие A , состоящее в том, что сравниваемые сигналы не совпадают, будем трактовать как успех. Введём в рассмотрение дискретную случайную величину N_i - число успехов в серии из M независимых сравнений сигнала X_i с подаваемым извне правильным ответом, обозначив через n_i её реализации. Очевидно, что множество возможных значений для дискретной переменной n_i составляет $0, 1, 2, \dots, M$.

Пусть q_i обозначает вероятность осуществления события A в каждом из M сравнений, реализуемых в отдельном цикле. Тогда вероятность того, что при M сравнениях событие A будет иметь место ровно n_i раз, т.е. вероятность того, что случайная величина N_i примет значение n_i , определяется биномиальным распределением:

$$f_b(n_i; M, q_i) \equiv \Pr\{N_i = n_i\} = C_M^{n_i} \cdot q_i^{n_i} \cdot (1 - q_i)^{M - n_i}, \quad (1.2.1)$$

где $n_i = \overline{0, M}$ и $0 \leq q_i \leq 1$. Поэтому

$$F_b(n_i; M, q_i) \equiv \Pr\{N_i < n_i\} = \sum_{k=1}^{n_i} C_M^k \cdot q_i^k \cdot (1 - q_i)^{M - k}. \quad (1.2.2)$$

Математическое ожидание (среднее) и дисперсия случайной величины N_i составляют:

$$M[N_i] = M \cdot q_i, \quad (1.2.3)$$

$$D[N_i] = M \cdot q_i \cdot (1 - q_i). \quad (1.2.4)$$

Отношение \hat{q}_i числа N_i сравнений, в которых наблюдался успешный исход, к общему числу сравнений M , является несмещённой оценкой максимального правдоподобия для параметра q_i :

$$\hat{q}_i = \frac{N_i}{M}. \quad (1.2.5)$$

Естественно, эта оценка сама является случайной величиной, подчиняющейся биномиальному распределению с математическим ожиданием

$$M[\hat{q}_i] = \frac{1}{M} \cdot M[N_i] = q_i \quad (1.2.6)$$

и дисперсией

$$D[\hat{q}_i] = D\left[\frac{N_i}{M}\right] = \frac{1}{M^2} \cdot D[N_i] = q_i \cdot (1 - q_i) / M. \quad (1.2.7)$$

Неравенство Чебышёва даёт оценку сверху для вероятности того, что абсолютное отклонение $|\hat{q}_i - q_i|$ случайной величины $\hat{q}_i = N_i / M$ от её математического ожидания $M[\hat{q}_i] = q_i$ превзойдёт сколь угодно малое положительное число ε :

$$\Pr\{|\hat{q}_i - q_i| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D[q_i]}{\varepsilon^2}. \quad (1.2.8)$$

Поскольку \hat{q}_i имеет биномиальное распределение с дисперсией (1.2.7), то подставляя выражение $D[\hat{q}_i]$ в неравенство (1.2.8), получим:

$$\Pr\{|\hat{q}_i - q_i| \geq \varepsilon\} \leq \frac{q_i \cdot (1 - q_i)}{\varepsilon^2 \cdot M}. \quad (1.2.9)$$

Отсюда следует, что, выбрав величину M достаточно большой, можно обеспечить работу решающего органа с весами, близкими к оптимальным, когда вероятность ошибочного решения минимальна.

В теоретическом плане задача состоит в определении числа M , при котором

$$\Pr\{|\hat{q}_i - q_i| \leq \varepsilon\} = \alpha, \quad (1.2.10)$$

где α - выбираемая достаточно близкой к единице вероятность того, что оценка \hat{q}_i отклоняется от q_i не более, чем на заданную малую величину ε .

Для её решения можно воспользоваться тем фактом, что при $M \rightarrow \infty$ биномиальное распределение случайной величины N_i сходится к нормальному распределению с параметрами $\mu(N_i)$ и $\sigma^2(N_i)$, определяемыми соответственно формулами (1.2.3) и (1.2.4):

$$\begin{aligned} \mu(N_i) &= M \cdot q_i, \\ \sigma^2(N_i) &= M \cdot q_i \cdot (1 - q_i). \end{aligned}$$

Сходимость хорошая для $q_i = 0,5$ и плохая для $q_i < 1/(M+1)$, $q_i > M/(M+1)$, а также вне полосы $\pm 3\sigma(N_i)$. Анализ точности представления биномиального распределения нормальным можно найти в работах [1, 2].

Таким образом, при достаточно большом M и не слишком малых q_i и $(1 - q_i)$ биномиальное распределение аппроксимируется нормальным распределением. На практике можно считать, что такая аппроксимация вполне приемлема, если величины $M \cdot q_i$ и $M \cdot q_i \cdot (1 - q_i)$ больше пяти или $M \cdot q_i \cdot (1 - q_i) \geq 25$. При выполнении этих предположений легко обосновать [3, 4], что

$$M = \frac{Z_{\alpha/2}^2}{4\varepsilon^2}, \quad (1.2.11)$$

где $Z_{\alpha/2}$ - стандартная нормальная статистика для вероятности α , определяемая условием

$$\frac{\alpha}{2} = \Phi_0(Z_{\alpha/2}). \quad (1.2.12)$$

Здесь

$$\Phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (1.2.13)$$

является нормированной функцией Лапласа, которую иногда называют и функцией ошибок, обозначая её через $\text{erf}(t)$.

Значения $Z_{\alpha/2}$ для некоторых доверительных вероятностей α воспроизводятся из цитированных работ в таблице 1.

Таблица 1. Значения стандартной нормальной статистики $Z_{\alpha/2}$ для заданной доверительной вероятности α

α	0,80	0,90	0,95	0,99	0,997
$Z_{\alpha/2}$	1,29	1,65	1,96	2,58	2,97

Для расчёта M по формуле (1.2.11) и обеспечения оптимальной циклической адаптации без обратной связи предварительно следует задаваться параметрами α и ε .

В таблице 2 приведены величины M для различных значений α и ε , рассчитанные по формуле (1.2.11) на основании данных таблицы 1.

Таблица 2. Минимальное значение M для оценки вероятности q_i при циклической адаптации без обратной связи

α	$\varepsilon = 0,10$	$\varepsilon = 0,08$	$\varepsilon = 0,05$	$\varepsilon = 0,02$
0,80	42	65	166	1040
0,90	68	106	272	1702
0,95	96	150	384	2400
0,99	166	260	666	4160
0,997	220	344	882	5513

1.3 ЦИКЛИЧЕСКАЯ АДАПТАЦИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

При циклической адаптации с обратной связью установка весов осуществляется с использованием решения на выходе вместо правильного ответа.

В цикле адаптации, когда значение сигнала на каждом из входов сравнивается с решением на выходе M раз в тактовые моменты времени, подсчитывается число N_i несовпадений и определяется частота γ_i рассогласования сигнала на i -в входе с решением Y . Она служит оценкой не вероятности ошибки i -в вклада, а вероятности d_i несовпадения сигнала на i -в входе с решением Y :

$$M[\gamma_i] = d_i.$$

Можно считать, что случайная величина γ_i связана с вероятностью d_i соотношением

$$\gamma_i = d_i + \xi_i, \quad (1.3.1)$$

где ξ_i - случайный шум с нулевым математическим ожиданием, т.е.

$$M[\xi_i] = 0.$$

Соотношение (1.3.1) формально можно представить и в следующем виде:

$$\gamma_i = q_i + (d_i - q_i) + \xi_i. \quad (1.3.1')$$

Напомним, что q_i есть вероятность несовпадения сигнала X_i на i - v входе формального нейрона с предъявленной к распознаванию двоичной переменной X , а d_i есть вероятность несовпадения этого же сигнала X_i с решением Y . Абсолютная величина разности указанных величин $|d_i - q_i|$, очевидно, пропорциональна вероятности Q несовпадения решения Y со значением X восстанавливаемого сигнала, т.е.

$$|d_i - q_i| = f_0(Q), \quad (1.3.2)$$

$$f_0(Q) = k_0 \cdot Q. \quad (1.3.3)$$

Попытаемся найти k_0 и верхнюю границу $f_0^+(Q)$ функции $f_0(Q)$, удовлетворяющую условию

$$f_0^+(Q) \geq f_0(Q) \quad (1.3.4)$$

для всех $0 \leq Q \leq 1$.

Если $Q = 0$, то тогда решение Y всегда совпадает с восстанавливаемым сигналом X и, следовательно, $d_i = q_i$, т.е.

$$f_0^+(0) = f_0(0) = 0. \quad (1.3.5)$$

Если $Q = 1$, то тогда решение Y всегда представляет собой инвертированное значение восстанавливаемого сигнала X и, следовательно, вероятность d_i несовпадения сигнала X_i на i - v входе с решением Y равна вероятности $1 - q_i$ совпадения X_i с восстанавливаемым сигналом X , т.е. $d_i = 1 - q_i$. Поэтому

$$f_0(1) = |1 - 2q_i| \leq 1. \quad (1.3.6)$$

Следовательно,

$$f_0(Q) = |1 - 2q_i| \cdot Q.$$

На основании соотношения (1.3.6) разумно в качестве значения $f_0^+(1)$ взять единицу.

Таким образом, функцию $f_0^+(Q)$ следует подобрать так, чтобы она удовлетворяла следующим условиям:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq f_0^+(Q) \leq 1 \\ f_0^+(Q) \geq f_0(Q) \\ 0 \leq Q \leq 1 \\ f_0^+(0) = 0 \\ f_0^+(1) = 1 \end{array} \right\}. \quad (1.3.7)$$

В классе линейных функций этим требованиям вполне отвечает зависимость

$$f_0^+(Q) = Q. \quad (1.3.8)$$

Следовательно,

$$|d_i - q_i| \leq Q. \quad (1.3.9)$$

Учитывая это неравенство в соотношении (1.3.1'), получим:

$$q_i - Q + \xi_i \leq v_i \leq q_i + Q + \xi_i. \quad (1.3.1'')$$

Поэтому при $M \rightarrow \infty$, когда $v_i \rightarrow M[v_i] = d_i$, будем иметь:

$$q_i - Q \leq d_i \leq q_i + Q. \quad (1.3.10)$$

Предполагая, что отклонение d_i от q_i есть дифференциально малая величина, получим:

$$dq_i = Q. \quad (1.3.11)$$

Помимо этого допустим, что аналитическая оценка вероятности ошибки Q формального нейрона при оптимальных весах даётся выражением [5]:

$$Q = 2^{n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n+1} \left[\sqrt{q_i \cdot (1 - q_i)} \right]. \quad (1.3.12)$$

Тогда при $M \rightarrow \infty$ установившееся абсолютное отклонение dQ вероятности ошибки на выходе формального нейрона от оптимального значения Q составит

$$dQ = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{\partial Q}{\partial q_i} \right) dq_i = Q \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{\partial Q}{\partial q_i} \right).$$

Для относительного же отклонения будем иметь:

$$\frac{dQ}{Q} = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{\partial Q}{\partial q_i} \right). \quad (1.3.13)$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial Q}{\partial q_i} = \frac{1 - 2q_i}{2 \cdot \sqrt{q_i \cdot (1 - q_i)}} \cdot 2^{n+1} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \sqrt{q_j \cdot (1 - q_j)}, \quad (1.3.14)$$

где условие $j \neq i$ при символе произведения указывает на отсутствие сомножителя с индексом i .

Умножая и деля правую часть последнего соотношения на $\sqrt{q_i \cdot (1 - q_i)}$, получим:

$$\frac{\partial Q}{\partial q_i} = Q \cdot \frac{1 - 2q_i}{2 \cdot q_i \cdot (1 - q_i)}. \quad (1.3.15)$$

Наконец, учитывая выражения (1.3.15) в формуле (1.3.13), придём к следующему соотношению:

$$\frac{dQ}{Q} = Q \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1 - 2q_i}{2 \cdot q_i \cdot (1 - q_i)}.$$

Следовательно, относительное отклонение вероятности ошибки формального нейрона от оптимального значения Q в процессе циклической адаптации с обратной связью не превышает величины

$$\Xi = Q \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1 - 2q_i}{2 \cdot q_i \cdot (1 - q_i)}. \quad (1.3.16)$$

Иначе говоря, относительное, установившееся при $M \rightarrow \infty$, отклонение вероятности ошибки формального нейрона от оптимального значения определяется величиной Q указанного значения и суммой весов $(1 - 2q_i) / [2q_i(1 - q_i)]$, доставляющих максимум использованному в первой главе махаланобисову расстоянию [6]. При ограниченности названной суммы весов и условия малости Q ($Q \rightarrow 0$), относительное отклонение Ξ может быть сделано сколь угодно малым. Следовательно, циклическая адаптация с обратной связью, осуществляемая сравнением двоичного сигнала в канале с решением на выходе, устойчива, и сигнал на выходе формального нейрона может быть использован для определения надёжности его входов и установки соответствующих весов.

Поскольку веса $a_{im} = (1 - 2q_i) / [2q_i(1 - q_i)]$, доставляющие махаланобисову расстоянию максимум, связаны с весами $a_{ie} = \ln[(1 - q_i) / q_i]$, согласованными с критериями энтропийной чувствительности и максимальной апостериорной вероятности, монотонным преобразованием по закону $a_{im} = \text{sh}(a_{ie})$, как это показано в настоящей работе, то результат (1.3.16) представляется возможным выразить и в следующей форме:

$$\Xi = Q \cdot \sum_{i=1}^{n+1} a_{im} = Q \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \text{sh}(a_{ie}). \quad (1.3.17)$$

Адаптация с циклическим вычислением ошибки (как при сравнении с правильным ответом, так и при сравнении с решением на выходе) дана на рисунке 2.

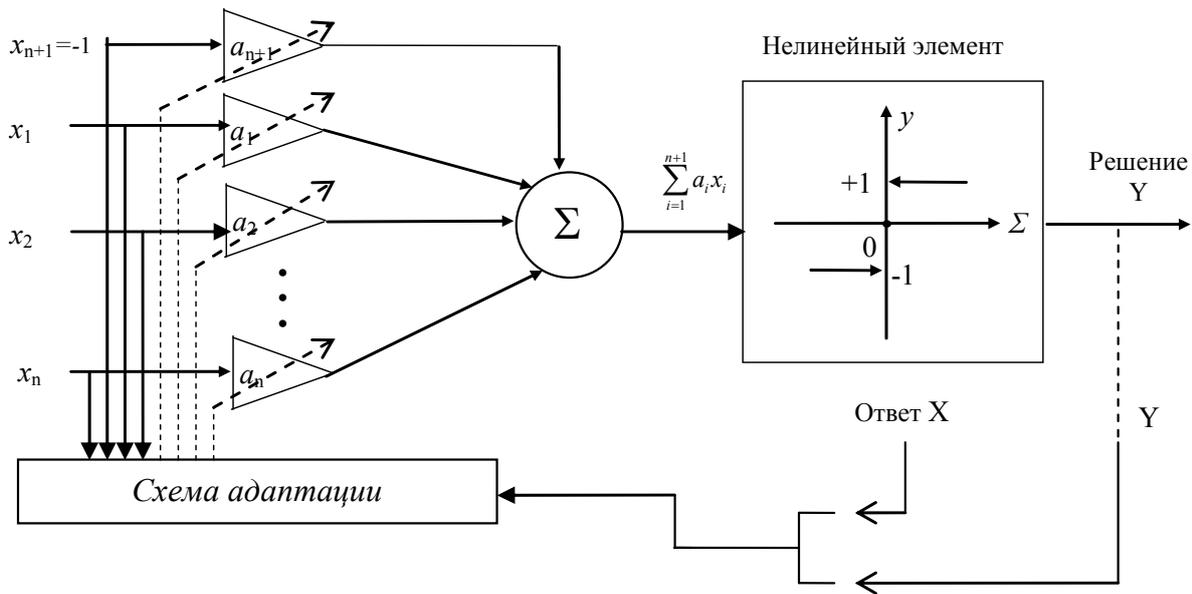


Рис.2 Блок-схема формального нейрона в методе циклической адаптации (при сравнении с правильным ответом или решением на выходе)

ГЛАВА ВТОРАЯ. НЕПРЕРЫВНАЯ АДАПТАЦИЯ ФОРМАЛЬНОГО НЕЙРОНА

2.1 ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Достаточно очевидно, что в принципе возможна такая организация адаптации формального нейрона, когда при оценке вероятностей ошибок на его входах веса этих входов перестраивают не в конце цикла по итогам M сравнений, а перманентно, после каждого сравнения. Алгоритм такой адаптации может представлять процедуру типа поощрения и наказания. В этом случае на $(k + 1) - v$ шаге алгоритм вносит изменения в вектор весов $\vec{a}(k)$ предыдущего шага по-разному, в зависимости от того, правильно или неправильно был классифицирован с помощью вектора $\vec{a}(k)$ образ на $k - v$ шаге адаптации. В частности, если образ классифицирован правильно, то поощрение может заключаться и в том, что в вектор весов просто не вносятся никаких изменений, а если образ классифицирован неправильно, то формальный нейрон наказывается, либо увеличением, либо уменьшением вектора весов. При этом заключение о правильном или неправильном распознавании информационными каналами B_1, B_2, \dots, B_n сигнала X может делаться как сравнением сигналов $X_i (i = \overline{1, n})$ на входах с подаваемым извне правильным ответом, так и их сравнением с решением Y . Иногда, вместо сравнения X или Y с каждым отдельным

сигналом X_i , может применяться сравнение с результатом их коллективного взаимодействия, т.е с сигналом, снятым с сумматора формального нейрона.

2.2 НЕПРЕРЫВНАЯ АДАПТАЦИЯ БЕЗ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО АЛГОРИТМУ УИДРОУ-ХОФФА

Предположим, что сигнал X представляет собой случайную последовательность $+1$ и -1 в соответствии с априорными вероятностями $q_{n+1} = P(\Omega_1)$ и $1 - q_{n+1} = P(\Omega_2)$ появления этих двух классов. При этом на входах формального нейрона возникает вектор наблюдений $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})'$ в соответствии с вероятностными законами

$$P(\vec{x} / \Omega_1) \equiv f_1(\vec{x}) = \prod_{i=1}^n q_i^{\frac{1-x_i}{2}} \cdot (1-q_i)^{\frac{x_i+1}{2}}, \quad (2.2.1)$$

$$P(\vec{x} / \Omega_2) \equiv f_2(\vec{x}) = \prod_{i=1}^n q_i^{\frac{x_i+1}{2}} \cdot (1-q_i)^{\frac{1-x_i}{2}}, \quad (2.2.2)$$

где $x_{n+1} \equiv -1$.

Для каждого вектора наблюдений \vec{x} введём случайную переменную классификации, или метку Z , такую, что

$$Z = +m_0$$

при \vec{x} , соответствующем сигналу $X = +1$ (классу Ω_1), и

$$Z = -m_0$$

при \vec{x} , соответствующем сигналу $X = -1$ (классу Ω_2). Для этого достаточно Z формировать по соотношению

$$Z = m_0 \cdot X. \quad (2.2.3)$$

Тогда в процессе адаптации данные будут представлять собой последовательность пар

$$(\vec{x}(1), Z_1), (\vec{x}(2), Z_2), \dots, (\vec{x}(k), Z_k), \dots$$

Байесовская разделяющая функция с учётом формул (2.2.1) и (2.2.2) имеет вид:

$$Y_0(\vec{x}) = \ln \frac{P(\vec{x} / \Omega_1)}{P(\vec{x} / \Omega_2)} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \cdot \ln \frac{1-q_i}{q_i}. \quad (2.2.4)$$

Цель адаптации в том и состоит, чтобы, во-первых, аппроксимировать $Y_0(\vec{x})$ с неизвестными параметрами q_i ($i = \overline{1, n+1}$) посредством конечного ряда

$$Y_0(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \cdot a_i \quad (2.2.5)$$

и, во-вторых, определить весовой вектор $\vec{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n, \hat{a}_{n+1})'$, минимизирующий среднеквадратическую ошибку аппроксимации

$$\varepsilon_0^2 = M \left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i - Y_0(\vec{x}) \right)^2 \right]. \quad (2.2.6)$$

Для минимизации ε_0^2 достаточно знать байесовскую разделяющую функцию $Y_0(\vec{x})$, определяемую формулой (2.2.4) с неизвестными точно значениями вероятностей q_i ($i = \overline{1, n+1}$).

Чтобы обойти это затруднение, будем рассматривать Z в качестве зашумленного значения функции $Y_0(\vec{x})$. Тогда весовой вектор $\vec{\hat{a}} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n, \hat{a}_{n+1})'$, минимизирующий ε_0^2 , также будет минимизировать и функцию критерия

$$J(\vec{x}, \vec{a}) = M \left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i - Z \right)^2 \right]. \quad (2.2.7)$$

Взяв частные производные функции критерия по весам a_i , получим:

$$G_{0i}(\vec{x}, \vec{a}) = \frac{\partial J(\vec{x}, \vec{a})}{\partial a_i} = M \left[2 \left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j x_j - Z \right) \cdot x_i \right] \Bigg\}_{i = \overline{1, n+1}}.$$

Полагая, что, вместо действительных значений $G_{0i}(\vec{x}, \vec{a})$, наблюдают их зашумленные значения

$$h_{0i}(\vec{x}, \vec{a}) = 2 \left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j x_j - Z \right) \cdot x_i \Bigg\}_{i = \overline{1, n+1}}, \quad (2.2.8)$$

такие, что

$$M \left[h_{0i}(\vec{x}, \vec{a}) \right] = G_{0i}(\vec{x}, \vec{a}) \Bigg\}_{i = \overline{1, n+1}}$$

и

$$\sigma_i^2(\vec{x}, \vec{a}) = M \left[\left(G_{0i}(\vec{x}, \vec{a}) - h_{0i}(\vec{x}, \vec{a}) \right)^2 \right] < L \Bigg\}_{i = \overline{1, n+1}}$$

при всех значениях весов $a_i (i = \overline{1, n+1})$, где $L < \infty$ - положительная константа, можно воспользоваться алгоритмом Роббинса-Монро [7] для итеративного определения нуля \hat{a}_i функции $G_{0i}(\vec{x}, \vec{a}), i = \overline{1, n+1}$.

Обозначив через $a_i(1)$ произвольную начальную оценку корня уравнения

$$G_{0i}(\vec{x}, \vec{a}) = 0,$$

а через $a_i(k)$ - оценку этого корня, полученную на $k - v$ шаге итерации, процедуру коррекции с помощью алгоритма Роббинса-Монро выражают в виде соотношения

$$a_i(k+1) = a_i(k) - \beta_k \cdot h_{0i}(\vec{x}(k), \vec{a}(k)) \Bigg\}_{i = \overline{1, n+1}}, \quad (2.2.9)$$

где β_k - элемент последовательности положительных чисел, удовлетворяющих условиям

$$\left. \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k &= 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k &= \infty \\ \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 &< \infty \end{aligned} \right\}. \quad (2.2.9')$$

Примером такой последовательности может служить гармонический ряд.

Следовательно, коррекции оценок, вводимые алгоритмом Роббинса-Монро, пропорциональны значению $h_{0i}(\bar{x}(k), \bar{a}(k))$ в предыдущем наблюдении.

Подставляя (2.2.8) в общее выражение (2.2.9), будем иметь:

$$a_i(k+1) = a_i(k) + \rho_k \cdot x_i(k) \cdot \left[Z_k - \sum_{j=1}^{n+1} a_j(k) x_j(k) \right] \Bigg\}_{i = \overline{1, n+1}}, \quad (2.2.10)$$

где $\rho_k = 2 \cdot \beta_k$.

Соотношение (2.2.10) по существу выражает алгоритм коррекции, которым пользовались в работе [8] Уидроу и Хофф. В нашем же случае для стохастического приращения i -го веса

$$\Delta a_i(k) = a_i(k+1) - a_i(k),$$

производимого на $(k+1)$ -м шаге итерации, оно примет следующий вид:

$$\Delta a_i(k) = \rho_k \cdot X_i(k) \cdot \left[m_0 X - \sum_{j=1}^{n+1} a_j(k) X_j(k) \right] \Bigg\}_{i = \overline{1, n+1}}. \quad (2.2.11)$$

Дальнейшее исследование ставит целью:

- нахождение математического ожидания для величины приращения (2.2.11);
- получение выражений для весов, соответствующих установившемуся состоянию, когда математические ожидания величин (2.2.11) равны нулю.

Предположим, что ошибки на входах формального нейрона независимы, и запишем (2.2.11) в виде:

$$\Delta a_i(k) = \rho_k m_0 X X_i(k) - \rho_k X_i(k) \cdot \sum_{j=1}^{n+1} a_j(k) X_j(k) \Bigg\}_{i = \overline{1, n+1}}.$$

Здесь

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j(k) X_j(k) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} a_j(k) X_j(k) + a_i(k) X_i(k),$$

где $j \neq i$ условие при символе суммы означает отсутствие в этой сумме слагаемого с индексом i .

Следовательно,

$$\Delta a_i(k) = m_0 \rho_k X X_i(k) - \rho_k \cdot X_i(k) \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} a_j(k) X_j(k) - \rho_k a_i(k) X_i^2(k) \Bigg\}_{i = \overline{1, n+1}}. \quad (2.2.12)$$

Для математических ожиданий отдельных слагаемых правой части соотношения (2.2.12) имеем:

$$M[m_0 \rho_k X X_i(k)] = m_0 \rho_k [(1 - q_i) \cdot 1 + q_i \cdot (-1)] = m_0 \rho_k (1 - 2q_i), \quad (2.2.13)$$

$$M[\rho_k a_i(k) \cdot X_i^2(k)] = \rho_k a_i(k). \quad (2.2.14)$$

Что касается математического ожидания слагаемого

$$\rho_k \cdot X_i(k) \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} a_j(k) X_j(k),$$

его следует вычислить при двух условиях, когда $X = +1$ и $X = -1$.

Имеем:

$$M \left[\rho_k X_i(k) \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} a_j(k) X_j(k) \middle/ X = +1 \right] = \rho_k \cdot (1 - 2q_i) \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} a_j(k) (1 - 2q_j), \quad (2.2.15)$$

$$M \left[\rho_k X_i(k) \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} a_j(k) X_j(k) \middle/ X = -1 \right] = \rho_k \cdot (2q_i - 1) \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} a_j(k) (2q_j - 1) = \\ = \rho_k \cdot (1 - 2q_i) \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} a_j(k) (1 - 2q_j). \quad (2.2.16)$$

Следовательно, выражения (2.2.15) и (2.2.16) совпадают, и можно утверждать, что, независимо от предъявленного к распознаванию класса,

$$M \left[\rho_k X_i(k) \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} a_j(k) X_j(k) \right] = \rho_k \cdot (1 - 2q_i) \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} a_j(k) (1 - 2q_j). \quad (2.2.17)$$

С учётом соотношений (2.2.13), (2.2.14) и (2.2.17) будем иметь:

$$M [\Delta a_i(k)] = \rho_k \left\{ (1 - 2q_i) \cdot \left[m_0 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} a_j(k) (1 - 2q_j) \right] - a_i(k) \right\} \Bigg|_{i = \overline{1, n+1}}. \quad (2.2.18)$$

Поскольку здесь

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} a_j(k) (1 - 2q_j) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j(k) (1 - 2q_j) - a_i(k) (1 - 2q_i),$$

то, учитывая последнее обстоятельство в формуле (2.2.18), придём к выражению

$$M [\Delta a_i(k)] = \rho_k \left\{ (1 - 2q_i) \cdot \left[m_0 - \sum_{j=1}^{n+1} a_j(k) (1 - 2q_j) \right] + a_i(k) (1 - 2q_i)^2 - a_i(k) \right\} \Bigg|_{i = \overline{1, n+1}}.$$

Легко видеть, что

$$a_i(k) \cdot (1 - 2q_i)^2 - a_i(k) = -4a_i(k) \cdot q_i \cdot (1 - q_i).$$

Следовательно,

$$M [\Delta a_i(k)] = \rho_k \left\{ (1 - 2q_i) \cdot \left[m_0 - \sum_{j=1}^{n+1} a_j(k) (1 - 2q_j) \right] - 4a_i(k) q_i (1 - 2q_i) \right\} \Bigg|_{i = \overline{1, n+1}}. \quad (2.2.19)$$

Поскольку алгоритм Роббинса-Монро сходится при условиях (2.2.9'), то при некотором конечном k веса перестанут меняться (в среднем). В этом установившемся состоянии начнут выполняться равенства

$$M [\Delta a_i(k)] = 0 \Bigg|_{i = \overline{1, n+1}}. \quad (2.2.20)$$

Значения весов, при которых достигается такое состояние, обозначим через \hat{a}_i . Тогда для \hat{a}_i ($i = \overline{1, n+1}$) будем иметь следующие уравнения:

$$\hat{a}_i = \left. \frac{1-2q_i}{2q_i(1-q_i)} \cdot \frac{m_0 - \sum_{j=1}^{n+1} \hat{a}_j (1-2q_j)}{2} \right\}_{i=1, n+1} \quad (2.2.21)$$

Легко видеть, что величины

$$a_{im} = \left. \frac{1-2q_i}{2q_i(1-q_i)} \right\}_{i=1, n+1} \quad (2.2.22)$$

представляют собой такие веса, которые доставляют махаланобисову расстоянию между множествами значений случайной суммы

$$\Sigma = \sum_{j=1}^{n+1} a_j X_j$$

в классах Ω_1 и Ω_2 максимальное значение. С оптимальными же в байесовском смысле (т.е. в смысле максимума апостериорной вероятности) весами

$$a_{ie} = \left. \ln \frac{1-q_i}{q_i} \right\}_{i=1, n+1} \quad (2.2.23)$$

они связаны соотношениями

$$a_{im} = \left. \text{sh}(a_{ie}) \right\}_{i=1, n+1} \quad (2.2.24)$$

Следовательно, вводя константу γ , зависящую от величины установившихся весов, получим:

$$\hat{a}_i = \left. \gamma \cdot a_{im} = \gamma \cdot \text{sh}(a_{ie}) \right\}_{i=1, n+1} \quad (2.2.25)$$

где

$$\gamma = \frac{m_0 - \sum_{j=1}^{n+1} \hat{a}_j (1-2q_j)}{2} \quad (2.2.26)$$

Выражению для γ можно придать и более компактный вид, если учесть то обстоятельство, что максимальное значение ρ_{\max} махаланобисова расстояния ρ определяется соотношением

$$\rho_{\max} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(1-2q_j)^2}{q_j(1-q_j)} = 2 \cdot \sum_{j=1}^{n+1} a_{jm} (1-2q_j) \quad (2.2.27)$$

В самом деле, с учётом выражений (2.2.25) и (2.2.27) формула (2.2.26) приобретает следующий вид:

$$\gamma = \frac{m_0 - \gamma \cdot \sum_{j=1}^{n+1} a_{jm} (1-2q_j)}{2} = \frac{m_0 - \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \rho_{\max}}{2}.$$

Отсюда

$$\gamma = \frac{2m_0}{4 + \rho_{\max}} \quad (2.2.28)$$

Подставляя выражение (2.2.28) в формулу (2.2.25), получим:

$$\left. \hat{a}_i = \frac{2m_0}{4 + \rho_{\max}} \cdot a_{im} = \frac{2m_0}{4 + \rho_{\max}} sh(a_{ie}) \right\}_{i = \overline{1, n+1}} \quad (2.2.29)$$

Таким образом, в процессе непрерывной адаптации без обратной связи устанавливаются веса, пропорциональные тем, которые доставляют максимум махаланобисову расстоянию.

2.3 НЕПРЕРЫВНАЯ АДАПТАЦИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО АЛГОРИТМУ УИДРОУ-ХОФФА

В случае непрерывной адаптации с обратной связью, когда приращения весов формируются по алгоритму Уидроу-Хоффа, метка Z вычисляется как $m_0 \cdot Y$, где Y - решение на выходе формального нейрона, и, вместо вероятности q_i ошибки i -го входа, приходится оперировать вероятностью d_i рассогласования сигнала на нём с переменной Y . При этом для оценки величины отклонений установившихся весов от значений, задаваемых формулами (2.2.29), следует исходить из неравенств

$$\left. q_i - Q \leq d_i \leq q_i + Q \right\}_{i = \overline{1, n+1}},$$

где Q - вероятность несовпадения решения Y , принятого формальным нейроном, с истинным значением X восстанавливаемого сигнала. На рисунке 3 дана блок-схема реализации методов непрерывной адаптации (как без обратной связи, так и с обратной связью) по алгоритму Уидроу-Хоффа.

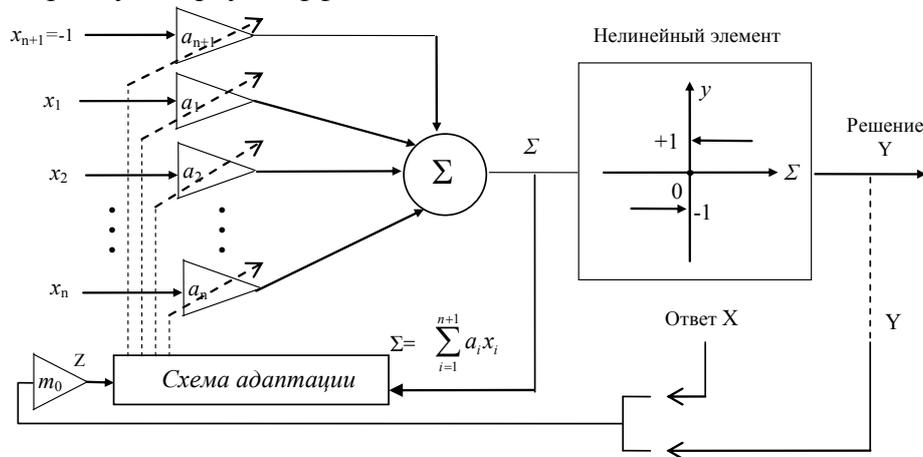


Рис.3 Блок-схема реализации методов непрерывной адаптации (без обратной связи и с обратной связью) по алгоритму Уидроу-Хоффа.

2.4 НЕПРЕРЫВНАЯ АДАПТАЦИЯ ФОРМАЛЬНОГО НЕЙРОНА ПО АЛГОРИТМУ УНИФИЦИРОВАННОГО ПОощРЕНИЯ И ИНДИВИДУАЛЬНОГО НАКАЗАНИЯ (УПИИ)

В процессе непрерывной адаптации без обратной связи по алгоритму Уидроу-Хоффа [8] на каждом шаге итерации величина приращения весов определяется разностью между случайной взвешенной суммой входных сигналов и накладываемым на неё ограничением. Однако другие алгоритмы приращения весов могут использовать и непосредственное сравнение сигнала X_i на i -м входе формального нейрона с подаваемым извне правильным ответом X (или решением Y при наличии обратной связи). Например, можно исходить из принципа поощрения и наказания, согласно которому изменения в вектор весов

(включающий в качестве одной из компонент и порог) вносятся на каждом шаге итерации, однако в отсутствие ошибки вес увеличивается на величину, зависящую от номера итерации, при обнаружении же ошибки он уменьшается на величину, зависящую как от номера итерации, так и значения веса. Таким образом, приращение i -го веса

$$\Delta a_i(k) = a_i(k+1) - a_i(k), \quad (2.4.1)$$

производимое на $(k+1)$ -м шаге итерации, в отсутствие ошибки принимает некоторое значение β_k с вероятностью $1 - q_i$, а при наличии ошибки - значение $-\beta_k \cdot e^{a_i(k)}$ с вероятностью q_i :

$$\Delta a_i(k) = \begin{cases} \beta_k & \text{с вероятностью } 1 - q_i \\ -\beta_k \cdot e^{a_i(k)} & \text{с вероятностью } q_i \end{cases}, \quad (2.4.2)$$

где $\beta_k \geq 0$. При этом начальные веса $a_i(1)$ ($i = \overline{1, n+1}$) могут быть заданы произвольно. Таким образом, в рассматриваемой стратегии поощрение унифицировано, оно не зависит от входа формального нейрона и определяется только номером итерации, наказание же применяется строго индивидуально. Эта стратегия может быть названа алгоритмом унифицированного поощрения и индивидуального наказания (УПИН).

Математическое ожидание величины $\Delta a_i(k)$ имеет следующий вид:

$$M[\Delta a_i(k)] = \beta_k(1 - q_i) - \beta_k e^{a_i(k)} q_i = \beta_k q_i \left(\frac{1 - q_i}{q_i} - e^{a_i(k)} \right). \quad (2.4.3)$$

Пусть в установившемся состоянии

$$M[\Delta a_i(k)] = 0 \left. \vphantom{M[\Delta a_i(k)]} \right\} \quad (2.4.4)$$

$$i = \overline{1, n+1}$$

Как и прежде, значения весов, при которых достигается такое состояние, обозначим через \hat{a}_i .

Тогда для \hat{a}_i ($i = \overline{1, n+1}$) получим следующие уравнения:

$$\hat{a}_i = \ln \frac{1 - q_i}{q_i} \left. \vphantom{\hat{a}_i} \right\} \quad (2.4.5)$$

$$i = \overline{1, n+1}$$

Таким образом, в процессе непрерывной адаптации без обратной связи по алгоритму (2.4.2) приращения весов, последние устанавливаются на уровнях, согласованных с критериями максимума апостериорной вероятности и энтропийной чувствительности, если только имеют место соотношения (2.4.4). В частности это условие будет выполнено, если значение β_k , отвечающее $(k+1)$ -му шагу итерации, определять по формуле

$$\beta_k = \frac{1}{k}. \quad (2.4.6)$$

Можно доказать, что такой выбор находится в согласии с развитым в работе [5] байесовским подходом, дающим для статистической оценки веса $\ln \frac{1 - q_i}{q_i}$ величину

$$a_i = \ln \frac{M - n_i + 1}{n_i + 1}, \quad (2.4.7)$$

где M - число сравнений сигнала X_i на i -м входе решающего органа с подаваемым извне правильным ответом X , а n_i - количество наблюдавшихся при этом ошибок. Предполагается, что априорное распределение случайной величины $\hat{q}_i = N_i/M$ является равномерным.

В самом деле, пусть

$$a_i(k) = \ln \frac{k - n_i + 1}{n_i + 1} \quad (2.4.8)$$

есть оценка величины $\ln \frac{1 - q_i}{q_i}$ на k -м шаге адаптации, т.е. по результатам k сравнений сигнала X_i с подаваемым извне правильным ответом X , при числе наблюдавшихся ошибок, равном n_i . Отсюда следует, что

$$\frac{k - n_i + 1}{n_i + 1} = e^{a_i(k)}, \quad (2.4.9)$$

$$\frac{1}{n_i + 1} = \frac{e^{a_i(k)}}{k - n_i + 1}. \quad (2.4.10)$$

Тогда на следующем шаге, в зависимости от результата сравнения, будем иметь

$$a_i(k+1) = \ln \left(\frac{(k+1) - n_i + 1}{n_i + 1} \right) = \ln \left(\frac{k - n_i + 1}{n_i + 1} + \frac{1}{n_i + 1} \right) \quad (2.4.11)$$

при совпадении сигналов и

$$a_i(k+1) = \ln \left(\frac{(k+1) - (n_i + 1) + 1}{(n_i + 1) + 1} \right) = \ln \left(\frac{k - n_i + 1}{n_i + 1} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{n_i + 1} \right) \quad (2.4.12)$$

в противном случае.

Учитывая (2.4.9) и (2.4.10) в последних соотношениях, получим:

$$a_i(k+1) = \begin{cases} a_i(k) + \ln \left(1 + \frac{1}{k - n_i + 1} \right) & \text{с вероятностью } 1 - q_i \\ a_i(k) - \ln \left(1 + \frac{e^{a_i(k)}}{k - n_i + 1} \right) & \text{с вероятностью } q_i \end{cases}. \quad (2.4.13)$$

При $k \gg n_i \gg 1$, используя справедливое при $x \rightarrow 0$ соотношение $\ln(1+x) = x$, получим:

$$a_i(k+1) = \begin{cases} a_i(k) + \frac{1}{k} & \text{с вероятностью } 1 - q_i \\ a_i(k) - \frac{1}{k} \cdot e^{a_i(k)} & \text{с вероятностью } q_i \end{cases}. \quad (2.4.13')$$

Вводя здесь обозначение (2.4.6), приходим к прежнему алгоритму (2.4.2) приращения весов, что и доказывает наше утверждение.

Таким образом, в первом приближении алгоритм (2.4.2) эквивалентен оцениванию весов $\ln \frac{1 - q_i}{q_i}$ по соотношению $\ln \frac{k - n_i + 1}{n_i + 1}$ на каждом шаге итерации. Поэтому существует определяемое формулой (2.4.11) значение M номера k итерации, при котором статистическая оценка \hat{q}_i вероятности ошибки q_i отклоняется от этой вероятности q_i не более, чем на заданную малую величину ε с достаточно близкой к единице вероятностью α . Поскольку до достижения этого состояния при $k \leq M$ имеет место соотношение $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{M}$, то использование в процессе адаптации, вместо β_k , меньшего по величине постоянного приращения весов $\beta = \frac{1}{M}$ не может нарушить сходимости процесса к установившемуся состоянию:

$$\beta_k \equiv \beta = \frac{1}{M}. \quad (2.4.14)$$

При непрерывной адаптации с обратной связью по алгоритму унифицированного порождения и индивидуального наказания установившиеся значения весов определяются формулами

$$\hat{a}_i = \ln \left. \begin{array}{l} \frac{1-d_i}{d_i} \\ i = \overline{1, n+1} \end{array} \right\}, \quad (2.4.15)$$

где d_i - вероятность рассогласования сигнала X_i на i -м входе формального нейрона с решением Y на его выходе. Для оценки отклонений этих весов от значений $\ln \frac{1-q_i}{q_i}$ надо исходить из соотношений

$$\left. \begin{array}{l} q_i - Q \leq d_i \leq q_i + Q \\ i = \overline{1, n+1} \end{array} \right\},$$

где Q - вероятность ошибки формального нейрона.

Процесс случайного блуждания весов при непрерывной адаптации обуславливает соответствующее статистическое распределение вероятности ошибки Q формального нейрона. Это распределение удобнее всего изучать методами Монте-Карло [9-17].

ГЛАВА ТРЕТЬЯ. РЕЛЕЙНАЯ АДАПТАЦИЯ ФОРМАЛЬНОГО НЕЙРОНА

3.1. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЦЕПИ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ (ЛДЦЦП)

Под релейной адаптацией восстанавливающего формального нейрона в отсутствие обратной связи понимается следующая стратегия приведения весов a_i ($i = \overline{1, n}$) его входов в соответствие с вероятностями q_i ($i = \overline{1, n}$) их ошибок.

Заранее задаётся критическое значение допустимой вероятности ошибки q_0 двоичных каналов B_1, B_2, \dots, B_n . Если вероятность q_i ошибки двоичного канала B_i превышает это критическое значение q_0 , то i -му двоичному каналу B_i присваивается вес a_i , равный нулю. Если же вероятность ошибки i -го двоичного канала не превосходит критического значения q_0 , то ему присваивается вес, равный единице. Таким образом,

$$a_i = \begin{cases} 0, & \text{если } q_i > q_0 \\ 1, & \text{если } q_i \leq q_0 \end{cases}. \quad (3.1.1)$$

Иначе говоря, значения весов задаются релейной функцией

$$a_i = \text{sgn}(q_0 - q_i), \quad (3.1.1')$$

что и служит основанием называть такую адаптацию релейной. Здесь

$$\text{sgn}(Z) = \begin{cases} 1, & \text{если } Z \geq 0 \\ 0, & \text{если } Z < 0 \end{cases}.$$

При этом вероятность ошибки каждого двоичного канала B_i оценивается как вероятность рассогласования сигнала X_i на i -м входе формального нейрона с правильным ответом X , подаваемым извне (в отсутствие обратной связи) или решением Y на выходе (при наличии обратной связи).

Для реализации стратегии (3.1.1), в принципе, можно вычислять любую функцию F_0 , монотонно возрастающую с увеличением q_i , осуществляя приведение весов a_i в соответствие с вероятностями ошибок q_i , т.е. адаптацию, по соотношению:

$$a_i = \begin{cases} 0, & \text{если } F_0(q_i) > F_0(q_0) \\ 1, & \text{если } F_0(q_i) \leq F_0(q_0) \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Полагается, что проверка рассогласования между X и X_i ($i = \overline{1, n}$) производится через равные промежутки (такты) в целочисленные моменты времени k , причём k пробегает значения 0, 1, 2, и т.д.

Для конкретной реализации монотонной зависимости $F_0(q_i)$, т.е. сигнала, управляющего процессом установки веса a_i , воспользуемся линейной дискретной цепью с постоянными параметрами (ЛДЦПП), схематически показанной на рис. 4. Её импульсную характеристику обозначим через $g(k)$.



Рис. 4 ЛДЦПП в схеме релейной адаптации формального нейрона

Импульсной характеристикой линейной дискретной цепи с постоянными параметрами, как известно, называется выходная последовательность $g(k) = F(k)$ при входной последовательности $f(k)$, заданной в виде единичного импульса $S_0(k)$, где

$$S_0(k) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0 \\ 0 & \text{при } k \neq 0 \end{cases}$$

Произвольная выходная последовательность $F(k)$ равна свёртке входной последовательности $f(m)$ с импульсной характеристикой ЛДЦПП:

$$F(k) = \sum_{m=-\infty}^k f(m) \cdot g(k - m). \quad (3.1.3)$$

Ограничимся рассмотрением ЛДЦПП, у которых импульсная характеристика $g(k)$ равна нулю для $k < 0$. Тогда условие (3.1.3) приобретёт вид:

$$F(k) = \sum_{m=0}^k f(m) \cdot g(k - m). \quad (3.1.3')$$

Предположим, что с помощью цепи, обозначенной на рисунке 3.1.1 символом ПР (Преобразователь), формируется входной сигнал $f(m)$, причём

$$f(m) = f_m = \begin{cases} 1, & \text{если } X_i \neq X \text{ в момент } t \\ 0, & \text{если } X_i = X \text{ в момент } t \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Следовательно, входная последовательность $f(m)$, поступающая на ЛДЦПП, является случайной импульсной последовательностью. В каждый фиксированный момент времени m переменная f_m выступает в роли случайной величины, принимающей значение нуль с

вероятностью $1 - q_i$ отсутствия ошибки на $i - v$ входе решающего органа и значение единица с вероятностью q_i ошибки на нём. Поэтому каждое слагаемое

$$\varphi_m(k) = f(m) \cdot g(k - m) \quad (3.1.5)$$

суммы (3.1.3') также является в любой заданный момент времени m случайной величиной, принимающей значение нуль с вероятностью $1 - q_i$ и значение $g(k - m)$ с вероятностью q_i . Таким образом, математическое ожидание дискретной случайной величины $\varphi_m(k)$ определится по формуле

$$M[\varphi_m(k)] = 0 \cdot (1 - q_i) + g(k - m) \cdot q_i = q_i \cdot g(k - m). \quad (3.1.6)$$

Математическое ожидание суммы

$$F(k) = \sum_{m=0}^k \varphi_m(k)$$

может быть рассчитано по соотношению

$$M[F(k)] = \sum_{m=0}^k M[\varphi_m(k)]. \quad (3.1.7)$$

Подставляя (3.1.6) в (3.1.7), получим:

$$M[F(k)] = q_i \cdot \sum_{m=0}^k g(k - m). \quad (3.1.8)$$

Таким образом, в момент времени, соответствующий k тактам, средний сигнал на выходе ЛДЦПП будет определяться формулой (3.1.8). Если k достаточно большая величина, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M[F(k)] \equiv F_0(q_i) = q_i \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{m=0}^k g(k - m) \right],$$

или, что то же самое,

$$F_0(q_i) = q_i \cdot \sum_{l=0}^{\infty} g(l). \quad (3.1.9)$$

Естественно потребовать, чтобы значение выходного сигнала ЛДЦПП сходилось по вероятности к q_i и этим обеспечивалась требуемая устойчивость процесса адаптации для случая, когда сигнал f_m формируется в результате сравнения X_i с подаваемым извне правильным ответом X в тактовые моменты m . Последнее обстоятельство в первую очередь диктует необходимость выполнения следующего неравенства:

$$\sum_{l=0}^{\infty} g(l) < \infty. \quad (3.1.10)$$

Ряд $\sum_{l=0}^{\infty} g(l) < \infty$ с общим членом $a_l = g(l)$ сходится, если, как это следует из интегрального признака Коши, функция $g(z)$ монотонно убывает и несобственный интеграл

$$I_1 = \int_0^{\infty} g(z) dz$$

сходится. Это условие запишем в виде равенства

$$\int_0^{\infty} g(z) dz = A_0, \quad (3.1.11)$$

где A_0 – конечное вещественное положительное число.

Необходимость устойчивости процесса адаптации накладывает определённые требования и на дисперсию $D[F(k)]$ случайного сигнала $F(k)$.

Дисперсия суммы

$$F(k) = \sum_{m=0}^k \varphi_m(k)$$

независимых случайных величин $\varphi_m(k)$ равна сумме их дисперсий:

$$D[F(k)] = \sum_{m=0}^k D[\varphi_m(k)]. \quad (3.1.12)$$

Здесь

$$D[\varphi_m(k)] = M[\varphi_m^2(k)] - \{M[\varphi_m(k)]\}^2, \quad (3.1.13)$$

причём

$$M[\varphi_m^2(k)] = 0^2 \cdot (1 - q_i) + g^2(k - m) \cdot q_i = q_i \cdot g^2(k - m). \quad (3.1.14)$$

Подставляя (3.1.14) и (3.1.6) в формулу (3.1.13), будем иметь:

$$D[\varphi_m(k)] = q_i \cdot g^2(k - m) - [q_i \cdot g(k - m)]^2 = q_i \cdot (1 - q_i) \cdot g^2(k - m). \quad (3.1.15)$$

Учитывая же (3.1.15) в соотношении (3.1.12), получим:

$$D[F(k)] = q_i \cdot (1 - q_i) \cdot \sum_{m=0}^k g^2(k - m). \quad (3.1.16)$$

Через достаточно большое число тактов будем иметь:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{D[F(k)]\} \equiv D[F_0(q_i)] = q_i \cdot (1 - q_i) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{m=0}^k g^2(k - m) \right],$$

или, что то же самое,

$$D[F_0(q_i)] = q_i \cdot (1 - q_i) \cdot \sum_{l=0}^{\infty} g^2(l). \quad (3.1.17)$$

Рассмотрим два ряда:

$$S_1 = \sum_{l=0}^{\infty} l \cdot g(l)$$

и

$$S_2 = \sum_{l=0}^{\infty} g^2(l).$$

Они имеют положительные члены и, начиная с некоторого l , величина $l \cdot g(l) \geq g^2(l)$, так как $g(l)$ является монотонно убывающей функцией. Поэтому из сходимости ряда S_1 будет следовать и сходимость ряда S_2 , а, следовательно, и дисперсии (3.1.17). Требование же сходимости ряда S_1 запишем в форме, диктуемой интегральным признаком Коши:

$$\int_0^{\infty} z \cdot g(z) dz = \tau_0, \quad (3.1.18)$$

где τ_0 – конечное положительное число.

Проблему отыскания $g(k)$ и синтеза ЛДЦПП, обеспечивающей устойчивость процесса адаптации, можно сформулировать как изопериметрическую задачу вариационного исчисления [18]. Это значит, что ищется g как функция z , для которой интеграл

$$I = \int_a^b \Phi(z, g) dz \quad (3.1.19)$$

принимает максимальное значение в условиях (3.1.11) и (3.1.18), имеющих форму ограничений

$$\int_a^b \Phi_1(z, g) dz = \beta_1 \quad (3.1.11')$$

и

$$\int_a^b \Phi_2(z, g) dz = \beta_2, \quad (3.1.18')$$

где β_1 и β_2 - суть заданные постоянные.

Как известно, функция $g(z)$, доставляющая максимум интегралу I , определяется как решение уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial g} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial g} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial g} = 0, \quad (3.1.20)$$

где λ_1 и λ_2 - так называемые неопределённые множители, которые находят подстановкой зависимости $g(z)$, удовлетворяющей уравнению (3.1.20), в соотношения (3.1.11') и (3.1.18').

Для получения конкретного результата надо задаться видом $\Phi(z, g)$ и учесть, что в нашем случае $a = 0$, $b = \infty$.

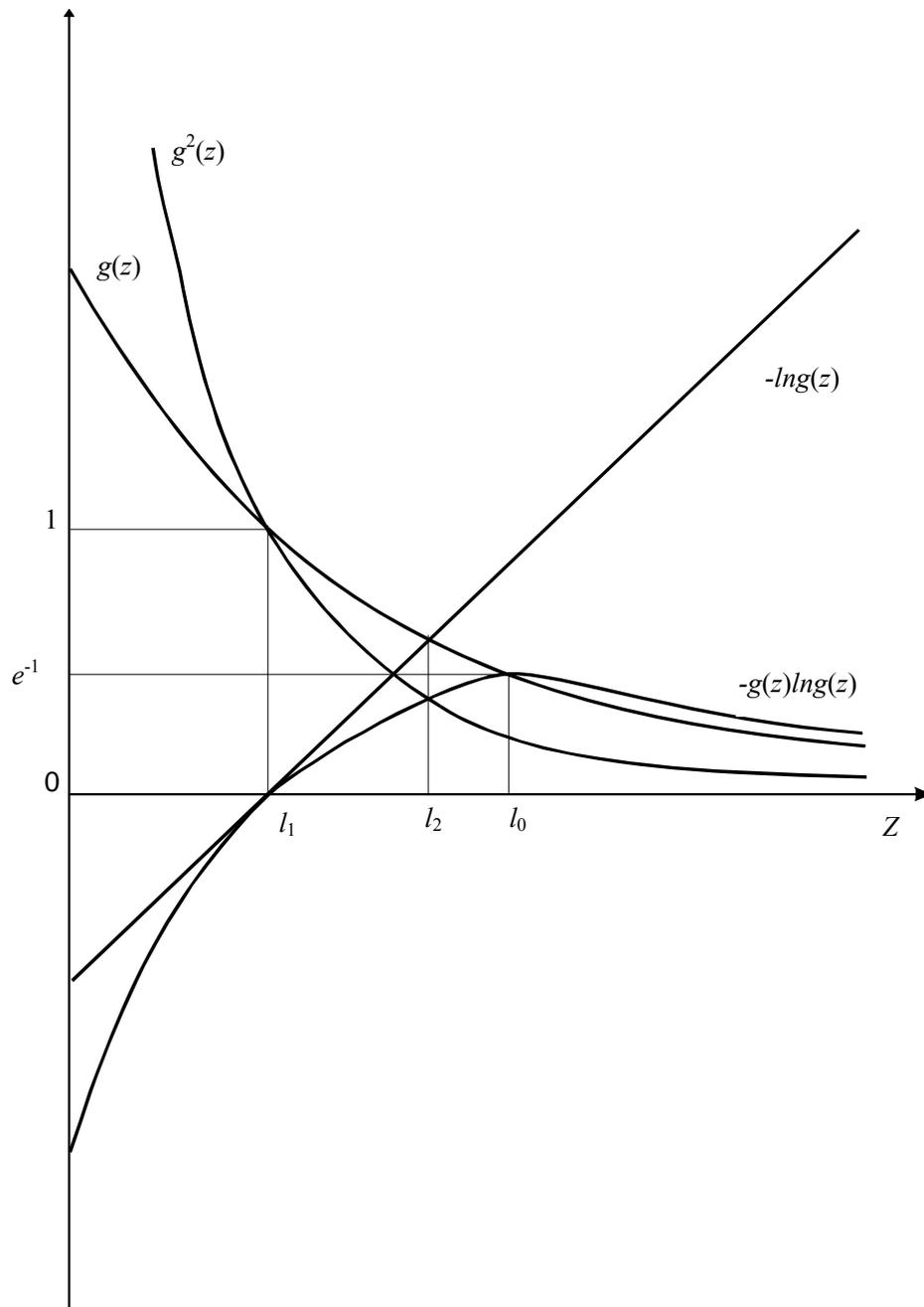


Рис.5. К обоснованию выбора функции $\Phi(z, g)$

С целью обоснования выбора $\Phi(z, g)$ обратимся к представленным на рисунке 5 графикам и рассмотрим два ряда:

$$S_2 = \sum_{l=0}^{\infty} g^2(l)$$

и

$$S_3 = -\sum_{l=0}^{\infty} g(l) \cdot \ln g(l).$$

Отбрасывание конечного числа начальных членов в этих рядах не отразится на их поведении, в частности, на их сходимости. Поэтому отбросим в S_2 и S_3 начальные члены до $l = l_0$, при котором $g(l) = e^{-1} \approx 0,3679$, а $(-g \cdot \ln g)$ достигает максимума, равного e^{-1} . В результате придём к необходимости рассмотрения поведения укороченных рядов:

$$S_2' = \sum_{l=l_0}^{\infty} g^2(l)$$

и

$$S_3' = -\sum_{l=l_0}^{\infty} g(l) \cdot \ln g(l).$$

При $l \geq l_0$ они имеют положительные члены, удовлетворяющие условию

$$-g(l) \cdot \ln g(l) \geq g^2(l),$$

и при этом $-g(z) \cdot \ln g(z)$ с ростом z монотонно убывает, согласно рис.5., оставаясь не меньше, чем $g^2(z)$. Поэтому из сходимости ряда S_3' следует сходимость ряда S_2' , а в конечном итоге и S_2 . На основании же интегрального признака Коши ряд S_3 с общим членом $-g(l) \cdot \ln g(l)$ сходится, если $-g(z) \cdot \ln g(z)$ монотонно убывает и несобственный интеграл

$$-\int_C^{\infty} g(z) \cdot \ln g(z) dz$$

сходится. При этом нижний предел C берётся произвольно, лишь бы выражение $-g(z) \cdot \ln g(z)$ при $C < z < \infty$ было определено и не имело разрывов. В нашем случае можно принять, что $C = 0$.

Таким образом, требование сходимости ряда S_2 эквивалентно условию

$$-\int_0^{\infty} g \cdot \ln g \cdot dz = I,$$

где I - конечное вещественное число.

Отождествляя полученный интеграл с соотношением (3.1.19), легко обнаружить, что

$$\Phi(z, g) = -g \cdot \ln g,$$

и задача синтеза ЛДЦПП сведётся к определению её импульсной характеристики $g(z)$ из условия максимума выражения

$$I = -\int_0^{\infty} g(z) \cdot \ln g(z) \cdot dz \quad (3.1.21)$$

при ограничениях (3.1.11) и (3.1.18).

Очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z, g) &= -g \cdot \ln g \\ \frac{\partial \Phi}{\partial g} &= -(1 + \ln g) \\ \Phi_1(z, g) &= g \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial g} &= 1 \\ \Phi_2(z, g) &= z \cdot g \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial g} &= z \end{aligned} \right\} .$$

Подставляя найденные выражения в уравнение (3.1.20), получим:

$$g = e^{\lambda_1 - 1} \cdot e^{\lambda_2 z} . \tag{3.1.22}$$

Поскольку $g(z)$ есть монотонно убывающая с ростом z функция, то должно быть выполнено условие

$$\lambda_2 < 0 . \tag{3.1.23}$$

Внося значение (3.1.22) в ограничение (3.1.11) и учитывая условие (3.1.23), находим:

$$e^{\lambda_1 - 1} = -A_0 \cdot \lambda_2 . \tag{3.1.24}$$

Подставляя же (3.1.24) и (3.1.22) в равенство (3.1.18), придём к следующему результату:

$$\int_0^{\infty} -A_0 \cdot \lambda_2 \cdot z \cdot e^{\lambda_2 z} dz = \tau_0 ,$$

откуда

$$\lambda_2 = -\frac{A_0}{\tau_0} , \tag{3.1.25}$$

и, таким образом,

$$e^{\lambda_1 - 1} = -\frac{A_0^2}{\tau_0} . \tag{3.1.26}$$

Учитывая (3.1.26) и (3.1.25) в соотношении (3.1.22), окончательно будем иметь:

$$g(z) = A_0^2 \cdot \tau_0^{-1} \cdot \exp\left(-\frac{A_0}{\tau_0} \cdot z\right) .$$

Следовательно,

$$g(k) = \begin{cases} \frac{A_0}{T_s} \cdot e^{-\frac{k}{T_s}} , & \text{если } k \geq 0 \\ 0 , & \text{если } k < 0 \end{cases} , \tag{3.1.27}$$

что представляет собой импульсную характеристику фильтра низких частот с постоянной времени $T_s = \tau_0 / A_0$. Легко убедиться в том, что в данном случае

$$F_0(q_i) = q_i \cdot \frac{A_0}{T_s} \cdot \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{1}{T_s}\right)} .$$

Если при этом параметр $A_0 = 1$, а постоянная времени T_s велика, то

$$F_0(q_i) \rightarrow q_i . \tag{3.1.28}$$

Что касается дисперсии снимаемого с выхода ЛДЦПП сигнала, то она определяется выражением

$$D[F_0(q_i)] = q_i \cdot (1 - q_i) \cdot \left(\frac{A_0}{T_s}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{2}{T_s}\right)}.$$

Если $T_s \rightarrow \infty$, то

$$D[F_0(q_i)] \rightarrow 0. \quad (3.1.29)$$

Подводя итоги проведённому здесь исследованию, можно заключить, что задача синтеза ЛДЦПП, обеспечивающей устойчивость процесса релейной адаптации восстанавливающего органа без обратной связи имеет корректную постановку и решение.

При релейной адаптации с обратной связью контролируется рассогласование сигналов X_i на входах формального нейрона с принимаемым им решением Y . Вероятность такого рассогласования d_i и заменяет собой вероятность q_i ошибки i -го входа во всех полученных выше соотношениях, которые остаются в силе и при наличии обратной связи. Поскольку $q_i - Q \leq d_i \leq q_i + Q$ ($i = \overline{1, n}$), то при малых значениях вероятности Q ошибки формального нейрона $F_0(d_i) \rightarrow q_i$.

На рисунке 6 приводится схема взвешивания i -го входа в методах релейной адаптации, осуществляемой с помощью ЛДЦПП, имеющей импульсную характеристику (3.1.27).

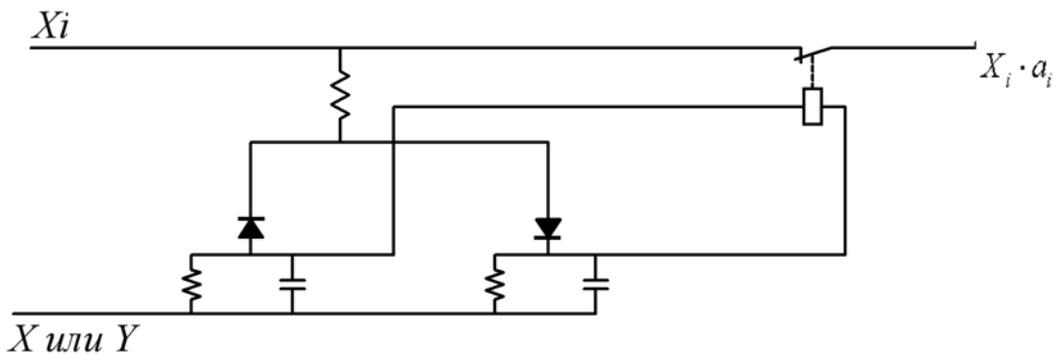


Рис. 6 Схема взвешивания i -го входа в методах релейной адаптации, осуществляемой с помощью ЛДЦПП

В этой схеме используется память на RC -цепочке. Взвешивание голоса происходит с помощью реле, нормально замкнутые контакты которого размыкаются, когда напряжение на его зажимах превышает фиксированный порог (пропорциональный величине критической вероятности ошибки). Веса голосов, как было отмечено, принимают лишь два значения, 0 и 1.

3.2 Дублирование датчиков критического состояния входных каналов нейрона

В данном параграфе на основании изложенного в книге [19] подхода рассматривается проблема оптимального проектирования дублированной структуры датчиков критического состояния входных каналов в формальном нейроне с релейной адаптацией. Когда обнаруживается достижение критического состояния канала, датчик реагирует на это и переключатель размыкает цепь канала, в которую он включён.

Датчик может отказывать в двух случаях:

- достигнуто критическое состояние канала, но оно не обнаруживается;
- критическое состояние канала не достигнуто, но ошибочно фиксируется его наличие.

Словом, датчик критического состояния отказывает тогда, когда он либо не реагирует на существующее критическое состояние, либо ошибочно отмечает наличие критического состояния, когда его нет.

Если критическое состояние выявлено (независимо от того, ложно оно или истинно), то цепь передачи информации по каналу разрывается. Таким образом, отказ отдельного датчика состояния канала может проявиться в том, что при наличии критического состояния канал не отключается от формального нейрона (цепь передачи двоичной информации замкнута) или при отсутствии критического состояния канал отключается от решающего органа (цепь передачи двоичной информации разомкнута).

Однако, если в цепи индикации состояния канала имеются другие переключатели, отказ одного из них может и не привести к отказу всей системы обнаружения критического состояния канала.

Для количественного анализа и обоснования этого утверждения обозначим через α_0 вероятность достижения каналом критического состояния. Пусть q_{01} означает вероятность отказа датчика при критическом состоянии, т.е. вероятность замыкания цепи при критическом состоянии канала. Через q_{02} обозначим вероятность отказа отдельного датчика при отсутствии критического состояния, т.е. вероятность ложного размыкания цепи.

Тогда вероятность Q_1 отказа отдельного датчика, включённого в цепи передачи двоичной информации, согласно рисунку 7, выразится соотношением

$$Q_1 = \alpha_0 q_{01} + (1 - \alpha_0) q_{02}. \quad (3.2.1)$$

Всевозможные цепи, составленные при помощи двух датчиков состояния и помещённые между теми же точками, показаны на рисунках 8.

Рассмотрим, например, схему рисунка 8а. Легко видеть, что отказ этой схемы может

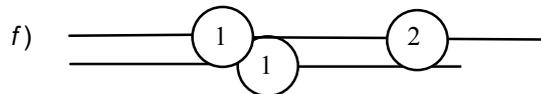


Рис.7 Схема индикации с одним датчиком

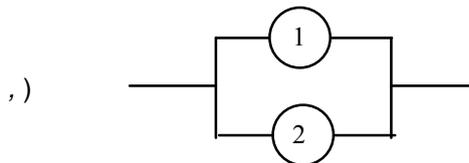


Рис.8 Дублированные схемы индикации

происходить двумя несовместимыми способами:

во-первых, имеется критическое состояние с вероятностью α_0 и цепь остаётся замкнутой из-за того, что и датчик 1, и датчик 2 замкнуты; вероятность этого события будет $\alpha_0 \cdot q_{01}^2$;

во-вторых, критическое состояние отсутствует с вероятностью $(1 - \alpha_0)$, а цепь разомкнута из-за того, что или датчик 1, или датчик 2 разомкнуты; вероятность этого события будет определяться выражением $(1 - \alpha_0) \cdot [1 - (1 - q_{02})^2]$.

Следовательно, ввиду того, что оба события несовместимы, вероятность отказа Q_2 схемы рисунка 8а запишется в виде

$$Q_2 = \alpha_0 q_{01}^2 + (1 - \alpha_0) [1 - (1 - q_{02})^2],$$

или после упрощения,

$$Q_2 = \alpha_0 q_{01}^2 + (1 - \alpha_0) q_{02} (2 - q_{02}). \quad (3.2.2)$$

Аналогично можно рассмотреть схему рисунка 8б. Её отказ также может происходить двумя несовместимыми способами:

во-первых, имеется критическое состояние с вероятностью α_0 и цепь остаётся замкнутой из-за того, что или датчик 1, или датчик 2 замкнуты; вероятность этого события будет $\alpha_0 [1 - (1 - q_{01})^2]$;

во-вторых, критическое состояние отсутствует с вероятностью $(1 - \alpha_0)$, а цепь разомкнута из-за того, что разомкнуты оба датчика; вероятность этого события будет $(1 - \alpha_0) q_{02}^2$.

Таким образом,

$$Q_3 = \alpha_0 [1 - (1 - q_{01})^2] + (1 - \alpha_0) q_{02}^2,$$

или, что тоже самое,

$$Q_3 = \alpha_0 q_{01} (2 - q_{01}) + (1 - \alpha_0) q_{02}^2. \quad (3.2.3)$$

Приступим к сравнительному анализу схем рисунков 7, 8а и 8б. В частности выясним условия, при которых вероятность отказа Q_2 не превосходит вероятности отказа Q_1 , т.е. условия, когда $Q_2 \leq Q_1$.

Последнее неравенство эквивалентно следующему:

$$\alpha_0 q_{01}^2 + (1 - \alpha_0) q_{02} (2 - q_{02}) \leq \alpha_0 q_{01} + (1 - \alpha_0) q_{02}.$$

Следовательно, имеем квадратное относительно q_{02} неравенство:

$$q_{02}^2 - q_{02} + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} q_{01} (1 - q_{01}) \geq 0. \quad (3.2.4)$$

Условия же, при которых

$$Q_2 \leq Q_3,$$

приводят к неравенству

$$\alpha_0 q_{01}^2 + (1 - \alpha_0) q_{01} (2 - q_{02}) \leq \alpha_0 q_{01} (2 - q_{01}) + (1 - \alpha_0) q_{02}^2,$$

или, что то же самое,

$$q_{02}^2 - q_{02} + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} q_{01} (1 - q_{01}) \geq 0. \quad (3.2.5)$$

Наконец, условия, при которых

$$Q_3 \leq Q_1,$$

эквивалентны неравенству

$$q_{02}^2 - q_{02} + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} q_{01} (1 - q_{01}) \leq 0. \quad (3.2.6)$$

Из этого анализа заключаем, что среди схем рисунков 7, 8а и 8б первая, будучи хуже, чем схема рисунка 8а, в то же время лучше, нежели схема рисунка 8б, и, наоборот. Следовательно, схема индикации состояния канала из двух датчиков может быть лучше таковой на одном датчике при правильном выборе структуры соединений. Иначе говоря, чем больше датчиков в цепи индикации, тем более надёжной можно сделать её. Таким образом, исследование достаточно ограничить поиском областей, где либо структура рисунка 8а, либо структура рисунка 8б даёт меньшую вероятность отказа. В частности выясним условие выполнения неравенства $Q_2 \leq Q_3$, равносильного соотношению (3.2.5).

Для этого рассмотрим квадратный трёхчлен

$$P(q_{02}) = q_{02}^2 - q_{02} + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} q_{01} (1 - q_{01})$$

и составим дискриминант

$$D(\alpha_0, q_{01}) = 1 - 4 \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} q_{01} (1 - q_{01}). \quad (3.2.8)$$

Если

$$D(\alpha_0, q_{01}) < 0,$$

то квадратный трёхчлен $P(q_{02})$ положителен для всех допустимых $0 \leq q_{02} \leq 1$ значений вероятности q_{02} . Следовательно, при

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq q_{02} \leq 1 \\ \alpha_0 > \frac{1}{1 + 4q_{01}(1 - q_{01})} \end{array} \right\} \quad (3.2.9)$$

выбор падает на последовательную структуру, как это показано на рисунке 9.

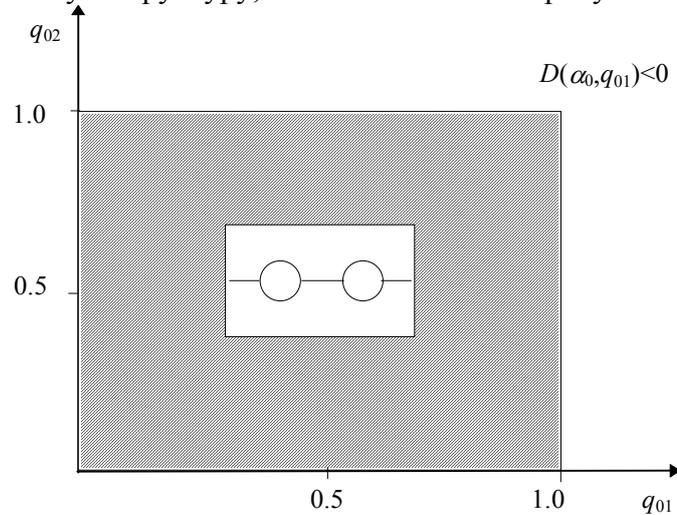


Рис.9 Области предпочтительности схем индикации критического состояния канала при $D(\alpha_0, q_{01}) < 0$

Если

$$D(\alpha_0, q_{01}) = 0,$$

то квадратный трёхчлен $P(q_{02})$ положителен для всех допустимых $0 \leq q_{02} \leq 1$ значений вероятности q_{02} , исключая точку

$$q_{02}^0 = \frac{1}{2},$$

где $P(q_{02}^0) = 0$. Следовательно, при

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq q_{02} < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} < q_{02} \leq 1 \\ \alpha_0 = \frac{1}{1 + 4q_{01}(1 - q_{01})} \end{array} \right\}$$

предпочтительнее последовательная структура. Если же $q_{02} = \frac{1}{2}$, то обе структуры обеспечивают одинаковую вероятность отказа, совпадающую с вероятностью отказа схемы с одним датчиком. Поэтому при

$$\left. \begin{aligned} q_{02} &= \frac{1}{2} \\ \alpha_0 &= \frac{1}{1 + 4q_{01}(1 - q_{01})} \end{aligned} \right\}$$

предпочтение должно быть отдано схеме индикации с одним датчиком, как более экономичной (дешёвой). Рассмотренный случай иллюстрирован рисунком 10.

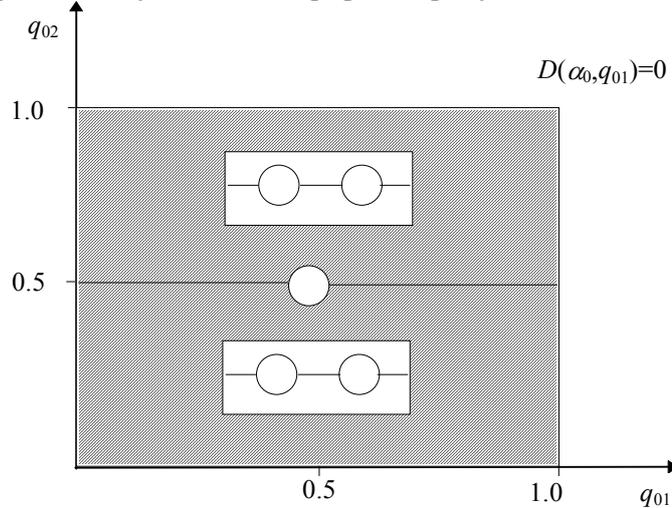


Рис.10 Области предпочтительности схем индикации критического состояния канала при $D(\alpha_0, q_{01}) = 0$

Наконец, если

$$D(\alpha_0, q_{01}) > 0,$$

то квадратный трёхчлен $P(q_{02})$ положителен для $q_{02} > q_{02}^+$ и $q_{02} < q_{02}^-$, где

$$\left. \begin{aligned} q_{02}^+ &= \frac{1 + [D(\alpha_0, q_{01})]^{1/2}}{2} \\ q_{02}^- &= 1 - q_{02}^+ = \frac{1 - [D(\alpha_0, q_{01})]^{1/2}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.10)$$

и отрицателен при $q_{02}^- < q_{02} < q_{02}^+$. Следовательно, когда дискриминант положителен, неравенства $q_{02} > q_{02}^+$ и $q_{02} < q_{02}^-$ задают области предпочтительности последовательной структуры, а неравенство $q_{02}^- < q_{02} < q_{02}^+$ - область предпочтительности параллельной структуры. При $q_{02} = q_{02}^+$ и $q_{02} = q_{02}^-$, если дискриминант положителен, квадратный трёхчлен $P(q_{02})$ равен нулю и поэтому $Q_2 = Q_3 = Q_1$. Следовательно, предпочтение должно быть отдано схеме с одним датчиком.

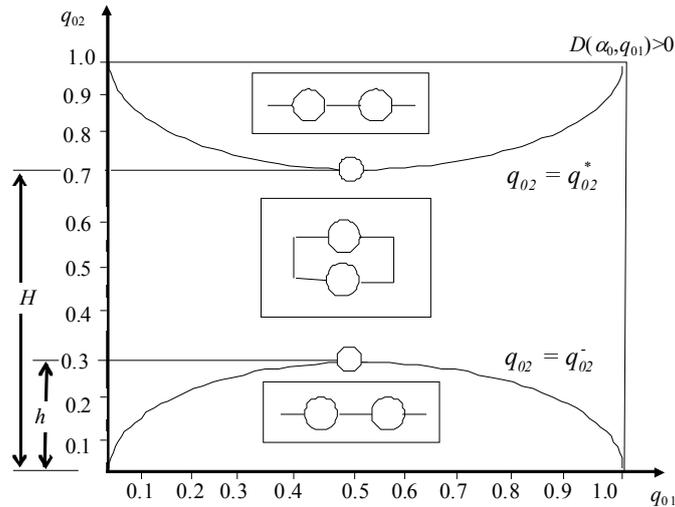


Рис.11 Области предпочтительности схем индикации критического состояния канала при $D(\alpha_0, q_{01}) > 0$

Эта схема дешевле обходится. Для случая $D(\alpha_0, q_{01}) > 0$ результаты проведённого анализа представлены на рисунке 11. Здесь

$$\left. \begin{aligned}
 H(\alpha_0) = q_{02}^+ \left(q_{01} = \frac{1}{2} \right) &= \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0}}}{2} \\
 h(\alpha_0) = q_{02}^- \left(q_{01} = \frac{1}{2} \right) &= \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0}}}{2}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.11)$$

и, следовательно, $H(\alpha_0) + h(\alpha_0) = 1$.

С увеличением α_0 в пределах $0 < \alpha_0 < \frac{1}{2}$ величина $H(\alpha_0)$ убывает, а величина $h(\alpha_0)$ растёт. При $\alpha_0 > \frac{1}{2}$ дискриминант становится отрицательным, так как $q_{01} = \frac{1}{2}$, и мы выходим за рамки изучаемого случая.

Зависимости $H(\alpha_0)$ и $h(\alpha_0)$ при $0 < \alpha_0 < \frac{1}{2}$ показаны на рисунке 12.

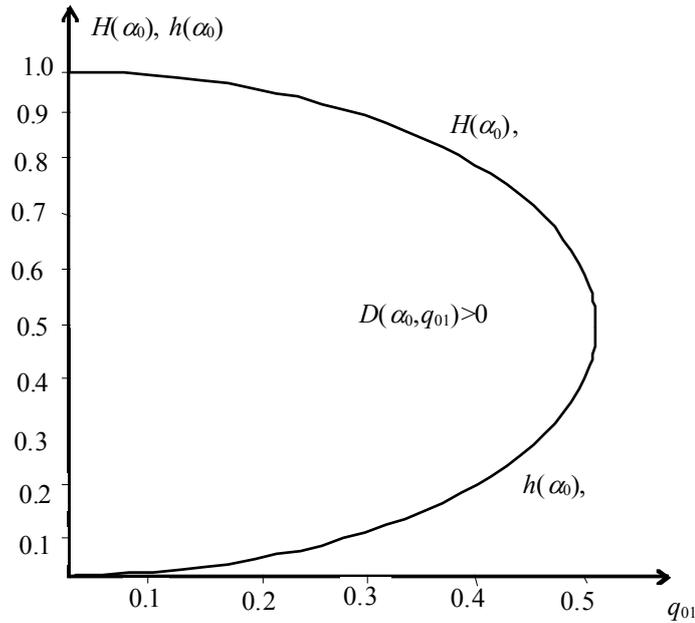


Рис.12 Графики зависимостей $h(\alpha_0)$ и $H(\alpha_0)$

При числе датчиков $n \geq 3$ не представляется возможным проведение столь исчерпывающего аналитического исследования и поэтому следует обратиться к численному анализу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

КРАТКАЯ СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

В работе рассмотрен вопрос адаптации формального нейрона, т.е. вопрос управления его весами с целью их приведения в соответствие с вероятностями ошибок на входах. Характер адаптации в значительной мере определяется стратегией настройки весов, которая может осуществляться как циклически, после фиксированного числа сравнений, так и в каждый тактовый момент времени путём соответствующего приращения весов. Кроме того, настройка может иметь место и в случайные моменты времени по достижении входами формального нейрона некоторого критического состояния.

Другим важным признаком служит обратная связь. При наличии в формальном нейроне обратной связи ошибка выявляется по рассогласованию сигнала X_i на $i-v$ входе с принимаемым решением Y . В отсутствие же обратной связи контроль осуществляется по рассогласованию с подаваемым извне правильным ответом. Использование схем адаптации без обратной связи ограничено задачами начальной настройки и их периодической (плановой) или случайной установки с помощью тестирующих программ.

Исследование перечисленных выше классов адаптации формального нейрона приводит к излагаемым ниже основным результатам.

I. Циклическая адаптация без обратной связи может обеспечивать работу решающего нейрона с весами, близкими к оптимальным, если число сравнений в каждом цикле не меньше некоторой величины M , определяемой соотношением

$$M = \frac{Z_{a/2}^2}{4\varepsilon^2},$$

где α - выбираемая достаточно близкой к единице вероятность того, что оценка \hat{q}_i вероятности q_i ошибки i -го входа отклоняется от q_i не более, чем на заданную малую величину ε :

$$\Pr\left\{\left|\hat{q}_i - q_i\right| \leq \varepsilon\right\} = \alpha.$$

$Z_{\alpha/2}$ представляет собой стандартную нормальную статистику для вероятности α , определяемую условием

$$\frac{\alpha}{2} = \Phi_0(Z_{\alpha/2}),$$

где $\Phi_0(t)$ - нормированная функция Лапласа, т.е.

$$\Phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

II. При циклической адаптации с обратной связью вероятность d_i рассогласования сигнала X_i на i -м входе формального нейрона с решением Y на его выходе удовлетворяет условию

$$\left. \begin{array}{l} q_i - Q \leq d_i \leq q_i + Q \\ i = 1, n+1 \end{array} \right\},$$

где q_i - вероятность ошибки i -го входа, а Q - вероятность ошибки восстанавливающего органа при оптимальных весах входов.

III. Из предыдущего следует, что при циклической адаптации с обратной связью в установившемся состоянии относительное отклонение вероятности ошибки формального нейрона от оптимального значения Q этой вероятности не превосходит величины

$$\Xi = Q \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1-2q_i}{2 \cdot q_i \cdot (1-q_i)}.$$

При $Q \rightarrow 0$ и ограниченности суммы весов

$$\left. \begin{array}{l} a_{im} = \frac{1-2q_i}{2 \cdot q_i \cdot (1-q_i)} \\ i = 1, n+1 \end{array} \right\},$$

доставляющих обобщённому (махаланобисову) расстоянию максимум, может обеспечиваться близкий к оптимальному режим.

IV. При непрерывной адаптации без обратной связи по алгоритму Уидроу-Хоффа величина случайного приращения i -го веса

$$\Delta a_i(k) = a_i(k+1) - a_i(k),$$

осуществляемого на $(k+1)$ -м шаге итерации, определяется исключительно разностью взвешенной суммы сигналов на входах формального нейрона с ограничением m_0 , накладываемым на величину этой суммы. Поэтому на каждом шаге абсолютная величина приращения весов одинакова для всех входов. В установившемся состоянии математические ожидания этих приращений равны нулю:

$$\left. \begin{array}{l} M[\Delta a_i(k)] = 0 \\ i = 1, n+1 \end{array} \right\}.$$

Веса \hat{a}_i , при которых достигается такое состояние, удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_i &= \frac{2m_0}{4 + \rho_{\max}} \cdot a_{im} \\ i &= \overline{1, n+1} \end{aligned} \right\},$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{im} &= \frac{1 - 2q_i}{2q_i(1 - q_i)} \\ i &= \overline{1, n+1} \end{aligned} \right\}$$

- веса, доставляющие махаланобисову расстоянию максимум, а ρ_{\max} - указанное максимальное значение махаланобисова расстояния:

$$\rho_{\max} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(1 - 2q_j)^2}{q_j(1 - q_j)}.$$

Функционирование с такими весами может быть признано как почти оптимальное.

У. При непрерывной адаптации без обратной связи по алгоритму унифицированного поощрения и индивидуального наказания (УПИН) приращение i -го веса $\Delta a_i(k) = a_i(k+1) - a_i(k)$, производимое на $(k+1)$ -м шаге итерации, в отсутствие ошибки принимает некоторое значение β_k с вероятностью $(1 - q_i)$, а при наличии ошибки - значение $(-\beta_k \cdot e^{a_i(k)})$ с вероятностью q_i , причём $\beta_k \geq 0$, а начальные $a_i(1)$ ($i = \overline{1, n+1}$) веса произвольны.

УІ. Достаточным условием установления состояния, при котором

$$\left. \begin{aligned} M[\Delta a_i(k)] &= 0 \\ i &= \overline{1, n+1} \end{aligned} \right\}$$

и веса имеют оптимальные значения

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_i &= \ln \frac{1 - q_i}{q_i} \\ i &= \overline{1, n+1} \end{aligned} \right\},$$

является выбор параметра β_k , отвечающего $(k+1)$ -му шагу итерации, по соотношению

$$\beta_k = \frac{1}{k}.$$

УІІ. Такой выбор находится в согласии с байесовским подходом, дающим для статистической оценки веса $\ln \frac{1 - q_i}{q_i}$ величину

$$a_i(k) = \ln \frac{k - n_i + 1}{n_i + 1},$$

где n_i - число ошибок, наблюдавшихся при k сравнениях сигнала X_i на i -м входе формального нейрона с правильным ответом, подаваемым извне.

УІІІ. Алгоритм унифицированного поощрения и индивидуального наказания в первом приближении эквивалентен оцениванию весов $\ln \frac{1 - q_i}{q_i}$ по соотношению

$$\ln \frac{k - n_i + 1}{n_i + 1}$$

на каждом шаге итерации. Поэтому существует указанное в пункте 1 настоящей сводки значение M номера k итерации, при котором статистическая оценка \hat{q}_i вероятности q_i ошибки i -го входа отклоняется от величины q_i не более, чем на заданное малое число ε с достаточно близкой к единице вероятностью α .

Поскольку до достижения этого состояния при $k \leq M$ имеет место соотношение $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{M}$, то использование в процессе адаптации, вместо $\beta_k = \frac{1}{k}$, меньшего по величине постоянного приращения весов $\beta = \frac{1}{M}$ не может нарушить сходимости процесса к состоянию с оптимальными весами.

IX. Процесс случайного блуждания весов при непрерывной адаптации по алгоритму унифицированного поощрения и индивидуального наказания обуславливает соответствующее статистическое распределение вероятности Q ошибки формального нейрона. Эту вероятность можно рассматривать как случайную величину, являющуюся функцией случайных аргументов a_i ($i = \overline{1, n+1}$) и фиксированных надёжных параметров q_i ($i = \overline{1, n+1}$).

X. При релейной адаптации формального нейрона без обратной связи веса его входов задаются по соотношениям

$$a_i = \text{sgn}(q_0 - q_i),$$

где q_0 - предельно допустимая вероятность ошибки входов, отвечающая их критическому состоянию. Для реализации этой стратегии в принципе можно вычислять любую функцию F_0 , монотонно зависящую от q_i , осуществляя приведение весов a_i в соответствие с вероятностями ошибок q_i по формулам

$$a_i = \text{sgn} \left[\frac{F_0(q_0) - F_0(q_i)}{i = \overline{1, n}} \right].$$

С целью конкретной реализации монотонной зависимости $F_0(q_i)$, т.е. сигнала, управляющего процессом установки веса a_i , предлагается использовать линейную дискретную цепь с постоянными параметрами (ЛДЦПП). При этом исходная задача обеспечения устойчивости процесса релейной адаптации редуцируется к задаче синтеза соответствующей ЛДЦПП, т.е. к проблеме отыскания её импульсной характеристики g как функции z , для которой интеграл

$$I = \int_a^b \Phi(z, g) dz$$

принимает максимальное значение в условиях ограничений

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b \Phi_1(z, g) dz &= \beta_1 \\ \int_a^b \Phi_2(z, g) dz &= \beta_2 \end{aligned} \right\},$$

где β_1 и β_2 - суть заданные постоянные.

XI. Решение сформулированной в предыдущем пункте задачи имеет следующий вид:

$$g(k) = \begin{cases} \frac{A_0}{T_s} \cdot e^{-\frac{k}{T_s}}, & \text{если } k \geq 0 \\ 0, & \text{если } k < 0 \end{cases},$$

где целочисленные значения $k = 0, 1, 2, \dots$ отвечают тактовым моментам времени. Следовательно, $g(k)$ представляет собой импульсную характеристику фильтра низких частот.

Математическое ожидание снимаемого с выхода ЛДЦПП сигнала в достаточно удалённый тактовый момент времени k ($k \rightarrow \infty$) выражается соотношением:

$$F_0(q_i) = q_i \cdot \frac{A_0}{T_s} \cdot \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{1}{T_s}\right)}.$$

Если при этом $A_0 = 1$, и постоянная времени фильтра $T_s \rightarrow \infty$, то

$$F_0(q_i) \rightarrow q_i.$$

Дисперсия же снимаемого с выхода ЛДЦПП сигнала находится по формуле

$$D[F_0(q_i)] = q_i \cdot (1 - q_i) \cdot \left(\frac{A_0}{T_s}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{2}{T_s}\right)}$$

и, если $T_s \rightarrow \infty$, то $D[F_0(q_i)] \rightarrow 0$.

ХII. Обоснована одна из возможных схем «взвешивания» некоторого входного канала формального нейрона в методе релейной адаптации, осуществляемой с помощью линейной дискретной цепи с постоянными параметрами.

В этой схеме используется построенная на RC цепочке память. «Взвешивание головок» осуществляется с помощью реле, нормально замкнутые контакты которого размыкаются, когда напряжение на зажимах обмотки реле превзойдёт установленный порог. Этот порог пропорционален вероятности критического состояния входного канала формального нейрона. «Весы» каналов представляются бинарными величинами (нулём и единицей).

ХIII. Получено точное решение для задачи нахождения структуры дублирования датчиков критического состояния входных каналов формального нейрона. Эта структура обеспечивает минимальную ошибку распознавания критического состояния входа при релейной адаптации.

Литература

1. *Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В.* Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений.-М.:Наука, 1969.-511 с.
2. *Хальд А.* Математическая статистика с техническими приложениями: Пер. с англ.-М.: ИЛ, 1956.-664 с.
3. *Mize J.H., Cox J.G.* Essentials of Simulation.-New Jersey: Prentice-Hall, Inc.; Englewood Cliffs, 1968.
4. *Шенон Р.* Имитационное моделирование систем - искусство и наука: Пер. с англ.-М.: Мир, 1978.-418 с.
5. *Пирс У.* Построение надёжных вычислительных машин: Пер. с англ.-М.: Мир, 1968.-270 с.
6. *Mahalanobis P.C.* On the Generalized Distance in Statistics // Proceedings of the National Institute of Sciences of India.-1936.-V.12.-P.49-55.
7. *Robbins H., Monro S.* A Stochastic Approximation method // Ann. Math. Stat.-1951.-V.22.-P.400-407.

8. *Widrow B., Hoff M.* Adaptive Switching Circuits // IRE Wescon Convention Record.-1960.-Pt 4.-P.96-104.
9. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло.-М.: Наука, 1973.-311 с.
10. *Акоф Р.* Искусство решения проблем: Пер. с англ.-М.: Мир, 1982.-220 с.
11. *Поляк Ю.Г.* Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах.-М.: Сов. радио, 1971.-400 с.
12. *Яковлев Е.И.* Машинная имитация.-М.: Наука, 1975.-158 с.
13. *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Статистическое моделирование.-М.: Наука, 1982.-296 с.
14. *Нейлор Т.* и др. Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем: Пер. с англ.- М.: Мир. 1975.-500 с.
15. *Акоф Р., Сасиени М.* Основы исследования операций: Пер. с англ.-М.: Мир, 1971.-534 с.
16. *Бусленко Н.П.* Моделирование сложных систем.-М.: Наука, 1978.-400 с.
17. *Морс Ф.М., Кимбелл Д.Е.* Методы исследования операций: Пер. с англ.-М.: Сов. радио, 1956.-307 с.
18. *Голдман С.* Теория информации: Пер. с англ.-М.: ИЛ. 1957.- 446 с.
19. *Ллойд Д., Липов М.* Надёжность: организация исследования, методы, математический аппарат: Пер. с англ.-М.: Сов. радио, 1964.-686 с.

Article received: 2013-10-01