

უკ 621.391.15

ახალი ალფაბეტური სიჭარბის მქონე კოდებითამარ კვიკვინია¹, ეკატერინე ურუშაძე²^{1,2}საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, მ. კოსტავას ქ., 77, 0175 თბილისი, საქართველო
¹tam.kvikvinia@gmail.com, ²Ek_urushadze@yahoo.com**რეზიუმე**

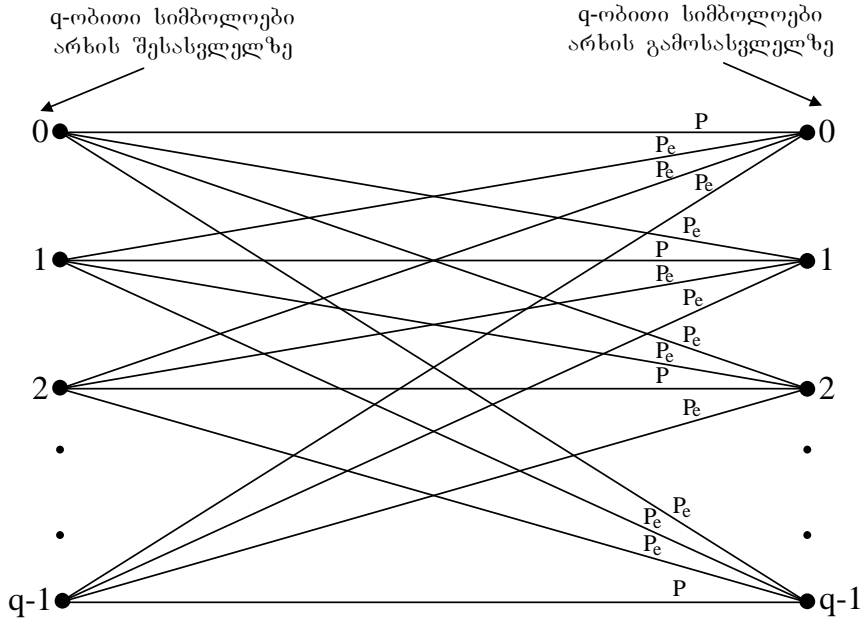
ნაშრომი ეხება ალფაბეტური სიჭარბის მქონე, მანძილის მიმართ ინვარიანტულ კოდებს. კერძოდ, ავტორთა მიერ შექმნილი სპეციალური პროგრამის საშუალებით დამუშავებულია ახალი კოდების კომპიუტერული ძებნის მეთოდები. ხვეულა კოდები აგებულია ორობითი სიმეტრიული არხისათვის. ასევე, აგებულია სამობითი სიგნალ-კოდური სისტემები სიმპლექსური სიგნალების გამოყენებით. ანგარიშისას მიღებული ყველა შედეგი მოცემულია ცხრილების სახით. ნაშრომი შეიცავს ხუთ ნახაზს და ორ ცხრილს, რომლებშიც შესულია ყველა მიღებული მონაცემი. ნაჩვენებია, რომ მოყვანილი ოთხობითი კოდები შეიძლება გამოყენებული იქნან როგორც ორობითი სიმეტრიული არხებისთვის, ასევე გაუსის არხებისათვის ორობითი და ოთხობითი ფაზამოდულირებული სიგნალებით.

საკვანძო სიტყვები: კოდი, საგნალი, ხმაური, არხი, სპექტრი

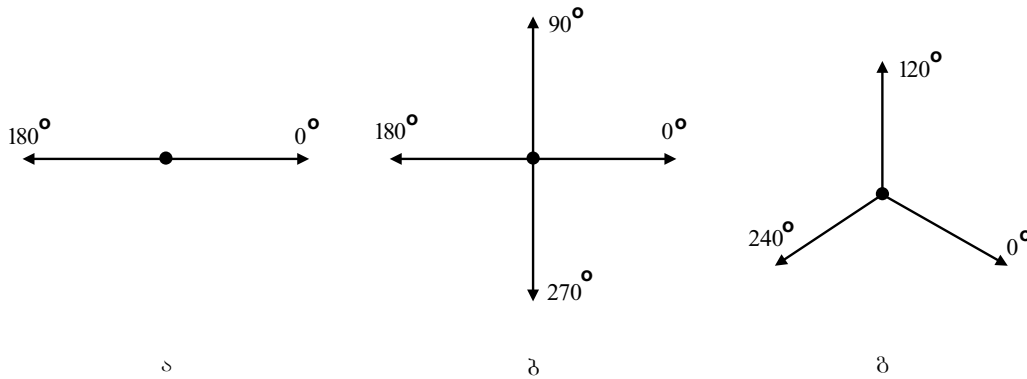
1. შესავალი

აქ და მომავალში, ჩვენს მიერ მოყვანილ გადაცემის სისტემებში გარემო, რომელშიც ვრცელდება გარკვეული ფორმით წარმოდგენილი მიმდევრობა, შეიძლება იყოს მექანიკური, ელექტრული, ელექტრომაგნიტური და ა.შ.; ხოლო ერთ-ერთი არხის სახით განიხილება მოდელი, რომელიც ნაჩვენებია ნახ. 1-ზე. აქ იგულისხმება, რომ სხვადასხვა სიმბოლოთა გადაცემისას ადგილი აქვს დამოუკიდებელ შეცდომებს. ესაა ე.წ. q -ობითი სიმეტრიული არხი მეხსიერების გარეშე, რომელშიც სიმბოლოს არასწორად მიღების ალბათობა $P_e = (1-P)/(q-1)$, სადაც P არის სიმბოლოს სწორად მიღების ალბათობა. ვინაიდან ჩვენ განვიხილავთ ორობითი კოდებს, ამიტომ ახალი ხვეულა კოდები აგებული იქნებიან ორობითი სიმეტრიული არხისათვის ($q=2$);

აქვე იქნება ნაჩვენები, რომ ეს კოდები ოპტიმალურები (მანძლთა მიხედვით) იქნებიან ორობითი და ოთხობითი ფაზამოდულირებული სიგნალებისათვის (ნახ. 2 ა,ბ); ხვეულა კოდები სამობითი გამოსასვლელით აგებული იქნება სამობითი სიმპლექსური ფაზამოდულირებული სიგნალებისათვის (ნახ. 2 გ). აქ არხების სახით განიხილება არხები თეთრი გაუსის ხმაურით, რომელთაც აქვთ ნულოვანი დისპერსია და N_0 სიმძლავრის სპექტრალური სიმკვრივე. თითოეული ვექტორის სიგრძე ნახ. 2-ზე ტოლია \sqrt{Es} , სადაც Es სიგნალის ენერჯიაა.



ნახ. 1. q - ობითი სიმეტრიული არხის მოდელი



ნახ. 2. ორობითი (ა), ოთხობითი (ბ) და სამობითი (გ) ფაზამოდულირებული სიგნალები

2. ძირითადი ნაწილი

[1]-ში მოყვანილი მასალის შესაბამისად ახალი ხვეულა კოდები იქნებიან მანძილის მიმართ ინვარიანტულები. დეიქსტრის ალგორითმისა [2] და მის შესაბამისად შედგენილი პროგრამის გამოყენებით ნაპოვნი იქნა ახალი, მანძილის მიმართ ინვარიანტული ხვეულა კოდები, რომლებიც მოყვანილი არიან 1 და 2 ცხრილებში. აქ ისინი წარმოდგენილი არიან თავიანთი მანძილის სპექტრებით, სადაც d ჰემინგის მანძილია (ე. ი $d = d_H$), d^2 არის ევკლიდური მანძილის კვადრატი, a მოცემული მანძილის (d ან d^2) მქონე გზების შესაბამისი გადაცემული ბიტების რაოდენობა, L იარუსების ის რაოდენობაა კოდურ გისოსზე, სადაც მანძილთა სპექტრში გვაქვს $\max(d)$ ან $\max(d^2)$.

ცხრილი 1. ა. ხვეულა კოდები ორობითი შესასვლელითა და ორობითი გამოსასვლელით

3 1 <i>L=21</i>		3 1 3 <i>L=46</i>		3 3 1 3 <i>L=49</i>		3 2 1 1 3 <i>L=68</i>		3 1 3 1 1 3 <i>L=80</i>	
<i>d_i</i>	<i>a_i</i>	<i>d_i</i>	<i>a_i</i>	<i>d_i</i>	<i>a_i</i>	<i>d_i</i>	<i>a_i</i>	<i>d_i</i>	<i>a_i</i>
3	1	5	1	6	2	7	4	8	4
4	2	6	4	7	7	8	12	9	11
5	3	7	12	8	18	9	20	10	36
6	4	8	32	9	49	10	72	11	83
7	5	9	80	10	130	11	225	12	250
8	6	10	192	11	333	12	500	13	630
9	7	11	448	12	836	13	1324	14	1776
10	8	12	1024	13	2069	14	3680	15	4531
11	9	13	2304	14	5060	15	8967	16	11982
12	10	14	5120	15	12255	16	22270	17	30474
13	11	15	11264	16	29444	17	57403	18	78492
14	12	16	24576	17	70267	18	142234	19	198907
15	13	17	53248	18	166726	19	348830	20	504730
16	14	18	114688	19	393635	20	867106	21	1270141
17	15	19	245760	20	925334	21	2134239	22	3190906
18	16	20	524288	21	2166925	22	5205290	23	7978154
19	17	21	1114112	22	5057286	23	12724352	24	19903010
20	18	22	2359296	23	11767305	24	31022962	25	49491586
21	19	23	4980736	24	27305864	25	75250693	26	122799106
22	20	24	10485760	25	63207473	26	182320864	27	303950322
23	21	25	22020096	26	145986568	27	441125164	28	750869456

ცხრილი 1. ბ. ხვეულა კოდები ორობითი შესასვლელითა და ორობითი გამოსასვლელით

3 2 0 3 3 1 3 <i>L=90</i>		3 1 3 1 2 2 1 3 <i>L=93</i>		3 1 3 3 2 1 0 1 3 <i>L=102</i>		3 2 2 0 1 3 2 1 2 3 <i>L=110</i>		3 1 3 3 0 3 2 2 0 1 3 <i>L=112</i>	
<i>d_i</i>	<i>a_i</i>	<i>d_i</i>	<i>a_i</i>	<i>d_i</i>	<i>a_i</i>	<i>d_i</i>	<i>a_i</i>	<i>d_i</i>	<i>a_i</i>
10	36	10	4	12	33	12	8	14	71
11	0	11	10	13	0	13	0	15	0
12	211	12	64	14	281	14	154	16	419
13	0	13	130	15	0	15	0	17	0
14	1404	14	318	16	2179	16	1064	18	3383
15	0	15	905	17	0	17	0	19	0
16	11633	16	2424	18	15035	18	7346	20	23484
17	0	17	6187	19	0	19	0	21	0
18	77433	18	17422	20	105166	20	52073	22	157716
19	0	19	44417	21	0	21	0	23	0
20	502690	20	113904	22	692330	22	347879	24	1048620
21	0	21	297764	23	0	23	0	25	0
22	3322763	22	763260	24	4580007	24	2308011	26	6914707
23	0	23	1934897	25	0	25	0	27	0
24	21292910	24	4933300	26	29692894	26	15074111	28	44725065
25	0	25	12557730	27	0	27	0	29	0
26	134365911	26	31730448	28	190453145	28	97031904	30	286678096
27	0	27	80015153	29	0	29	0	31	0
28	843425871	28	201670146	30	1208999091	30	619561390	32	1822054919
29	0	29	506533510	31	0	31	0	33	0
30	5245283348	30	1269364860	32	7622677693	32	3921984002	34	11496908044

ცხრილი 2.ა. ხვეულა კოდები ორობითი შესასვლელითა და სამობითი გამოსასვლელით

1 1 L=21		1 1 2 L=66		1 1 1 2 L=57		1 1 1 2 2 L=116		1 1 1 1 2 2 L=83	
d_i^2	a_i	d_i^2	a_i	d_i^2	a_i	d_i^2	a_i	d_i^2	a_i
3	1	4.5	3	6	6	7.5	5	9	17
4.5	2	6	15	7.5	6	9	42	10.5	39
6	3	7.5	58	9	58	10.5	135	12	187
7.5	4	9	201	10.5	118	12	727	13.5	683
9	5	10.5	655	12	507	13.5	3018	15	2741
10.5	6	12	2052	13.5	1284	15	12783	16.5	10322
12	7	13.5	6255	15	4323	16.5	51782	18	37096
13.5	8	15	18687	16.5	11846	18	210330	19.5	136834
15	9	16.5	54974	18	36009	19.5	835046	21	488901
16.5	10	18	159765	19.5	100844	21	3294834	22.5	1749291
18	11	19.5	459743	21	292830	22.5	12870612	24	6190259
19.5	12	21	1312200	22.5	821568	24	49963630	25.5	21803038
21	13	22.5	3719643	24	2330668	25.5	192707673	27	76377332
22.5	14	24	10482351	25.5	6509702	27	739596902	28.5	266343461
24	15	25.5	29391490	27	18219432	28.5	2825474756	30	925251279
25.5	16	27	82048737	28.5	50592106	30	10752036148	31.5	3202795872
27	17	28.5	228160495	30	140349045	31.5	40771803481	33	11052511705
28.5	18	30	632293452	31.5	387559772	33	154127275727	34.5	38033968207
30	19	31.5	1746896199	33	1068269069	34.5	581007132093	36	130555763220
31.5	20	33	4813063455	34.5	2935542798	36	2184683661144	37.5	447122121024
33	21	34.5	13228122758	36	8051416787	37.5	8195990895282	39	1528107655812

ცხრილი 2.ბ. ხვეულა კოდები ორობითი შესასვლელითა და სამობითი გამოსასვლელით

1 1 1 1 2 2 2 L=163		1 1 0 1 1 2 2 2 L=117		1 0 1 1 1 1 2 2 2 L=180		1 1 1 1 2 2 1 0 1 1 L=197		1 1 0 1 1 0 1 2 2 2 2 L=159	
d_i^2	a_i	d_i^2	a_i	d_i^2	a_i	d_i^2	a_i	d_i^2	a_i
9	3	10.5	8	12	32	13.5	75	13.5	21
10.5	11	12	28	13.5	95	15	297	15	59
12	100	13.5	129	15	751	16.5	1306	16.5	336
13.5	295	15	634	16.5	2854	18	7290	18	1531
15	1557	16.5	3257	18	14105	19.5	33419	19.5	6661
16.5	6256	18	13549	19.5	64101	21	153429	21	30546
18	27000	19.5	57889	21	294704	22.5	708669	22.5	132964
19.5	108696	21	245965	22.5	1304178	24	3212938	24	579101
21	442192	22.5	1027205	24	5763673	25.5	14428284	25.5	2486497
22.5	1762717	24	4244525	25.5	25137830	27	64218919	27	10596909
24	7005217	25.5	17367881	27	109332756	28.5	283986883	28.5	44841232
25.5	27555165	27	70640257	28.5	471215062	30	1248820820	30	188442686
27	107912228	28.5	285414744	30	2022521534	31.5	5463283722	31.5	788745319
28.5	420128113	30	1147440092	31.5	8638086694	33	23801148162	33	3284832842
30	1628896996	31.5	4591770680	33	36748343314	34.5	103293194002	34.5	13626151524
31.5	6289690428	33	18300413810	34.5	155763088262	36	446741415859	36	56328749339
33	24204148568	34.5	72682354368	36	658167323756	37.5	1926344546847	37.5	232139114131
34.5	92850251450	36	287757299534	37.5	2773028465632	39	8283804419885	39	953988726757
36	355205342557	37.5	1136034224353	39	11653734622624	40.5	35535275442910	40.5	3910613200080
37.5	1355441391359	39	4473536062828	40.5	48860808634532	42	152097360173159	42	15993716896091
39	5160549482108	40.5	17575524972785	42	204426787916078	43.5	649681793202754	43.5	65276103262934

ვინაიდან ცხრილებში მოყვანილი ხვეულა კოდის კოდერებს აქვთ ერთი შესასვლელი და ერთი გამოსასვლელი, ამიტომ კოდირების სიჩქარე ტოლია

$$R = \log_2(q) / \log_2(Q),$$

სადაც, q კოდერის შესასვლელი სიმბოლოების ალფაბეტის ზომაა, ხოლო Q არის კოდერის გამოსასვლელი სიმბოლოების ალფაბეტის ზომა. ცხადია, მაშინ ცხრილ 1-ში მოყვანილი კოდებისათვის, სადაც $q=2$, $Q=4$, $R=1/2$; აქ d მანძილია ჰემინგის მიხედვით, ე. ი. $d = d_H$. უნდა აღინიშნოს, რომ, მართალია ცხრილ 1-ში მოყვანილი კოდები ოპტიმალურები არიან ორობითი სიმეტრიული არხისათვის, ისინი ოპტიმალურები იქნებიან გაუსის არხებისათვის ორობითი ($M=2$) ფაზამოდულირებული სიგნალების (BPSK) გადაცემისას. ცნობილია, რომ ფაზამოდულირებულ სიგნალებს შორის ევკლიდური მანძილის კვადრატია [3]

$$d^2 = 2Es(1 - \cos \Delta\varphi)$$

სადაც, $\Delta\varphi$ არის განსხვავებულ სიგნალებს შორის ფაზათა სხვაობა; ცხადია, BPSK-ს შემთხვევისთვის $\Delta\varphi=180^\circ$ და $d^2=4Es=4E_bR\log_2(M)$. აქ თუ მოვახდენთ მის ნორმირებას E_b -ით (E_b ერთი ბიტის გადამტანი სიგნალის ენერჯია) გვექნება $d^2 = d_H$. ძნელი არაა ვაჩვენოთ, რომ ოთხობითი ($M=4$) ფაზამოდულირებული სიგნალების (QPSK) გადაცემისას, თუ კოდური სიმბოლოების წყვილების ასახვა ფაზების მნიშვნელობებში ხდება პრინციპით (ე.წ. გრეის კოდი) [4]:

$$00 \rightarrow 0^\circ \quad 01 \rightarrow 90^\circ \quad 11 \rightarrow 180^\circ \quad 10 \rightarrow 270^\circ$$

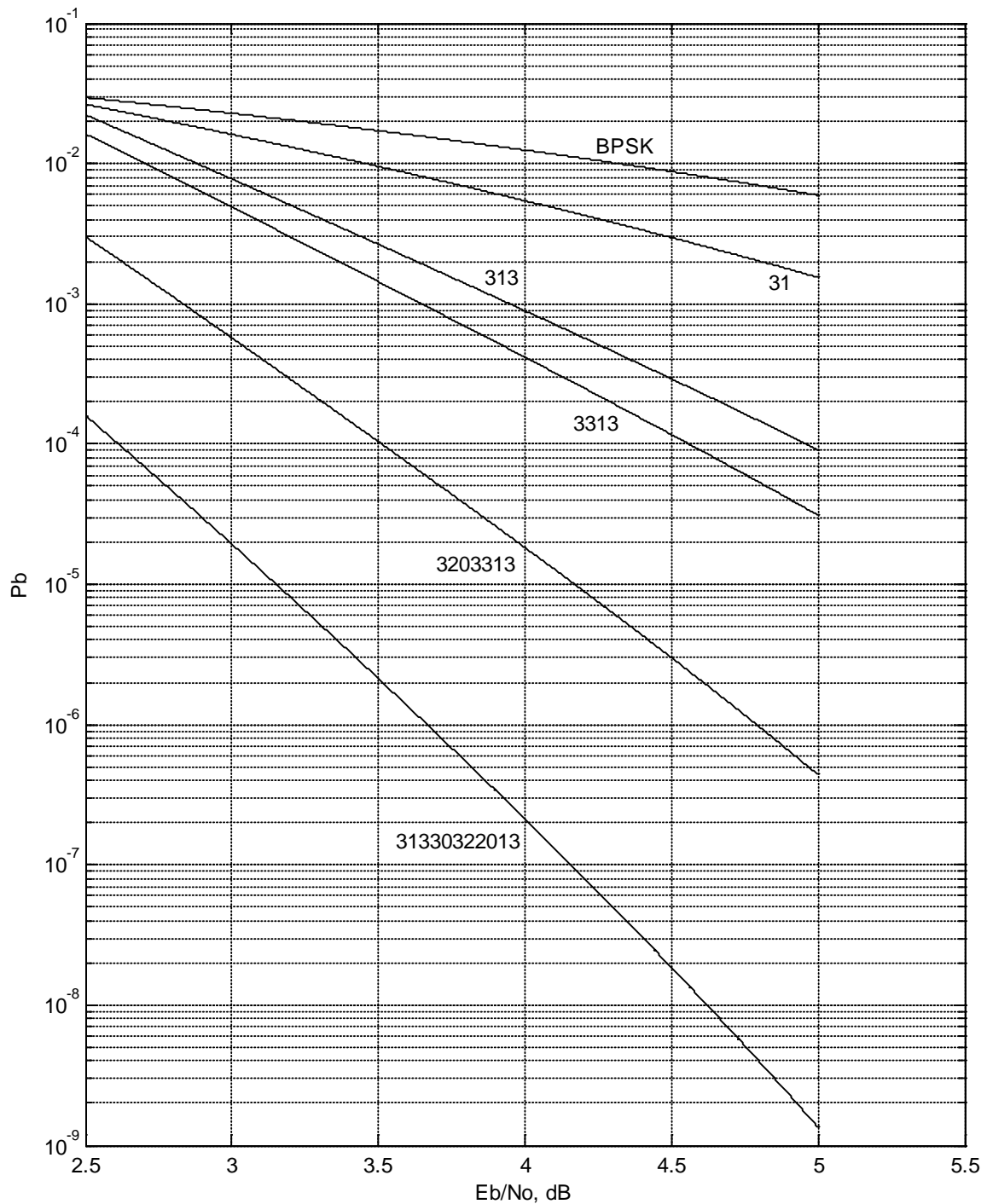
მაშინაც $d^2 = d_H$.

ე.ი. თუ ცხრილ 1-ში მოყვანილი კოდების გამოყენებით ავაგებთ სიგნალ-კოდურ სისტემებს გაუსის არხისათვის, BPSK და QPSK სიგნალების ბაზაზე, ორივე შემთხვევაში სიგნალ-კოდური სისტემის ევკლიდური მანძილის კვადრატის მნიშვნელობა ტოლი იქნება შესაბამისი კოდის ჰემინგის მანძილისა ($d^2 = d_H$).

ცხრილ 2-ში მოყვანილია სამობითი, ალფაბეტური სიჩქარის მქონე ხვეულა კოდებისა ($q=2$, $Q=3$), და სამობითი სიმპლექსური ფაზამოდულირებული სიგნალის (TPSK) ბაზაზე აგებული სიგნალ-კოდური სისტემის დისტანციური მახასიათებლები.

ცხრილებში კოდები ჩაწერილი არიან Q -ობით ფორმაში.

ორობით სიმეტრიული არხებისთვის ნაპოვნი ახალი ხვეულა კოდების მახასიათებლები ფასდებიან თავისუფალი ჰემინგის მანძილებით (იხ. ცხრილი 1); ხოლო ისეთი გაუსის არხებისათვის, სადაც გამოიყენებიან ორობითი ($M=2$) ფაზამოდულირებული სიგნალები (BPSK), სამობითი ($M=3$) ფაზამოდულირებული სიგნალები (TPSK) და ოთხობითი ($M=4$) ფაზამოდულირებული სიგნალები (QPSK) ეფექტურობის შესაფასებლად ვიყენებთ სიჩქარის γ მახასიათებელს და ბიტზე შეცდომის ალბათობათა (P_b) მახასიათებლებს. აქ $\gamma = R \log_2(M)$ ბიტი/სიმბოლო/ჰც; ხოლო $P_b = f(E_b / N_0)$, სადაც E_b / N_0 ერთი საინფორმაციო ბიტის შესაბამისი სიგნალის ენერჯისა და გაუსის ხმაურის ენერჯის თანაფარდობაა.

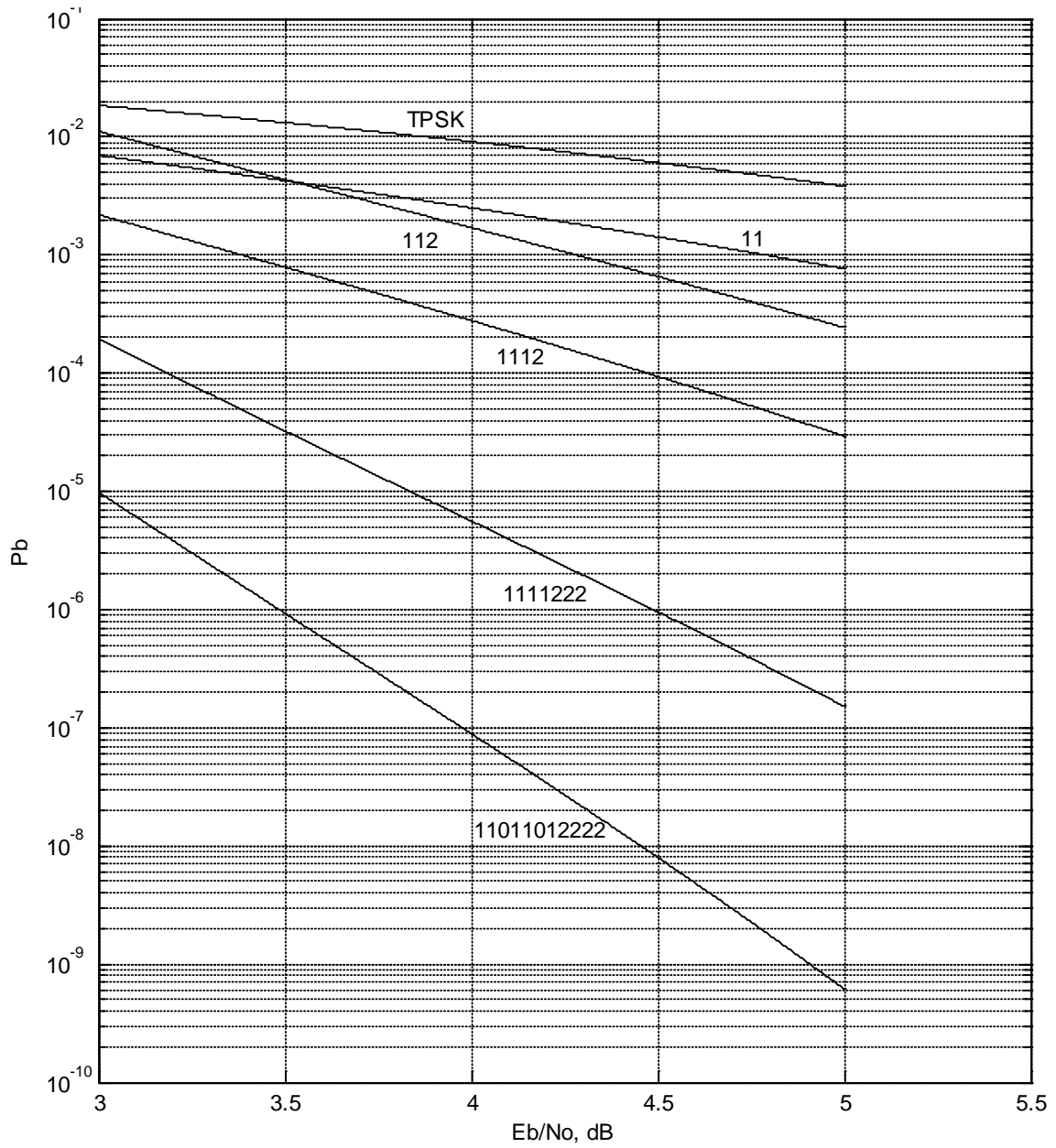


ნახ. 3. ალბათური მახასიათებლები კოდირებული BPSK - თვის

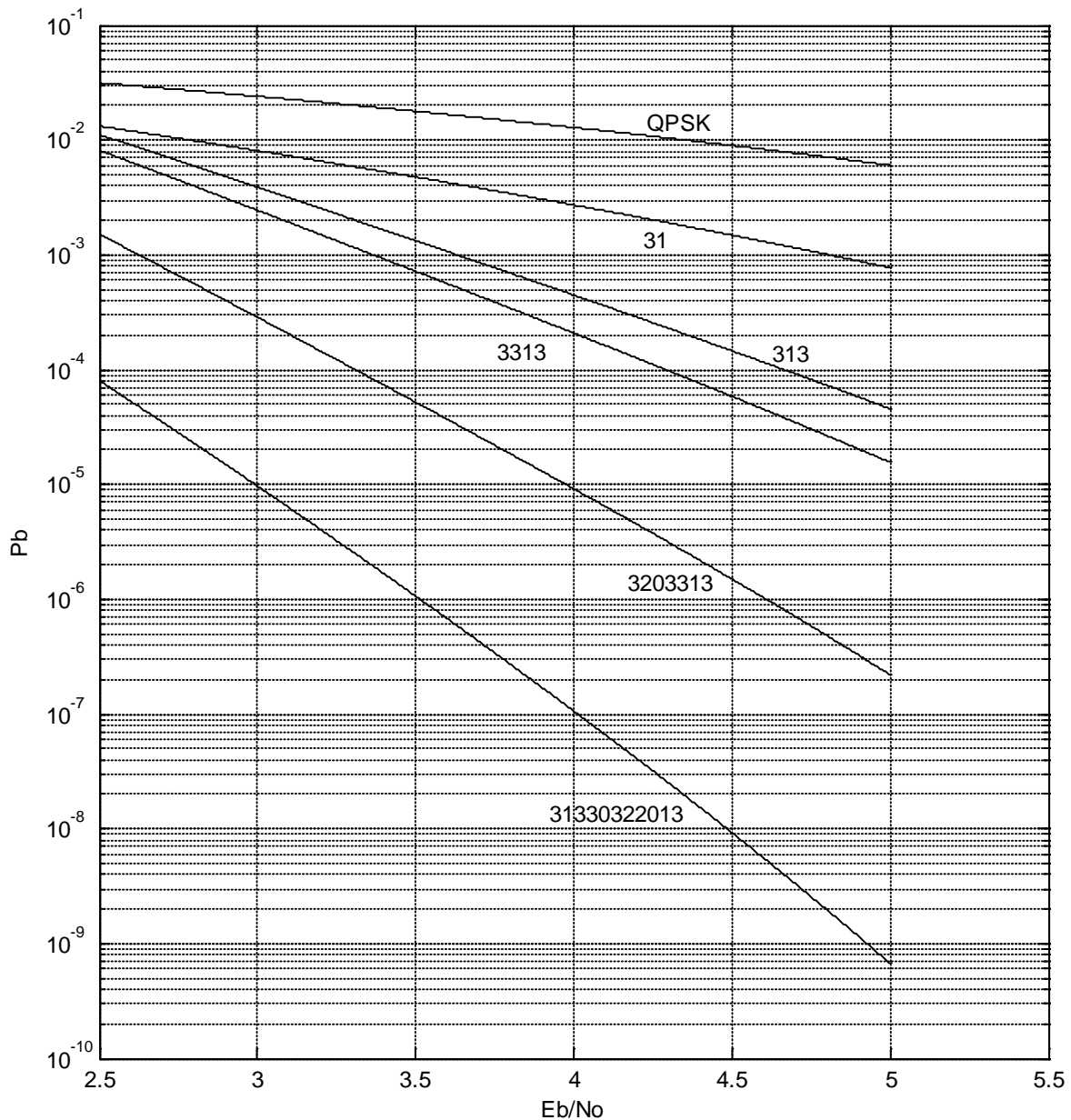
იმის გათვალისწინებით, რომ ჩვენს შემთხვევებში $M=Q$, γ მახასიათებლისთვის გვაქვს: $\gamma(\text{BPSK})=0.5$; $\gamma(\text{TPSK})=\gamma(\text{QPSK})=1$ (ნაიკვისტის სიჩქარე). შესაბამისად P_b -ს ზედა ადიტიური საზღვრებისათვის [5]:

$$P_b \leq (1/\log_2(M)) \sum_{i=1}^n (a_i) Q\{d^2 / 2N_0\}$$

ზემოთ მოყვანილის და იმის გათვალისწინებით, რომ $n=21$ და $Q(x) = 0.5\text{erfc}(x/\sqrt{2})$, გვექნება ქვემოთ, ნახ. 3-5-ზე მოყვანილი შედეგები.



ნახ. 4. ალბათური მახასიათებლები კოდირებული TPSK - თვის



ნახ. 5. ალბათური მახასიათებლები კოდირებული QPSK - თვის

3. დასკვნები

დეიქსტრის ალგორითმის გამოყენებით დამუშავებული პროგრამის საშუალებით განხორციელებულია კომპიუტერული ძებნა ახალი, ალფაბეტური სიჭარბის მქონე მანძილის მიმართ ინვარიანტული, კოდების და ნაპოვნი კოდები ტაბულირებულია. ნაჩვენებია, რომ მოყვანილი ოთხობითი კოდები შეიძლება გამოყენებული იქნან როგორც ორობით სიმეტრიული არხებისთვის, ასევე გაუსის არხებისათვის ორობითი და ოთხობითი ფაზამოდულირებული სიგნალებით. აგებულია სამობითი სიგნალ-კოდური სისტემები სიმპლექსური სიგნალების გამოყენებით. მოყვანილია სისტემათა სიჩქარისა და ალბათური მახასიათებლები, საიდანაც ჩანს, რომ ნაიკვისტის სიჩქარეზე აგებული სისტემებისათვის ენერგეტიკული მოგება არაკოდირებულ ორობით

ფაზამოდულირებულ სიგნალთან შედარებით შეადგენს: შეცდომის ალბათობაზე 10^{-5} 6 დბ-ს, ხოლო 10^{-4} -ზე 5.5 დბ-ს.

დასასრულს შევნიშნავთ, რომ მოყვანილი მიდგომებისა და მეთოდების გამოყენებით სავსებით შესაძლებელია ანალოგიური სისტემების აგება სხვა სიგნალების (მაგ. იხ. [6]) ბაზაზეც.

ლიტერატურა

1. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979.
2. Minieka E. Optimization Algorithms for Networks and Graphs. Marcel Dekker Inc., N. Y., 1978.
3. ნ. უღრელიძე. გისოსისებური კოდების აგება უწყვეტფაზიანი სიხშირე მოდულირებულ სიგნალების ბაზაზე. სადოქტორო დისერტაცია. თბილისი, სტუ, 1994.
4. Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования. М.: Техносфера, 2006.
5. Зюко А. Г. и др. Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации. М.: Радио и связь, 1985.
6. Ugrelidze N.A., Kvikvinia T., Kamkhadze T., Urushadze E. Multi-Amplitude Minimum Shift Keying Signals Designing. IEEE 11-th International Symposium on Electronics and Telecommunications (ISETC '14). Proceedings. Timisoara, Romania, November 14-15, 2014, pp.123-126.

Article received: 2014-09-24