ISSN 1512-1461

UDC: 538.9

ВЕТВЯЩИЕСЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕИИ II- ГО ПОРЯДКА В ФИЗИКЕ. ЧАСТЬ-3

Курдгелаидзе Д. Ф., Курдгелаидзе Д.Д.

Грузинский Технический Университет,Институт Вычислительной Математики им.Мусхелишвили.
Адрес: ул. Костава 75, почтовое отделение 01.

Показано что, в случае неоднородной системы, существуют два типа фазового перехода второго рода, соответствующие двум типам катастрофы в такой системе. В первом случае длина периода периодического решения соответствующего уравнения постоянна и совпадает с длиной кристаллической решетки системы, во втором случае длина периода периодического решения не является постоянной. В первом случае в точке катастрофы ($k_1^2 \to 1$) параметр порядка $\eta=0$, во втором случае $\eta=(\alpha_0 /2\beta_0)\neq 0$. В первом случае в точке катастрофы фазовый переход второго рода имеет место в изолированных точках и в их окрестностях, во втором случае фазовый переход происходит во всей системе. Переход первого типа, когда в точке фазового перехода $\eta=0$, является аналогом фазового перехода второго рода Л.Д.Ландау в случае однородной системы. Переход второго типа, когда в точке фазового перехода $\eta=(\alpha_0 /2\beta_0)\neq 0$, является новым типом фазового перехода второго рода. Фазовый переход этого типа происходит во всей системе одновременно.

Ключевые слова: фазовый переход второго рода, катастрофа, неоднородная среда.

Фазовый переход второго рода в неоднородной системе как катастрофа

Введение

Среди разнообразных явлений физики своими специфическими свойствами выделяются явления катастроф и фазовые переходы. Исторически эти два типа специфических явлении физики были введены в науку независимо друг от друга и определяются по-разному.

Катастрофы возникают в системе, состояние которой характеризуется набором т.н. определяющих параметров. При непрерывном изменении этих параметров в определенном интервале и при достижении одним или несколькими из определяющих параметров критических значений, система скачком переходит в новое состояние. Такой скачкообразный переход указанной системы из одного состояния в другое, как ответная реакция при плавном изменении внешнего воздействия на систему, и называется катастрофой[1].

Фазовые переходы, со своей стороны, имеют место в системе, находящейся в термодинамическом равновесии [2] . При непрерывном изменении термодинамических параметров и при достижении ими определенных критических значений система переходит из одного термодинамического равновесного состояния в другое.

В случае катастрофы ограничение в виде требования термодинамического равновесия отсутствует. Следовательно, определение катастрофы охватывает более широкий круг явлений, чем фазовые переходы в случае термодинамического равновесия. Определение катастрофы можно распространить и на фазовые переходы Применение математических методов теории катастроф к явлению фазовых переходов первого и второго рода расширяет арсенал возможных математических методов исследования этих исключительно важных для

ISSN 1512-1461

физики явлений. В качестве примера в данной работе фазовый переход второго рода рассмотрен как катастрофа.

При применении математического метода теории катастроф в случае фазового перехода второго рода существенным является то, что метод теории катастроф четко фиксирует (предсказывает) точку фазового перехода. Кроме того, он позволяет исследовать фазовый переход как в трехмерной системе, так и в случаях, когда фазовый переход имеет место только в двухмерной или только в одномерной подсистеме трехмерной системы.

§1.Фазовый переход второго рода в неоднородной системе

Рассмотрим фазовый переход второго рода в случае неоднородной системы. При этом предполагается, что неоднородность в системе существует без внешнего поля. В качестве примера рассмотрим высокотемпературный сверхпроводник. Как известно, в случае высокотемпературной сверхпроводимости, область проводимости имеет сложную слоистую структуру, с шириной одного слоя d~(10-30)A°. Соответственно, высокотемпературный сверхпроводник представляет собой неоднородную систему[3]. В случае применения к такой системе т.н. феноменологической теории фазового перехода второго рода Л. Д. Ландау в разложении свободной энергии в ряд по параметру порядка

$\eta=\xi^*\xi$, где ξ и ξ^* - волновые функции носителей тока, должны содержаться градиентные члены, учитывающие неоднородн ость системы. Соответственно будем исходить из выражения свободной энергии

вида[4,5]:

$$F(T,\eta) = F_0-\alpha\, \xi^*\xi+\beta(\xi^*\xi)^2+\gamma(\hbar^2/2m)(\nabla \xi^*)(\nabla\xi), \qquad (1)$$

$$\nabla_n=\partial/\partial x_n, \quad n=1,2,3$$

где α, β и γ - положительные параметры системы, m - масса носителей тока. Экстремум свободной энергии $F(T,\eta)$ реализует любое решение уравнения поля для ξ и ξ^*. При этом уравнение имеет вид

$$(\hbar^2/2m_0)\nabla^2\xi+\alpha\xi-2\beta(\xi^*\xi)\,\xi=0, \quad m_0= m/\gamma \qquad (2)$$

(и такое же уравнение для ξ^*)

Уравнение (2) имеет решения трех типов:1) постоянное решение $\xi_0=0$, $\eta=\xi_0{}^*\xi_0=0$, со свободной энергией $F(\eta)=F_0$, которое реализует симметричную фазу (нормальная проводимость); 2) постоянное решение $\eta=\xi_0{}^*\xi_0=\alpha/2\beta$, со свободной энергией $F(\eta)=F_0-\alpha^2/4\beta$, которое реализует несимметричную фазу (сверхпроводящее состояние) и 3) непостоянные решения.

Указанные постоянные решения существуют как в однородной ($\gamma=0$) так и в неоднородной системе. ($\gamma\neq0$).

В однородной системе, когда эти две фазы, соответствующие постоянным решениям, соприкасаются, и $\alpha=0$ в симметричной фазе, $\alpha\neq0$ в несимметричной фазе, в точке $\eta=\alpha/2\beta=0$ имеет место фазовый переход второго рода (точка фазового перехода второго рода Л. Д .Ландау).

В неоднородной системе, в случае непостоянного решения, как будет показно, также существует два типа решений:

1) решение, в случае которого в точке катастрофы (которая одновременно является и точкой фазового перехода второго рода) $T=T^*$, $\eta=\eta(T^*)=0$ (фазовый переход типа перехода Л.Д. Ландау) и

ISSN 1512-1461

2) решение, в случае которого в точке катастрофы (которая одновременно является и точкой фазового перехода второго рода) $\eta=\eta(T^*)=\alpha/2\beta\neq 0$. Последнее является новым типом фазового перехода второго рода в неоднородной системе.

§2. Непостоянные решения в случае неоднородной системы .

Как уже было сказано, в случае высокотемпературной сверхпроводимости область сверхпроводимости имеет слоистую структуру с шириной одного слоя d ~(10-30)A°. Непостоянные решения уравнения (2), учитывающие указанную периодическую структуру,(рассматривается периодическая структура без границ), будем искать как периодические функции вида

$$\xi=\xi_0\,\varphi(\sigma),\quad \xi^*=\xi_0^*\,\varphi(\sigma),$$
$$\sigma=\omega_n x_n+c_1=\omega(px)+c_1,\qquad n=1,2,3$$
$$\omega_1=\omega p_1,\ \omega_2=\omega p_2,\ ,\ \omega_3=\omega p_3\ ,\ p_1^2+p_2^2+p_3^2=1, \qquad (3)$$

где ξ_0, ξ_0^*=const, c_1 =const, - произвольные постоянные .
Тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}+A\varphi-B\varphi^3=0, \qquad (4)$$
$$A=[2m_0/(\hbar\omega)^2]\alpha,\qquad B=[2m_0/(\hbar\omega)^2]2\beta(\xi_0^*\xi_0)$$

Решения уравнения (4) даются в эллиптических функциях. Нас интересуют действительные решения с действительными параметрами и с определенными свойствами. Интересующее нас решение имеет вид

$$\xi=\xi_0 sn(\sigma)\ ,\ \sigma=\omega(px)+n_1K,\quad n_1=0,1,2,..$$
$$\omega^2=(2m_0/\hbar^2)[\alpha-\beta(\xi_0^*\xi_0)] \qquad (5)$$
$$k_1^2=\beta(\xi_0^*\xi_0)/[\alpha-\beta(\xi_0^*\xi_0)],$$
$$0<k_1^2\leq 1$$

где k_1- модуль эллиптических функции, n_1-число, K- полный эллиптический интеграл первого рода, $sn(\sigma)^2$ имеет период 2K. Длина периода решетки L=(2K/ω), где $L=(p_nL_n)$, L_1- длина периода вдоль оси Ox. Параметр порядка η при этом дается выражением

$$\eta=(\xi_0^*\xi_0)\,sn(\sigma)^2 \qquad (6)$$

Если параметры эллиптических функций действительные, и модуль эллиптических функций $0<k_1^2<1$, то эллиптические функции являются действительными, периодическими и они являются ограниченными функциями, в частности, $0\leq sn(\sigma)^2\leq 1$. При $k_1^2=0$ эллиптические функции переходят в тригонометрические функции, при $k_1^2=1$ - в гиперболические функции.

Момент достижения модулем эллиптических функций значения $k_1^2=1$, приводящего к переходу периодических колебании в апериодические колебания, $[sn(\sigma,k_1^2=1)\rightarrow th(\sigma),\ K\rightarrow\infty]$,будем рассматривать как наступление катастрофы. При этом, как будет показано, в точке $k_1^2=1$ одновременно имеет место фазовый переход второго рода. В точке катастрофы ($k_1^2=1$) для параметров решения имеем:

$$\xi_0^*\xi_0=\alpha(T^*)/2\beta(T^*),$$

ISSN 1512-1461

$\omega^{*\,2}=(\, m_0\alpha(T^*)/\hbar^2)$,
$\hbar\,\omega^*= (m_0\alpha(T^*))^{1/2}$,
$\alpha(T^*)=(\hbar\,\omega^*)^2/ m_0$ (7)
$\sigma^*=\omega^*(px)+ n_1K^*$, $K^*=K(k_1^2\to 1) \to\infty$

где T*- критическая температура фазового перехода второго рода (точка катастрофы), σ* - фаза в момент наступления катастрофы (фазового перехода второго рода). Для параметра порядка $\eta= \xi^*\xi$ при этом имеем:

$$\eta^*= \xi^*(T^*)\xi(T^*)=\xi_0{}^*\xi_0 th(\sigma^*)^2=[\alpha(T^*)/2\beta(T^*)]th(\sigma^*)^2= =.[\alpha(T^*)/2\beta(T^*)]., \quad (8)$$

При этом было учтено, что при $k_1^2 \to 1$,$\sigma^*\to\infty$ и $th(\sigma^*)^2 \to 1$.
Период решения (5) неаналитически зависит от определяющего параметра k_1^2 $(0\le k_1^2\le 1)$. Катастрофа является проявлением этой неаналитической зависимости. Решение (5) описывает состояние среды только в интервале $0\le k_1^2\le 1$ изменения определяющего параметра k_1^2. В результате наступления катастрофы система переходит в качественно новое состояние, которое уже не описывается решением (5). В данном конкретном случае, после катастрофы, новое состояние системы описывается постоянным решением $\eta=\xi^*\xi=\alpha/2\beta$, со свободной энергией $F(\eta)=F_0- \alpha^2/4\beta$. Постоянные решения, с точки зрения теории катастроф, не являются точками фазового перехода второго рода. Однако, постоянные решения $\eta=0$ и $\eta=\xi^*\xi=\alpha/2\beta$ можно рассмотреть как пределы непостоянного решения (5) [6, 7] .

§3. Свободная энергия неоднородной системы

Выражение свободной энергии (1), если в него подставить решение (5), примет вид

$$F(\eta)=F_0 - \alpha\,(\xi_0{}^*\xi_0)\, sn(\sigma)^2 + \beta(\xi_0{}^*\xi_0)^2\, sn(\sigma)^4+ +(\hbar^2/2m_0)\,\omega^2(\xi_0{}^*\xi_0)\,[1-(1+k_1^2)\, sn(\sigma)^2 +k_1^2\, sn(\sigma)^4] \quad (9)$$

Если учесть (5) и из (9) исключить k_1^2 и ω^2, то получаем

$$F(\eta)=F_{01}- \alpha_1(\xi_0{}^*\xi_0)\, sn(\sigma)^2 + \beta_1\xi_0{}^*\xi_0\,)^2\, sn(\sigma)^4 \quad (10)$$

$$F_{01=}\ F_0 +(\hbar^2/2m_0)\,\omega^2(\xi_0{}^*\xi_0)=F_0+\Delta F_{0,} \quad (11)$$
$$\Delta F_0 =\alpha\,(\xi_0{}^*\xi_0) - \beta(\xi_0{}^*\xi_0)^2$$

$$\alpha_1=\alpha +(1+k_1^2)\,(\hbar^2/2m_0)\,\omega^2=2\alpha$$
$$\beta_1=\beta+k_1^2\,(\hbar^2/2m_0)(\omega^2/(\xi_0{}^*\xi_0)) =2\beta \quad (12)$$

Таким образом, имеем

$$F(\eta)=(F_0+ \Delta F_0\,)- 2\alpha\,(\xi_0{}^*\xi_0)\, sn(\sigma)^2 + 2\beta\,(\xi_0{}^*\xi_0\,)^2\, sn(\sigma)^4 \quad (13)$$

В точке катастрофы $k_1^2 =1$ согласно (8) имеем $(\xi_0{}^*\xi_0)=.[\alpha(T^*)/2\beta(T^*)]$,
и получаем

$$F(\eta)^*= F_0 +.\Delta F^* \quad (14)$$
$$\Delta F^*=- [\alpha(T^*)^2/4\beta(T^*)], \quad (15)$$

ISSN 1512-1461

§4. Параметр порядка как функция определяющего параметра

Полученное решение и параметр порядка целесообразно выразить явно через определяющий параметр k_1^2. Для этого воспользуемся соотношением (5), из которого следует

$$(\xi_0^* \xi_0)= (\alpha/ \beta) [k_1^2/(1+k_1^2)],\ \ \omega^2=(\alpha m_0/\hbar^2)[2/(1+k_1^2)] \qquad (16)$$

Таким образом, имеем

$$\xi_0=\exp(i\,\lambda_0)\{\alpha/\beta) [k_1^2/(1+k_1^2)]\}^{1/2},$$
$$\xi_0^*=\exp(-i\,\lambda_0)\{\alpha/ \beta) [k_1^2/(1+k_1^2)]\}^{1/2}\ ,\ \lambda_0=const \qquad (17)$$

Решение и параметр порядка теперь можно записать в виде

$$\xi = \exp(i\,\lambda_0)\{\alpha/\beta) [k_1^2/(1+k_1^2)]\}^{1/2}sn(\sigma)$$
$$\eta=\{(\alpha/\beta)[k_1^2/(1+k_1^2)]\}\ sn(\sigma)^2\ , \qquad (18)$$
$$\sigma= \omega(px)+ n_1K,$$

Как уже было сказано, $sn(\sigma)^2$ - периодическая функция с периодом 2K, т.е. имеем

$$\omega L=2K,\qquad L=p_nL_n \qquad (19)$$

Так как при $k_1^2 \to 1$, $K^*\to\propto$, $\omega^*L^*\to\propto$, то уравнение (19) допускает два возможных варианта решения

1) $K^*(k_1^2\to 1)\to\propto,\ \ \omega^*(k_1^2\to 1)\to\propto,$ (20)
$$L=2K(k_1^2)/\omega(k_1^2)=L\ (k_1^2\to 1)= L_0=cons.,$$
2) $K^*(k_1^2\to 1)\to\propto,\ \ L^*(k_1^2\to 1)\to\propto,$ (21)
$$\omega=2K(k_1^2)/L(k_1^2)=\omega_0(k_1^2\to 1) = \omega_0=cons,$$

Таким образом, в первом случае длина периода решения L_0=cons, и при изменении $k_1^2\to 1$ меняется пространственная частота
$\omega^*(k_1^2\to 1) \to\propto$.
Во втором случае пространственная частота ω_0=cons. и при изменении $k_1^2\to 1$ меняется длина периода решения
$L^*(k_1^2\to 1) \to\propto$.
Случаи (20) и (21) определяют два типа возможных решений (18), соответствующие двум разным возможным подборам параметров непостоянного решения, т.е. получаем ветвящееся решение нелинейного уравнения (4) с двумя ветвями (20) и (21). Последние определяют два возможных состояния среды, в которой происходит катастрофа (фазовые переходы второго рода) вследствие перехода системы из одного состояния в другое, и этот переход имеет вид катастрофы.

§5. Решение с постоянной кристаллической решеткой

Рассмотрим решение (18) в случае постоянной длины периода решения L_0 определенное выражением (20). В этом случае длину периода решения можно прямо отождествить с

ISSN 1512-1461

длиной кристаллической решетки среды L_0. Согласно (7), в точке катастрофы для параметра α имеем

$$\alpha(T^*)= (\hbar^2/ m_0)\, \omega^{*2}= \alpha_0[2K(k_1^2)]^2, \quad \alpha_0=(\hbar^2/L_0^2 m_0), \qquad (22)$$

Для того, чтобы свободная энергия в точке катастрофы не имела особенности, необходимо потребовать конечность $\overline{\Delta}F$, определенной выражением (15). В таком случае $\beta(T^*)$ должно иметь вид

$$\beta(T^*)=\beta_0 [2K(k_1^2)]^4, \quad \beta_0 = \text{cons.}, \qquad (23)$$

Для параметра порядка при этом находим

$$\eta(T^*)=(\alpha/2\beta)= (\alpha_0/2\beta_0) [2K(k_1^2)]^{-2} \qquad (24)$$

Решение (18) теперь можно записать в виде

$$\xi = \exp(i\, \lambda_0)\{ (\alpha_0/\beta_0) [2K(k_1^2)]^{-2} [k_1^2/(1+k_1^2)]\}^{1/2}\mathrm{sn}(\sigma) \qquad (25)$$
$$\eta=\{(\alpha_0/\beta_0) [2K(k_1^2)]^{-2}[k_1^2/(1+k_1^2)]\}\, \mathrm{sn}(\sigma)^2 ,$$
$$\sigma= \omega(px)+ n_1K =[2/(1+k_1^2)]^{1/2}(p(x/L_0))+(n_1/2)]2\, K$$
$$\omega^2=[2 /L_0^2(1+k_1^2)]\, [2K(k_1^2)]^2$$

Так как

$$\lim 2K(k_1^2\to1)= -\ln [(1- k_1^2)/16], \qquad (26)$$

то для параметра порядка $\eta(T^*)$ в точке катастрофы (фазового перехода второго рода) находим: **(смотрите математическое приложение 1),**

$$\eta(T^*)= (\alpha_0/2\beta_0)\, \mathrm{sn}(\sigma^*)^2 \{\ln [(1-k_1^2)/16] \}^{-2} \to 0 \qquad (27)$$

Аналогично имеем и для других параметров задачи

$$\omega^* =- L_0^{-1}\ln [(1- k_1^2)/16]$$
$$\sigma^*= \omega(px)+ n_1K =[(p(x/L_0))+(n_1/2)][-\ln [(1- k_1^2)/16]], \qquad (28)$$
$$\alpha(T^*)= \alpha_0\{-\ln [(1- k_1^2)/16] \}^2 \qquad (29)$$
$$\beta(T^*)= \beta_0 [-\ln [(1- k_1^2)/16]^4 \qquad (30)$$

Как видим, параметр порядка $\eta(T)$ в точке катастрофы (фазового перехода второго рода), $\eta(T^*)=\to0$. Следовательно, в данном случае имеем дело с фазовым переходом второго рода типа перехода Л. Д. Ландау. В частности, выражение свободной энергии (13) теперь можно записать в виде

$$F(\eta)= (F_0+ \Delta F_0)- 2\alpha\ \eta + 2\beta\ \eta^2 = \qquad (31)$$
$$=(F_0+\Delta F_0)-(2\alpha_0^2 /\beta_0)\{\varphi(\kappa_1)\ \mathrm{sn}(\sigma)^2 -\varphi(\kappa_1)^2\, \mathrm{sn}(\sigma)^4\}$$

$$\Delta F_0 = (\alpha_0^2 /\beta_0)(\varphi(\kappa_1) - \varphi(\kappa_1)^2), \qquad (32)$$
$$\varphi(\kappa)= k_1^2/(1+k_1^2),$$
$$\eta =\{(\alpha_0/ \beta_0)[k_1^2/(1+k_1^2)]\}\, [2K(k_1^2)]^{-2}\, \mathrm{sn}(\sigma)^2$$

ISSN 1512-1461

или в окончательном виде

$F(\eta)= F_0+(2\alpha_0^2/\beta_0)[(1/2)(\varphi(\kappa_1)-\varphi(\kappa_1)^2)-\eta_0+\eta_0^2]$ (33)

$\eta_0= \varphi(\kappa_1)\, sn(\sigma)^2\leq 1$
$\sigma= [(2/1+k_1^2)^{1/2}(p(x/L_0))+(n_1/2)]2K$ (34)

В точке катастрофы ($k_1^2=1$) имеем

$F(\eta)^*= F_0-(\alpha_0^2/4\beta_0)$ (35)
$\eta^*=0$
Как видим, $F(\eta)$ - непрерывная функция в точке катастрофы (фазового перехода второго рода). Кроме того, первая производная $F(\eta)$ по k_1^2 в точке катастрофы обращается в нули **(смотрите математическое приложение 2).**
Если свободную энергию представить в виде ряда

$F=\sum_0^\infty A_n \eta^n=\sum_0^\infty A_n\eta_0^n [2K(k_1^2)]^{-n}$, η_0=const.<1 (36)

то коэффициенты A_n должны иметь вид

$A_n = A_n^0[2K(k_1^2)]^n$, A_n^0 = cons. (37)
где A_n^0 = cons.

При этом на коэффициенты A_n^0 будут наложены условия сходимости ряда

$F= \sum_0^\infty A_n^0\eta_0^n$ (38)

§6. Решение с постоянной пространственной частотой .

Рассмотрим теперь решение (18) в случае условия (21), когда при $k_1^2\rightarrow 1$ пространственная частота ω^* остается постоянной. В этом случае имеем

$\alpha(T^*)=(\hbar^2/m_0)\,\omega^{*2}=\alpha^0$=const. (39)
$\beta(T^*)\,\eta(T^*)= \alpha^0/2$=const.

В принципе $\beta(T^*)$ и $\eta(T^*)$ могут иметь вид

$\beta(T^*)=\beta^0 f(k_1^2)$, $\eta(T^*)=\eta^0 f(k_1^2)^{-1}$,
где β^0 =cons., η^0=cons.

где $f(k_1^2)$ -произвольная функция. Однако, требование конечности
$\Delta F=-.[\alpha(T^*)^2/4\beta(T^*)]$ дает $f(k_1^2)=1$, и находим

$\alpha(T^*) =\alpha^0$, $\beta(T^*)=\beta^0$, (40)
$\eta(T^*)= \alpha^0/2\beta^0$ = cons.$\neq 0$

Как видим, в данном случае, имеем дело с фазовым переходом второго рода нового типа, отличного от фазового перехода второго рода типа перехода Л. Д. Ландау, когда в точке фазового перехода параметр порядка $\eta(T^*)=0$. В данном случае в точке фазового перехода параметр порядка $\eta(T^*)= \alpha^0/2\beta^0$ =cons$\neq 0$

ISSN 1512-1461

Решение (18) в случае (21) примет вид

$$\xi = \exp(i\,\lambda_0)\{(\alpha^0/\beta^0)\,[k_1{}^2/(1+k_1{}^2)]\}^{1/2}\mathrm{sn}(\sigma)$$
$$\eta=\{(\alpha^0/\beta^0)[k_1{}^2/(1+k_1{}^2)]\}\,\mathrm{sn}(\sigma)^2\,,$$
$$\sigma= \omega(px)+ n_1K,= \{(\alpha^0 m_0/\,\hbar^2)[\,2/(1+k_1{}^2)]\}^{1/2}\,(px)+ n_1K \qquad (41)$$
$$\omega^2= \omega^{*2}[2/(1+k_1{}^2)]$$
$$0\le\eta/\eta^* = [\,2k_1{}^2/(1+k_1{}^2)]\;\mathrm{sn}(\sigma)^2\le 1, \quad \eta^*=(\alpha^0/2\beta^0), \quad (\hbar\,\omega^*)^2=\alpha^0 m_0$$

Так как ω^* - произвольная постоянная, то представим ее в виде

$$\omega^* = 2\pi/L_0{}^0$$

где $L_0{}^0$ - произвольный параметр размерности длины.
В точке фазового перехода имеем

$$\sigma^*=2\pi\,(p(x/L^0{}_0))-(n_1/2)\ln\,[(1- k_1{}^2)/16], \qquad (42)$$
$$\omega^* = 2\pi/L_0{}^0\;\;,$$
$$(h/\,L_0{}^0)= (m_0\,\alpha^0\,)^{1/2} \qquad (43)$$
$$\eta^*=(\alpha^0/2\beta^0)$$

Из определения длины периода решения $L=[(2\,K)/\,\omega]$ находим

$$L^*/(L_0{}^0)=\{-\ln\,[(1- k_1{}^2)/16]\}, \qquad (44)$$

где L^* -длина периода решения в момент фазового перехода $k_1{}^2\to 1$
В случае (21) выражение свободной энергии (13) примет вид

$$F(\eta)=F_0+\Delta\,F_0- 2\alpha\,\eta\,+2\beta\;\eta^2 \qquad (45)$$
$$\Delta\,F_0= ((\alpha^0)^2/\beta^0)[\,(\varphi(\kappa)- \varphi(\kappa)^2)]$$

$$\eta= ((\alpha^0)^2/\beta^0)\varphi(\kappa)\,\mathrm{sn}(\sigma)^2=((\alpha^0)^2/\beta_0)\eta_0 \qquad (46)$$
$$\eta_0= \varphi(\kappa)\,\mathrm{sn}(\sigma)^2,$$
$$\sigma=\{(2m_0/\hbar^2)[\alpha^0/(1+k_1{}^2)]\}^{1/2}\,(px)+ n_1K$$

Выражение свободной энергии (45) удобно представить в виде

$$F(\,\eta_0)= F_0+ 2((\alpha^0)^2/\beta^0)[(1/2)(\varphi(\kappa)-\varphi(\kappa)^2\,)-\eta_0+ \eta^2{}_0\,], \qquad (47)$$
где
$$\eta_0= \varphi(\kappa)\,\mathrm{sn}(\sigma)^2\le 1$$
$$\varphi(\kappa)=k_1{}^2/(1+k_1{}^2) \qquad (48)$$

В точке катастрофы ($k_1{}^2=1$), в случае (21) имеем

$$F(\,\eta)^*= F_0-((\alpha^0)^2/4\beta^0) \qquad (35')$$
$$\eta^*=(\alpha^0/2\beta^0)\neq 0$$

Как видим, выражения $F(\eta_0)$ в виде (33)и (47), соответствующие случаям (20) и (21), по виду совпадают, однако, они отличаются по существу. Отличие возникает из за того, что выражения для фазы σ. в случае (20)($\sigma.=\sigma_1$) и (21)($\sigma.=\sigma_2$) имеют соответственно вид (34) и (41), где

ISSN 1512-1461

$\sigma_1= [(2/1+k_1^2)^{1/2}(p\, x/L_0)+(n_1/2)]2\, K$ (34)
$\sigma_2=([2/(1+k_1^2)]^{1/2}\ 2\pi(px/\ L_0^0)+ n_1 K$ (41)

Как видим, в точке x=0 обе фазы совпадают

$\sigma_1(0)=\sigma_2(0)=([2/(1+k_1^2)]^{1/2}\ n_1 K$,

И, соответственно, совпадают и выражения свободной энергии.
Выражение свободной энергии (47), как и (33), в точке катастрофы - непрерывная функция k_1^2, кроме того, первая производная свободной энергии по k_1^2 в точке катастрофы, как уже было сказано, обращается в нуль. Покажем теперь, что вторая производная свободной энергии в точке катастрофы по k_1^2 имеет особенности.

§7. Теплоемкость C_p (T) в точке катастрофы -T*

Теплоемкость Cp, как известно, определяется выражением

$C_p= - T(d^2F/dT^2)$ (49)

где F(η_0) дается выражением (33)(или (47). Переменным параметром в данном случае является k_1^2 и предполагается, что $k_1^2= k_1^2(T)$ - аналитическая функция. Следовательно, имеем

$d/dT=(d/d\, k_1^2)(d\, k_1^2/dT)$ (50)
$(d^2F/dT^2) =(d^2F/(d\, k_1^2)^2)\ (d\, k_1^2/dT)^2+(d\, F/(d\, k_1^2)\ ((d\, k_1^2)^2/dT^2)$

Ввиду того, что в точке катастрофы (фазового перехода второго рода) первая производная $(d\, F/(d\, k_1^2)^*=0$ (**см. приложение 3**), получаем

$(d^2F/dT^2)^* =(d^2F/(d\, k_1^2)^2)^*\ (d\, k_1^2/dT)^2$ (51)

Поскольку $(d\, k_1^2/dT)^2$ -аналитическая функция температуры, то далее будем вычислять величину

$C_p^0= C_p/T(d\, k_1^2/dT)^2=(d^2F/(d\, k_1^2)^2)^*$ (52)

Учитывая (33) и (47), C_p^0 можно представить в виде

$C_p^0=(2\alpha_0^2/\beta_0)\{(1/2)\ [(1-2\varphi(\kappa))\ \varphi(\kappa)''- [\varphi(\kappa)']^2]-$
$-(1-2\eta_0)\ \eta_0''+2(\eta_0')^2\}$ (53)

В результате вычисления (см. приложение 3) находим

$C_p^0=(4\,\alpha_0^2/\beta_0)\{-1/16+[1/4+ch(\sigma^*)^{-2}(d\,\sigma/d\, k_1^2)^*]^2\}=$

$=(2\alpha_0^2/\beta_0)\{1/16+ch(\sigma^*)^{-2}(d\,\sigma/d\, k_1^2)^*+2ch(\sigma^*)^{-4}(d\,\sigma/d\, k_1^2)^{2*}\}$ (54)

Как уже было сказано, между формализмом фазового перехода второго рода типа перехода Л. Д. Ландау, соответствующего случаю (20), когда в точке фазового перехода $\eta(T^*)= 0$ и новым типом фазового перехода второго рода, соответствующим случаю (21), когда в точке фазового перехода $\eta(T^*)=\alpha_0/2\beta_0 = cons\neq0$, отличие состоит в том, что фазы σ

ISSN 1512-1461

периодического решения, соответствующие этим двум типам перехода, разные,в частности, они имеют вид (34) и (42) соответственно. В точке px=0,как уже было сказано, обе эти фазы совпадают

$$\sigma_1(0)=\sigma_2(0)=\sigma_0(0)=n_1K \qquad (55)$$

В результате вычисления **(см .приложение 4)** в случае фазового перехода типа перехода Л.Д. Ландау (в случае (20)) получаем

$$C_p^0/(2\alpha_0^2/\beta_0)=$$
$$=\{4[(1-k_1^2)/16]^{[2p(x/L_0)+n_1]}\{[(p/4)(x/L_0)\ln[(1-k_1^2)/16]+$$
$$+[p(x/L_0)+n_1/2][(1-k_1^2)^{-1}+(1/2)\ln[(1-k_1^2)/16]\}+$$
$$+32[(1-k_1^2)/16]^{[4p(x/L_0)+2n_1]}\{\{[(p/4)(x/L_0)\ln[(1-k_1^2)/16]\}^2+$$
$$\{[p(x/L_0)+n_1/2][(1-k_1^2)^{-1}+(1/2)\ln[(1-k_1^2)/16]\}^2+$$
$$2\{[(p/4)(x/L_0)\ln[(1-k_1^2)/16]\,[p(x/L_0)+n_1/2][(1-k_1^2)^{-1}+$$
$$+(1/2)\ln[(1-k_1^2)/16]\}\} \qquad (56)$$

Наличие координатной зависимости в выражении C_p^0 осложняет анализ предельного перехода ($\lim k_1^2\to 1$), и поэтому ограничимся анализом выражения в точке x=0. Находим

$$C_p^0/2\alpha_0^2/\beta_0)=$$
$$=\{2n_1[(1-k_1^2)/16]^{n_1}(1-k_1^2)^{-1}+$$
$$+32[(1-k_1^2)/16]^{2n_1}\{\{(n_1/2)^2[(1-k_1^2)^{-2}+(1-k_1^2)^{-1}\ln[(1-k_1^2)/16]\} \qquad (57)$$

Из этого выражения следует, что особенности в C_p^0 в точке катастрофы ($\lim k_1^2\to 1$) возникают только при $n_1=1/2$, и находим:

$$C_p^0=(\alpha_0^2/4\beta_0)\{2(1-k_1^2)^{-1/2}+(1-k_1^2)^{-1}+\ln[(1-k_1^2)/16]\} \qquad (58)$$

Аналогично, в случае (21) в точке катастрофы для σ* имеем:

$$\sigma^*=p(x/L^0{}_0)-(n_1/2)\ln[(1-k_1^2)/16], \qquad (59)$$

где

$$L_0^0=(m_0\alpha^0/\hbar^2)^{-1/2}$$

в результате вычисления(см. приложение 5) получаем

$$C_p^0/2((\alpha^0)^2/\beta^0)=$$
$$=4[(1-k_1^2)/16]^{n_1}\{-L_0^{0-1}(px)/4+n_1/2[(1-k_1^2)^{-1}+(1/2)\ln[(1-k_1^2)/16]]$$
$$\exp[-2(m_0\alpha^0/\hbar^2)^{1/2}(px)]$$
$$+32[(1-k_1^2)/16]^{2n_1}\{-L_0^{0-1}(px)/4+n_1/2[(1-k_1^2)^{-1}+(1/2)\ln[(1-k_1^2)/16]]\}^2$$
$$\exp[-4(m_0\alpha^0/\hbar^2)^{1/2}(px)], \qquad (60)$$

Особенности в C_p^0 возникают только при $n_1=1/2$, и находим

$$C_p^0/2((\alpha^0)^2/\beta^0)=$$
$$=(1/4)[(1-k_1^2)^{-1/2}]\exp[-2(m_0\alpha_0/\hbar^2)^{1/2}(px)]+ \qquad (61)$$
$$+(1/2)[-L_0^{0-1}(px)+1/2)]^2[(1-k_1^2)^{-1}+\ln[(1-k_1^2)/16]\exp[-4(m_0\alpha^0/\hbar^2)^{1/2}(px)]$$

ISSN 1512-1461

В частности, в точке x=0 получаем выражение (58). Таким образом, в точке x=0 поведение C_p^0 дается выражением (58) как для перехода типа перехода Л.Д.Ландау с $\eta(T^*)=0$, так и для перехода нового типа с $\eta(T^*)=\alpha_0/2\beta_0$ = cons≠0.

В случае $x\neq0$ поведение C_p^0 в указанных двух случаях существенно отличается. В случае перехода типа Л.Д Ландау (случай (20)) особенности в C_p^0 возникают только при условии

$$[p(x/L_0)+ n_1/2]\leq 1/2, \quad n_1>0 \qquad (62)$$

В случае перехода нового типа (случай (21)) при n=1/2 особенности в C_p^0 возникают при всех значениях x, однако, согласно (61), соответствующие коэффициенты будут зависеть от координат. Как видим, теплоемкость в точке фазового перехода имеет особенности трех типов: полюсы порядка 1/2 и 1 и логарифмическую расходимость. Таким образом, точка катастрофы одновременно является точкой фазового перехода второго рода.

§ 8. Могут ли существовать оба типа фазового перехода в одной системе ?

Решения (25) и (41), соответствующие указанным выше двум типам фазового перехода второго рода (20) и (21), обозначим соответственно через ψ_L и $\psi_к$. Кроме того, решение ξ в выражении свободной
энергии (1) представим в виде

$$\xi =\psi_к +i\psi_L, \text{ и } \xi^* =\psi_к -i\psi_L \qquad (63)$$

где ψ_L и $\psi_к$ - действительные функции. Тогда F можно записать в виде

$$F =\{F_0 - \alpha\, \psi_к^2 + \beta\, (\psi_к^2)^2+ \gamma(\hbar^2/2m)\, (\nabla\psi_к)^2\}- \\ +\{-(\alpha-2\beta\psi_к^2)\, \psi_L^2 + \beta\, (\psi_L^2)^2+ \gamma(\hbar^2/2m)\, (\nabla\psi_L)^2 \} \qquad (64)$$

Предположим теперь, что в системе с решением $\psi_к$ катастрофа наступает раньше, чем в системе с решением ψ_L , т.е. температура фазового перехода в случае перехода нового типа выше, чем в случае перехода типа Л.Д. Ландау. Тогда, если в (64) подставить значение $\psi_к$ в точке катастрофы $\psi_к^2=\alpha_0/2\beta_0$, находим

$$F =\{(F_0 -\alpha_0/2\beta_0)+ \beta\, (\psi_L^2)^2+ (\hbar^2/2\, m_0)\, (\nabla\psi_L)^2 \} \qquad (65)$$

где $m_0= m/\gamma$

Однако, решение уравнения ψ_L , которое следует из (65)

$$(\hbar^2/2m_0)\nabla^2\psi_L -2\beta(\psi_L\, \psi_L)\psi_L =0, \qquad (66)$$

не приводит к катастрофе.

Таким образом, если в системе имеет место фазовый переход нового типа, то в такой системе переход типа Л .Ландау не может иметь места. Такое заключение очевидно и из того, что фазовый переход нового типа происходит во всем пространстве одновременно, и, следовательно, не остается свободного места для возможности перехода типа Л. Д. Ландау.

Положим теперь, что температура фазового перехода в системе с решением ψ_L наступает раньше, чем в системе с решением $\psi_к$. Тогда, если в (64) подставить значение ψ_L в точке катастрофы $\psi_L=0$, возвращаемся к исходному выражению (1):

ISSN 1512-1461

$$F = \{F_0 - \alpha\, \psi_к^2 + \beta\, (\psi_к^2)^2 + \gamma(\hbar^2/2m)\, (\nabla\psi_к)^2\} \qquad (67)$$

Таким образом, после фазового перехода типа перехода .Л.Д Ландау, возможен еще и переход нового типа с $\eta(T^*)=\alpha_0/2\beta_0 = cons\neq 0$. Все это легко понять, если учесть, что фазовый переход типа перехода Л Д. Ландау в неоднородной системе имеет место только в изолированных точках. Следовательно, после фазового перехода типа перехода Л Д Ландау, основная среда не будет находиться в сверхпроводящем состоянии. Соответственно, при выполнении условия катастрофы для фазового перехода нового типа, такой фазовый переход непременно произойдет, притом произойдет одновременно во всем пространстве, оставшемся свободным после перехода типа перехода Л.Д. Ландау.

§9. Динамика (по температуре) фазового перехода второго рода.

Полученные решения, как уже было сказано, являются функцией т.н. определяющего параметра k_1^2 -в нашем случае модуля эллиптических функции. Со своей стороны, k_1^2, по содержанию задачи, является функцией температуры Т. Таким образом, в интервале изменения $0\leq k_1^2\leq 1$ можно проследить динамику (по температуре) фазового перехода второго рода. Рассмотрим случаи (20) и (21) в отдельности.

А) Динамика (по температуре) фазового перехода второго рода в случае перехода типа перехода Л. Д. Ландау

Решение в этом случае дается выражением (25). Ограничимся здесь анализом выражений для параметра порядка η и свободной энергии системы. Параметр порядка η дается согласно (25) и (26), кроме того, учтем, что фазовый переход второго рода рассматриваемого типа, как было показано, имеет место только в окрестности x=0 и при условии

$$n_1=1/2\ ,\ \sigma=K/2$$
$$sn(K/2)^2=1/[1+(1-k_1^2)^{1/2}] \qquad (68)$$

Тогда η(x=0) можно записать в виде

$$\eta(x=0) / \eta^* = 2k_1^2 /(\{(1+k_1^2)\,[1+(1-k_1^2)^{1/2}]\}\{\ln[(1-k_1^2)/16]\}^{-2}) \qquad (69)$$

где

$$\eta^* = (\alpha_0/2\beta_0)$$

Как видим, когда k_1^2 меняется в интервале$0<k_1^2<1$, параметр порядка η(x=0) меняется также в интервале $0<\eta(0)/(\alpha_0/\beta_0)<1$. При этом η=0 только при $k_1^2=0$ и $k_1^2=1$. Из этих двух точек только при $k_1^2=1$ имеет место катастрофа - фазовый переход второго рода. Кривая (69) приведена на рисунке 1.

ISSN 1512-1461

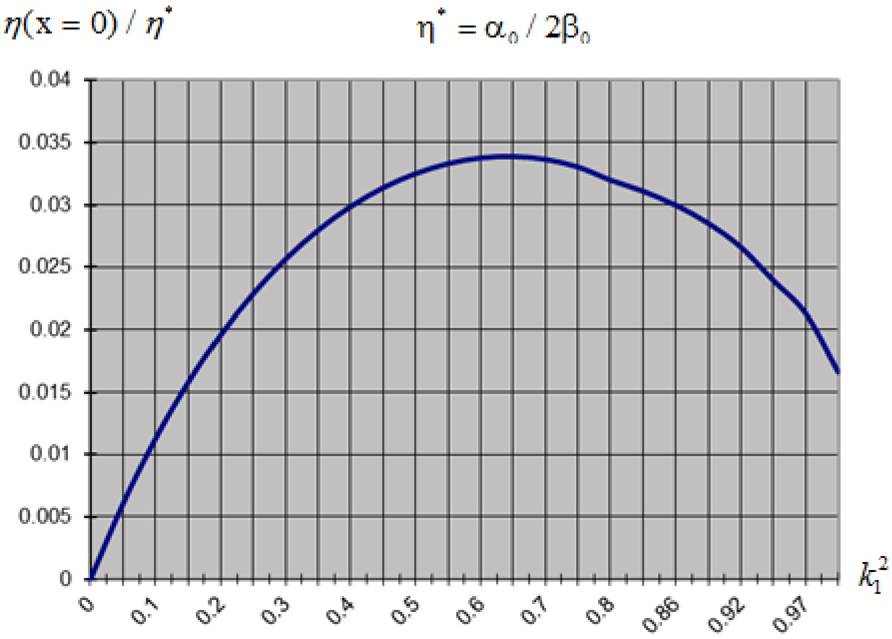


Рис.1 Параметр порядка $\eta(x=0)/\eta^*$, как функция k_1^2 (согласно (69))

Выражение свободной энергии, определенное соотношением (33) и (34) зависит от координат x и, как уже было сказано, фазовый переход второго рода в данном случае имеет место только при x=0. В точке x=0 это выражение имеет вид

$$F(x=0)-F_0]/(\alpha_0{}^2/4\beta_0)=8\{[\varphi(к)-\varphi^2(к)]/2-\varphi(к)f(к)+\varphi^2(к)f^2(к)\}, \quad (70)$$

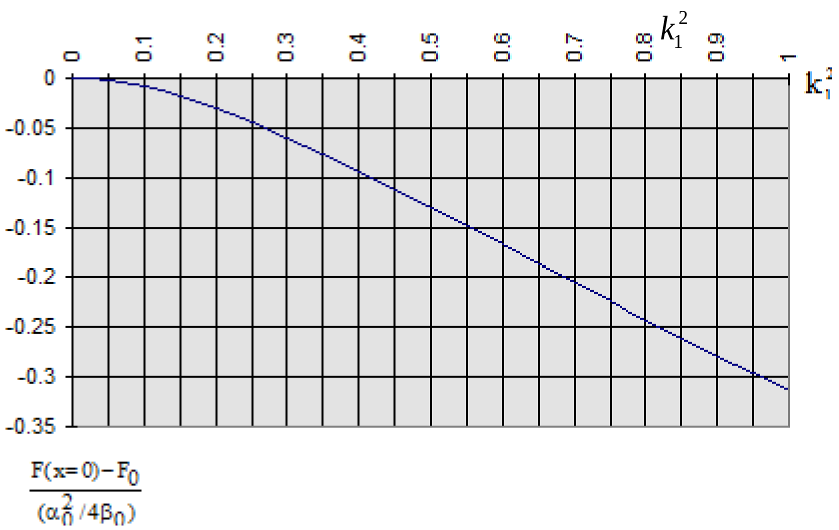
где

$$\varphi(к)= k_1{}^2/(1+k_1{}^2)\ ., \ f(к)=1/[1+(1+k_1{}^2)^{1/2}] \quad (71)$$

где было учтено, что

$$\eta_0= \varphi(к)\ sn(K/2)^2 =\varphi(к)\ f(к) \quad (72)$$

Кривая свободной энергии (70) приведена на рисунке 2



ISSN 1512-1461

Рис. 2 Свободная энергия, как функция k_1^2, (согласно (70)) в случае фазового перехода второго рода для обеих типов

B)Динамика (по температуре) фазового перехода второго рода в случае перехода нового типа

Решение соответствующе данному типу перехода дается выражением (41).При этом для параметра порядка имеем

η (x)/η*= $[2k_1^2/(1+k_1^2)]\}$ $sn(\sigma)^2$ (41)

$\eta^*=(\alpha_0/2\beta_0)$ (44)

Как было показано, фазовый переход второго рода данного типа имеет место при любом значении x, но только при значении n_1=1/2 и при выполнении условий катастрофы k_1^2=1, η/η^*=1. Для $sn(\sigma)^2$ при x=0 и n_1=1/2 имеем значение (68). В результате для η/η^* получаем

$\eta(x=0)/\eta^*= [2k_1^2/(1+k_1^2)]\,[1+(1-k_1^2)^{1/2}] =\varphi(к)\, f\,(к)$ (73)

Кривая (73) приведена на рисунке 3.

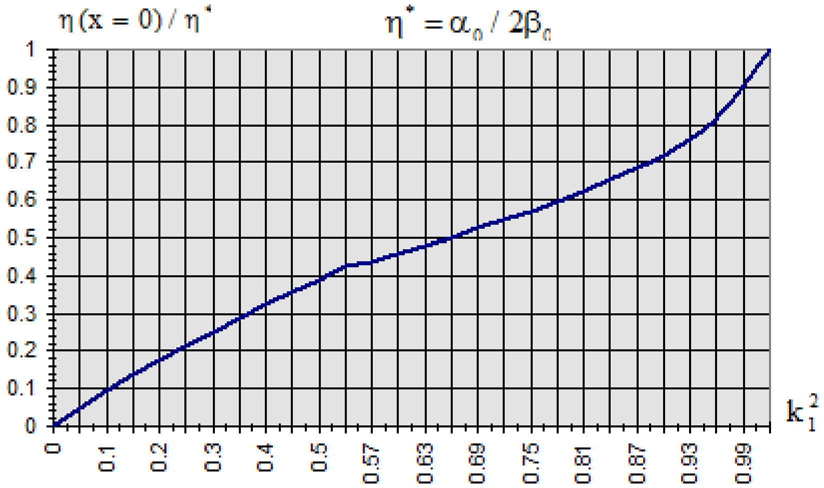


Рис. 3 Параметр порядка $\eta(x=0)/\eta^*$, как функция k_1^2 (согласно (73)) в случае фазового перехода второго рода нового типа.

Как видим, когда k_1^2 меняется в интервале $0\le k_1^2\le 1$, параметр порядка η/η^* также меняется в интервале $0\le\eta(0)\le 1$. При этом функция (69) получается путем перемножения функции (73) на обращающуюся в нули при k_1^2=1 функцию $[\ln(1- k_1^2)/16]^{-2}$.Таким образом, параметр порядка (73) является амплитудой параметра порядка (69)

$(\eta(0)/\eta^*)_{\text{типа Ландау}} =(\eta(0)/\eta^*)_{\text{новый тип}}\ \{\ln[(1-k_1^2)/16]\}^{-2}$ (74)

Как видим, представление теории Л. Д. Ландау в случае однородной системы о том, что фазовый переход второго рода происходит как только в системе возникают куперовские пары, в случае неоднородной системы не является верным. В данном случае, для описания явления возникновения сверхпроводимости в неоднородной системе больше подходит представление, согласно которому возникновение сверхпроводимости в системе является

ISSN 1512-1461

результатом конденсации в системе бозе-газа куперовских пар с переходом в сверхтекучее состояние. В таком случае, начиная с температуры $T=T^0$ начинается возникновение системы бозе-газа куперовских пар, который в точке $T=T^*$ переходит в бозе-конденсат и в сверхпроводнике реализует сверхпроводящее состояние. Как известно, в случае высокотемпературной сверхпроводимости (в неоднородной системе) длины когерентности куперовских пар малы, и такое представление становится правомерным.

§10. Примеры явной температурной зависимости $k_1^2= k_1^2(T)$

Обозначим через T_0 значение температуры, соответствующее $k_1^2(T_0)=0$ (при $\eta(T_0)=0$) и через T^* - соответствующее $k_1^2(T^*)=1$. В качестве примера явной температурной зависимости $k_1^2= k_1^2(T)$ в области $T_0 \geq T \geq T^*$ зададим функцию $k_1^2(T)$ в виде

$$k_1^2=(T_0 - T)/(T_0- T^*), \quad T_0\geq T \geq T^* \qquad (75)$$

Кривая (75) приведена на рисунке 4.

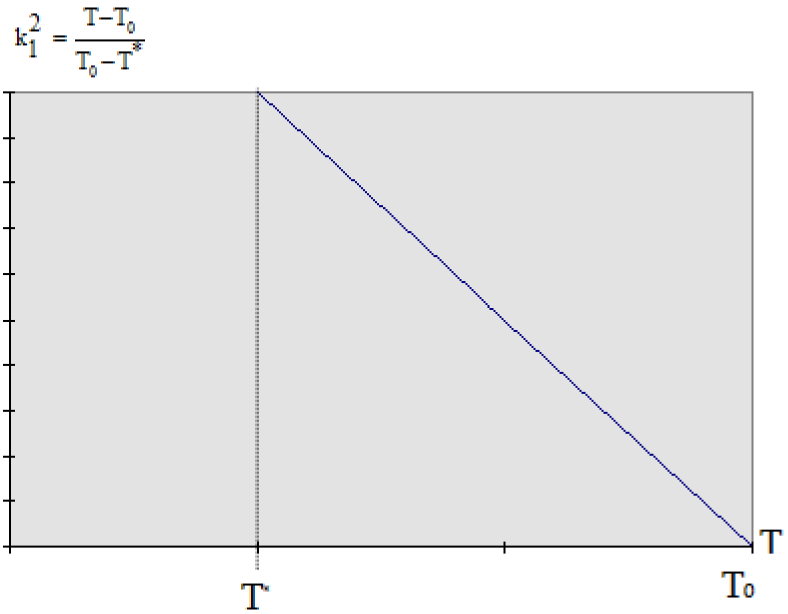


Рис.4 Модуль эллиптических функций k_1^2, как функция температуры

Для других параметров теории имеем

$$(1- k_1^2)=(T-T^*)/(T_0- T^*),$$
$$\varphi(\kappa)= (T_0 - T)(T_0- T^*) /(2T_0- T^*-T) \qquad (76)$$
$$sn(K/2)^2=f\ (\kappa)=\{1+[1-(T_0 - T)/(T_0- T^*)]^{1/2}\}^{-1},$$

Тогда для параметров порядка $(\eta_0)_{Landau}$ и $(\eta_0)_{Нового}$ в точке x=0 находим

$$(\eta_0)_{Landau} =(\eta_0)_{Нового} \{\ln[(1-k_1^2)/16]\}^{-2} \qquad (77)$$

ISSN 1512-1461

$(\eta_0)_{Нового}=(\alpha^0/\beta^0)\{(T_0-T)/(2T_0-T^*-T)\}\{1+[1-(T_0-T)/(T_0-T^*)]^{1/2}\}^{-1}$,

Подставляя эти значения в выражения (33) для $F(\eta)$ и (53) для $C_p(\eta)^*$, получим соответствующую температурную зависимость. В частности, для $C_p(T,T^*)^*$имеем

$$C_p(T,T_1)^* =(\alpha_0^2/4\beta_0 T_1)\{2[(T-T_1)/(T_0-T_1)]^{-1/2}+[(T-T_1)/(T_0-T_1)]^{-1}+ +\ln[((T-T_1)/(T_0-T_1)]/16], \quad (78)$$

Аналитическое построение кривых (77)и (70) требует задания параметров T^* и T^0. Однако ход этих кривых в переходной области
$T_0 \geq T \geq T^*$(соответствующей $0\leq k_1^2\leq 1$) можно построить графически исходя из кривых на рис. №1,2 и 3. Преобразование $k_1^2 \Leftrightarrow T$, согласно (75), является линейным преобразованием. Соответственно график $\Phi(k_1^2)$ путем преобразования можно переводить в график $\Phi(T)$ так,что точка $\Phi(k_1^2=0)$ в точке $\Phi(T_0)$ и точка $\Phi(k_1^2=1)$ в точке $\Phi(T^*)$. При этом, только одна точка на графике остается неподвижной. Кривые, построенные на основе кривых рисунков 1,2 и 3, приведены на рисунках 5, 6 и 7 соответственно.

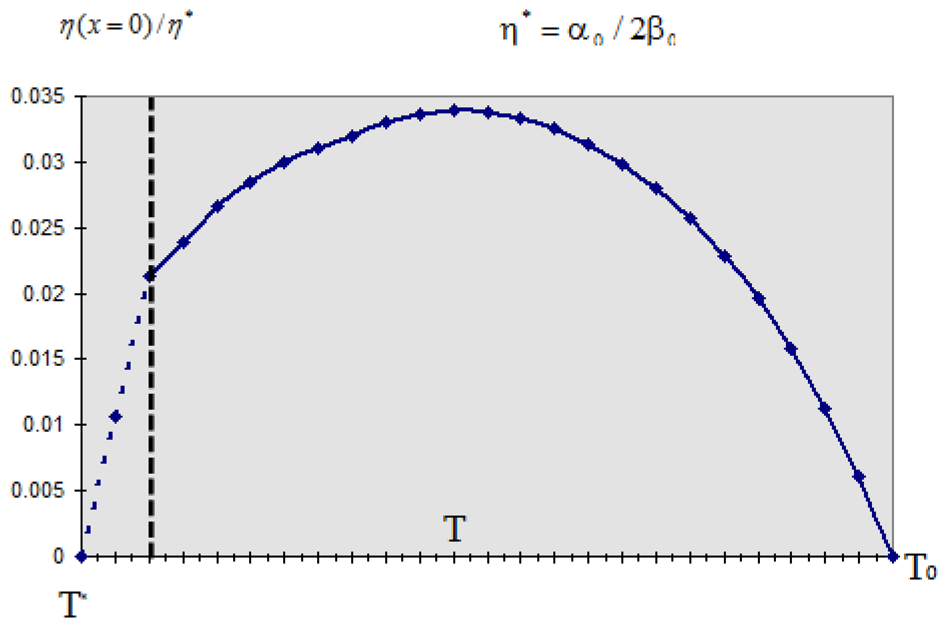


Рис. 5 Параметр порядка $\eta(x=0)/\eta^*$, как функция температуры T (согласно (69)) в переходной области $T^* \leq T \leq T_0$ в случае фазового перехода второго рода типа перехода Л. Ландау

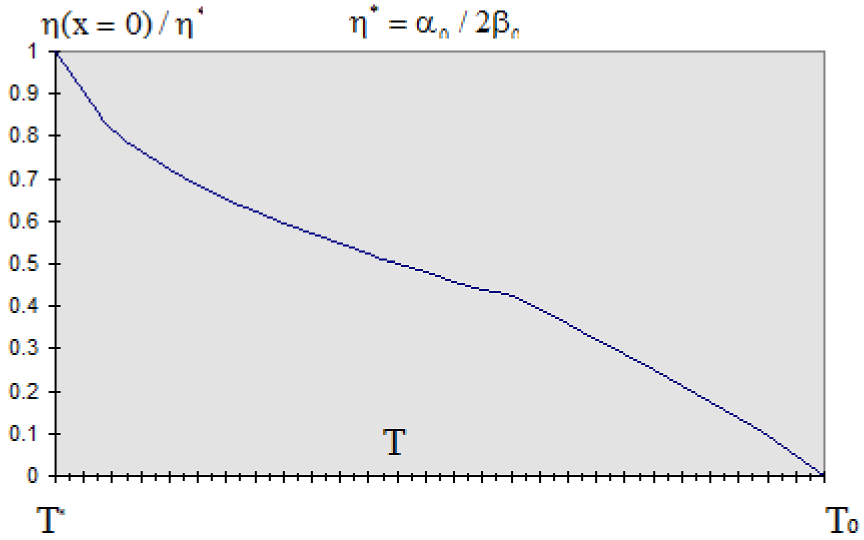


Рис. 6 Параметр порядка $\eta(x=0)/\eta^*$, как функция температуры T (согласно (70)) в переходной области $T^* \le T \le T_0$ в случае фазового перехода второго рода нового типа.

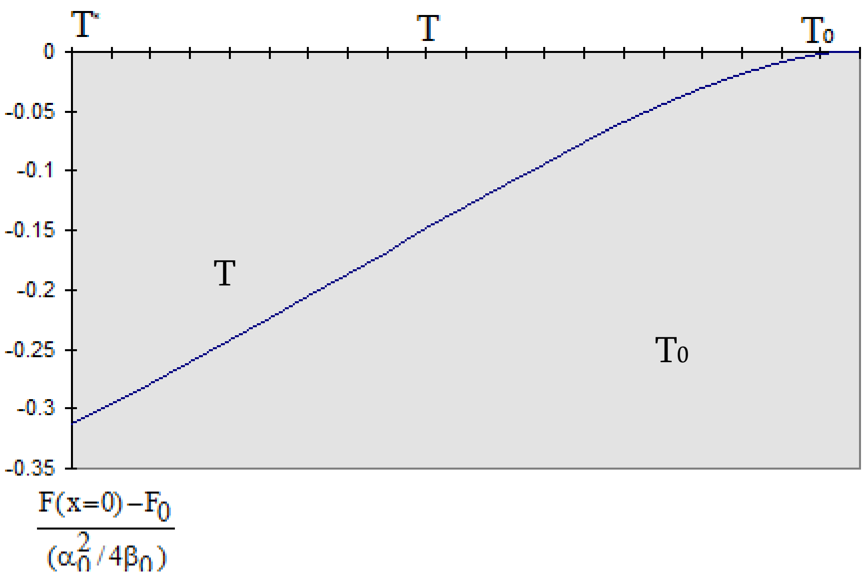


Рис. 7 Свободная энергия, как функция T , (согласно (70)) в переходной области $T^* \le T \le T_0$ в случае фазового перехода второго рода для обоих типов.

ISSN 1512-1461

Математическое приложение

Приложение 1

Для вычисления $\lim(k_1^2 \to 1)$ K и $\lim(k_1^2 \to 1) dK/dk_1^2$ будем исходить из двух известных (табличных) соотношении

$$1.\lim(k_1 \mapsto 1)\{\frac{\exp(-\pi K/K')}{1-k_1^2}\}=\frac{1}{16}, \qquad \lim(k_1^2 \mapsto 1)K'=\pi/2, \quad (П.1)$$

$$2.\ \frac{dK}{dk_1^2}=\frac{1}{2k_1^2}\{\frac{E}{1-k_1^2}-K\}, \qquad \lim(k_1^2 \mapsto 1)E=1, \quad (П.2)$$

В пределе $k_1^2 \mapsto 1$ имеем

$$\exp(-2K) \mapsto (1/16)(1-k_1^2), \quad \exp(-K) \mapsto (1/4)(1-k_1^2)^{1/2},$$
$$K \mapsto -(1/2)\ln[(1-k_1^2)/16]$$
$$dK/dk_1^2 \mapsto (1/2)\{(1-k_1^2)^{-1}+(1/2)\ln[(1-k_1^2)/16]\} \qquad (П.3)$$

Приложение 2

Для первой производной в выражении свободной энергии имеем

$$(dF/(dk_1^2))=(2\ \alpha_0^2/\beta_0)\{(1/2)(1-2\varphi(\kappa))\varphi(\kappa)' \ -(1-2\eta_0)\eta_0'\} \qquad (П.4)$$
$$\varphi(\kappa^2)=k_1^2/(1+k_1^2),\ \varphi(\kappa)'=1/(1+k_1^2)^2,\ \varphi(\kappa)''=-2/(1+k_1^2)^3$$

В точке катастрофы ($k_1^2=1$) имеем

$$(1-2\varphi(\kappa))^*=0 \quad (1-2\eta_0)^*=0 \qquad (П\ 5)$$
$$(dF/(dk_1^2))^*=0$$

Приложение 3.

$$(d^2F/(dk_1^2)^2)=$$
$$=(2\alpha_0^2/\beta_0)\{(1/2)(1-2\varphi(\kappa))\varphi(\kappa)''-\varphi(\kappa)'^2-(1-2\eta_0)\eta_0''+2(\eta_0')^2\} \qquad (П.6)$$

В точке катастрофы имеем

$$(d^2F/(dk_1^2)^2)^*=(2\alpha_0^2/\beta_0)\{-\varphi(\kappa)'^2+2(\eta_0')^2\}=$$
$$=(2\alpha_0^2/\beta_0)\{-1/16+2(\eta_0')^2\}=$$
$$=(2\alpha_0^2/\beta_0)\{-1/16+[1/4+ch(\sigma^*)^{-2}(d\sigma/dk_1^2)^*]^2\}= \qquad (П.7)$$
$$=(2\alpha_0^2/\beta_0)\{ch(\sigma^*)^{-2}(d\sigma/dk_1^2)^*+2\,ch(\sigma^*)^{-4}(d\sigma/dk_1^2)^{2*}\},$$

где было учтено, что

$$\eta_0'=\varphi(\kappa)'\,sn(\sigma)^2+2\varphi(\kappa)\,sn(\sigma)cn(\sigma)dn(\sigma)d\sigma/dk_1^2$$
$$\sigma=\omega(px)+n_1K=[(2/1+k_1^2)p(x/L_0)+(n_1/2)]2K \qquad (П.8)$$
$$d\sigma/dk_1^2==-[(2/(1+k_1^2)^2p(x/L_0)]\ln[(1-k_1^2)/16]+$$
$$+[(2/1+k_1^2)p(x/L_0)+(n_1/2)]\{(1-k_1^2)^{-1}+(1/2)\ln[(1-k_1^2)/16]\}$$

ISSN 1512-1461

В том числе, в точке катастрофы

$\eta_0'^* = 1/4 + ch^{-2}(\sigma^*)(d\,\sigma/d\,k_1^2)^*$
$(\eta_0')^{2*} = 1/16 + (1/2)\, ch^{-2}(\sigma^*)(d\,\sigma/d\,k_1^2)^* + ch^{-4}(\sigma^*)(d\,\sigma/d\,k_1^2)^{2*}$ (П.9)

$\sigma^* = [\,p(x/L_0)+(n_1/2)][\,-\ln[(1-k_1^2)/16],$
$ch(\sigma^*)^{-2} = 2[(1-k_1^2)/16]^{[2p(x/L_0)+n_1]}$
$d\,\sigma/\,d\,k_1^2)\,)^* = [(p/2)(x/L_0)\ln[(1-k_1^2)/16] +$
$/L_0) + n_1/2][(1-k_1^2)^{-1} + (1/2)\ln[(1-k_1^2)/16]$ (П.10)

$\varphi(1)=1/2,\quad \varphi(1)'=1/4,\quad \varphi(1)''=-1/4$

Приложение 4 (в случае (20))

$\sigma = \omega(px) + n_1K = [(2/1+k_1^2)p(x/L_0)+(n_1/2)](2K)$
$\sigma^* = [\,p(x/L_0)+(n_1/2)][\,-\ln[(1-k_1^2)/16],$ (П.11)
$(d\,\sigma/\,d\,k_1^2)\,) = \{[-2p/(1+k_1^2)^2](x/L_0)(2K) + [(2/1+k_1^2)p(x/L_0)+(n_1/2)](2K')$
$(d\,\sigma/\,d\,k_1^2)\,)^* = [(p/2)(x/L_0)\ln[(1-k_1^2)/16] +$
$[p(x/L_0) + n_1/2][(1-k_1^2)^{-1} + (1/2)\ln[(1-k_1^2)/16]$

$(d^2F/(d\,k_1^2)^2)^* = (\,2\alpha_0^2/\beta_0\,)\{\,ch(\sigma^*)^{-2}(d\,\sigma/d\,k_1^2)^* +$
$+2\,ch(\sigma^*)^{-4}(d\,\sigma/d\,k_1^2)^{2*}\,\}$ (П 12)
$ch(\sigma^*)^{-2} = 4[(1-k_1^2)/16]^{[2p(x/L_0)+n_1]}$
$ch(\sigma^*)^{-4} = 16[(1-k_1^2)/16]^{[4p(x/L_0)+2n_1}$ (П.13)

$(d^2F/(d\,k_1^2)^2)^* = (2\alpha_0^2/\beta_0)\{4[(1-k_1^2)/16]^{[2p(x/L_0)+n_1]}\{[(p/4)(x/L_0)\ln[(1-k_1^2)/16] + \quad [p(x/L_0)+$
$n_1/2][(1-k_1^2)^{-1} + (1/2)\ln[(1-k_1^2)/16]\} + +32[(1-k_1^2)/16]^{[4p(x/L_0)+2n_1]}\{\{[(p/4)(x/L_0)\ln[(1-k_1^2)/16]\}^2 +$
$\{[p(x/L_0) + n_1/2][(1-k_1^2)^{-1} + (1/2)\ln[(1-k_1^2)/16]\}^2 +$ (П.14)

$2\{[(p/4)(x/L_0)\ln[(1-k_1^2)/16]\,[p(x/L_0)+n_1/2][(1-k_1^2)^{-1} +$
$+(1/2)\ln[(1-k_1^2)/16]\}$

Наличие координатной зависимости осложняет анализ предельного перехода и поэтому ограничимся поведением выражения в точках x=0. Находим

$(d^2F/(d\,k_1^2)^2)^* =$
$=(\,2\alpha_0^2/\beta_0)\{\{\,[(1-k_1^2)/16]^{n_1}2n_1[(1-k_1^2)^{-1} + (1/2)\ln[(1-k_1^2)/16]\} +$
$32[(1-k_1^2)/16]^{2n_1}\,\{(n_1/2)[(1-k_1^2)^{-1} + (1/2)\ln[(1-k_1^2)/16]\}^2\,\} =$
$=(\,2\alpha_0^2/\beta_0)\{\,[(1-k_1^2)/16]^{n_1}\quad 2n_1\;\;[(1-k_1^2)^{-1} + (1/2)\ln[(1-k_1^2)/16]] +$
$32[(1-k_1^2)/16]^{2n_1}\,\{(n_1/2)^2[(1-k_1^2)^{-2} + (1-k_1^2)^{-1}\ln[(1-k_1^2)/16]\},$ (П.15)

Из этого выражения следует, что особенность возникает только при n=1/2 и имеем
$(d^2F/(d\,k_1^2)^2)^* = (2\,\alpha_0^2/\beta_0)\{\,[(1-k_1^2)/16]^{n_1}2n_1[(1-k_1^2)^{-1} +$
$32[(1-k_1^2)/16]^{2n_1}\{\,(n_1/2)^2[(1-k_1^2)^{-2} + (1-k_1^2)^{-1}\ln[(1-k_1^2)/16]\} =$

$=(\,2\alpha_0^2/\beta_0)\{\,[(1-k_1^2)/16]^{1/2}\,[(1-k_1^2)^{-1}/2 +$
$8[(1-k_1^2)/16]\;\{\{[(1-k_1^2)^{-2} + (1-k_1^2)^{-1}\ln[(1-k_1^2)/16]\} =$
$=(\,2\alpha_0^2/\beta_0)\{(1/4)(1-k_1^2)^{-1/2} + (\,1/8)\,[\,(1-k_1^2)^{-1} + \ln[(1-k_1^2)/16]\} =$

$=(\;\alpha_0^2/4\beta_0)\{2(1-k_1^2)^{-1/2} + [(1-k_1^2)^{-1} + \ln[(1-k_1^2)/16]]\}$ (П.16)

Таким образом, имеем

ISSN 1512-1461

$C_p^0= C_p/T(d\, k_1^2/dT)^2=(d^2F/(d\, k_1^2)^2)^*=$ (П 17)
$=(\lim k_1^2 \to 1)(\ \alpha_0^2/4\beta_0)\{\ 2(1- k_1^2)^{-1/2} + [(1-k_1^2)^{-1}+ \ln[(1-k_1^2)/16]]\}$

Приложение 3 (в случае (21))

$\sigma= \omega(px)+ n_1K,= \{(2m_0/\hbar^2)[\alpha_0/(1+k_1^2)]\}^{1/2}(px)+ n_1K$
$\sigma^*=(m_0\, \alpha_0 /\hbar^2)^{1/2}(px)-(n_1/2) \ln [(1- k_1^2)/16]=$
$=2\pi\, p(x/L^0{}_0)-(n_1/2)\ln [(1- k_1^2)/16],$ (П.18)
$\omega^*=(m_0\, \alpha_0 /\hbar^2)^{1/2}=2\pi /L_0^0$
$(d\,\sigma/ d\, k_1^2))= L_0^{0-1}[-2\pi(px)/2^{1/2}(1+k_1^2)^{3/2}] + n_1(d\, K / d\, k_1^2)$
$(d\,\sigma/ d\, k_1^2)^* = [-L_0^{0-1}2\pi\, (px)/4]+ (n_1/2)\ [(1- k_1^2)^{-1}+(1/2) \ln [(1- k_1^2)/16]]$

$(d^2F/(d\, k_1^2)^2)^*=(2\alpha_0^2/\beta_0)\{ch(\sigma^*)^{-2}(d\sigma/d\, k_1^2)^*+2ch(\sigma^*)^{-4}(d\sigma/d\, k_1^2)^{2}{}^*\}$

$ch(\sigma^*)^{-2}=4\{\exp[-2(m_0\, \alpha_0 /\hbar^2)^{1/2}(px)]\}[(1- k_1^2)/16]^{n}$ (П.19)
$ch(\sigma^*)^{-4}=16\ \{\exp[-4(m_0\, \alpha_0 /\hbar^2)^{1/2}(px)]\}[(1- k_1^2)/16]^{2n}{}_1$

$(d^2F/(d\, k_1^2)^2)^*/\ (2\alpha_0^2/\beta_0\ ) =$
$= 4[(1- k_1^2)/16]^{n}{}_1\{[-L_0^{0-1}2\pi(px)/4\ ]+$ (П.20)
$+ (n_1/2)[(1- k_1^2)^{-1}+(1/2) \ln [(1- k_1^2)/16]\}\exp[-2(m_0\, \alpha_0 /\hbar^2)^{1/2}(px)]$
$+32[(1-k_1^2)/16]^{2n}{}_1\{[-L_0^{0-1}2\pi(px)/4]+(n_1/2)[(1-k_1^2)^{-1}+(1/2)\ln[(1-k_1^2)/16]]\}^2$
$\exp[-4(m_0\, \alpha_0 /\hbar^2)^{1/2}(px)]$

При $n_1 =1/2$ получаем
$(d^2F/(d\, k_1^2)^2)^*/\ (2\alpha_0^2/\beta_0\ ) =$ (П.21)
$= \{\ (1/4)(1-k_1^2)^{-1/2}\}\exp[-2(m_0\, \alpha_0 /\hbar^2)^{1/2}(px)]+$
$+ \{\ (1/8)\, [(1-k_1^2)^{-1}+\ln[(1-k_1^2)/16]\}\ \exp[-4(m_0\, \alpha_0 /\hbar^2)^{1/2}(px)]$

В точке x=0 имеем

$(d^2F/(d\, k_1^2)^2)^*=(\alpha_0^2/4\beta_0)\{2(1-k_1^2)^{-1/2}+[(1-k_1^2)^{-1}+\ln[(1-k_1^2)/16]\}$(П.22)

Литература

1.Арнольд В.И. //Теория катастроф, изд. МГУ ,1993г//
2 Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. , Статитическа физика,Москва, Наука 1964,стр.501.
3.Демьянец Л.Н. , УФН, 1991, т 161, 17 ,стр.1.
4.Гинзбург В.Л. и Ландау Л.Д., ЖЭТФ, 1952, 27,стр.195.,
5.Гинзбург В.Л. ., УФН, 1991, т 131, 2 ,стр.1.
6.Курдгелаидзе Д.Ф., ЖЭТФ, 1959, 36, 3,стр.842.
Гимлер Р. , Прикладная теория катастрофы, Москва,Мир,1984 стр.175.

ISSN 1512-1461

On Branching solutions of the second order non-linear partial differential equations in physics

D.F. Kurdgelaidze and D.D. Kurdgelaidze

ABSTRACT:

It is shown that in the uniform madia there are two kinds of second order phase transitions, corresponding to the two types of catastrophe in such systems. In the first case the period of the periodic solution is constant, while the second case corresponds to non-constant period. In the first case the order parameter η vanishes at the point of catastrophe ($k_1^2 \to 1$), but in the second case $\eta \equiv \alpha_0 / 2\beta_0 \neq 0$. First case corresponds to the second order phase transition at isolated points only and on their vicinity. In contrast of this, in second case the phase transition happens in the whole system. The first case is analogous to the Landau transition in case of uniform medium, while the second transition with nonvanishing order parameter is a new kind of second order phase transition, that takes place in the whole system simultaneuosly.

Article received: 2015-03-02