ISSN 1512-1232

УДК 62-50

Анализ поведения конечного стохастического автомата в тернарной стационарной случайной среде

Тариел Хведелидзе *
Гурам Церцвадзе **

*Тбилисский Государственный Университет им. Ив.Джавахишвили
tariel.Khvedelidze@tsu.ge
** Институт вычислительной математики им. Н. Мусхелишвили Грузинского технического университета
gurtse@yahoo.com

Абстракт

Предлагается алгоритм поведения конечного стохастического автомата в стационарной случайной среде с тремя классами реакций (выигрыш, проигрыш, безразличие). Устанавливается сходимость последовательностей конечных автоматов (при емкости памяти $n \to \infty$) к соответствующим им бесконечным автоматам и дается полная классификация его возможного асимптотического поведения.

Ключевые слова: *конечный автомат, бесконечный автомат, поведение автомата, тернарная случайная среда, целесообразность поведения, асимптотическая оптимальность.*

Введение

Задача нахождения оптимального выбора из конечного множества альтернатив при случайном подкреплении в условиях априорной неопределенности как самого объекта, так и окружающей его среды, была сформулирована М. Л. Цетлиным как задача о поведении конечного автомата в случайной среде [1]. Среда в простейшем случае реагирует на деиствия автомата двояким образом: либо “ наказывает“, либо “поощряет“ автомат с некоторыми вероятностями. Априорных сведений о среде автомат не имеет.

Естественное стремление поскорее перейти к изучению сложных форм поведения автоматов привело к тому, что индивидуальное поведение автоматов было изучено недостаточно полно и строго и то лишь для случая стационарных случайных сред с двумя классами реакций (бинарные стационарные случайные среды), при этом, в частности, отсутствовала полная классификация возможного асимптотического поведения автоматов в стационарных случайных средах. Такой анализ оказался возможным благодаря исследованию поведения бесконечных (со счетным числом состояний) стохастических автоматов, нахождению адекватного этому поведению математического аппарата, определению сходимости (в разумном смысле) последовательностей конечных автоматов к соответствующим им бесконечным автоматам [2]. Вместе с тем основным недостатком существующих конечноавтоматных алгоритмов, осуществляющих в результате обучения выбор оптимальной, либо приближающийся к оптимальному, является их медленное обучение, ограничивающее возможность их применения для оптимизации выбора управляющих воздействий в темпе реального процесса.

В настоящей работе предлагается конструкция одного класса конечных стохастических автоматов функционирующих в тернарной стационарной случайной среде в предположении,

ISSN 1512-1232

что все возможные реакции среды воспринимаются ими, как относящиеся к одному из трех классов: классу благоприятных реакций (выигрыш), классу неблагоприятных реакций (проигрыш) и классу нейтральных реакций (безразличие). Исследуется вопрос сходимости последовательностей конечных стохастических автоматов предлагаемой конструкции к соответствующим им бесконечным стохастическим автоматам той же структуры и дается полная классификация их возможного асимптотического поведения (при емкости памяти $n \to \infty$).

Функционирование автоматов в тернарной стационарной случайной среде

Рассмотрим известную схему поведения автоматов в случайной среде [1] в предположений, что все возможные реакций $S\epsilon\{s_1, s_2, \ldots, s_g\}$ среды C воспринимаются автоматом, как относящиеся к одному из трех классов – классу благоприятных реакций (выигрыш, нештраф, $s = +1$), классу неблагоприятных реакций (проигрыш, штраф, $s = -1$) и классу нейтральных реакций (безразличие, $s = 0$). Внутри каждого из этих классов реакции среды являются для автоматов неразличимыми [3,4].

Определение. Будем говорить, что автомат A_k функционирует в тернарной стационарной случайной среде $C(a_1, r_1; a_2, r_2; \ldots; a_k, r_k)$, если действия автомата и значения входного сигнала связаны следующим образом : если автомат производит действие $f_\alpha(\alpha = \overline{1;k})$, то среда $C(a_1, r_1; a_2, r_2; \ldots; a_k, r_k)$ формирует на входе автомата значение сигнала $s = +1$ с вероятностью $q_\alpha = \frac{1-r_\alpha+a_\alpha}{2}$, значение сигнала $s = -1$ с вероятностью $p_\alpha = \frac{1-r_\alpha-a_\alpha}{2}$ и значение сигнала $s = 0$ с вероятностью $r_\alpha = 1 - q_\alpha - p_\alpha$ $(\alpha = \overline{1;k})$.

Здесь величина $a_\alpha = q_\alpha - p_\alpha$ ($|a_\alpha| <$ 1-r_α) имеет смысл математического ожидания выигрыша за действие f_α в среде $C(a_1, r_1; a_2, r_2; \ldots; a_k, r_k)$. Для определенности будем считать, что $a_1 > a_2 \geq \cdots \geq a_k$, т.е. действие f_1 автомата A_k со средним выигрышем a_1 в среде $C(a_1, r_1; a_2, r_2; \ldots; a_k, r_k)$ является оптимальным.

Для изучения возможного асимптотического (при числе состояний $n \to \infty$) поведения конечного автомата в стационарной случайной среде $C(a_1, r_1; a_2, r_2; \ldots; a_k, r_k)$ используем методику, основанную на установлении сходимости (при емкости памяти $n \to \infty$) производящей функции вероятностей смены действия для конечного автомата к соответствующей производящей функции для предельного бесконечного автомата той же структуры [2]. При этом об асимптотической оптимальности последовательности конечных автоматов можно судить по характеристикам предельного бесконечного автомата. В реализации этой программы исходными являются следующие статистические характеристики поведения: вероятности σ_α изменить (когда -либо) действие f_α и математические ожидания случайного времени τ_α до смены действия f_α при старте из состояния $x \in L_\alpha$, $\alpha = \overline{1;k}$.

В терминах этого набора характеристик поведение бесконечного автомата A_k в случайной среде классифицируется следующим образом.

Определение. Следуя [2], будем говорить, что автомат A_k, функционирующий в тернарной стационарной случайной среде $C(a_1, r_1; a_2, r_2; \ldots; a_k, r_k)$, является:

<u>оптимальным</u>, при $\sigma_{x,1} < 1$, $\sigma_{x,\alpha} = 1$, $\alpha = \overline{2;k}$, $\forall x$;
<u>строго оптимальным</u>, при $\sigma_{x,1} < 1$, $\sigma_{x,\alpha} = 1$, $\tau_{x,\alpha} < \infty$, $\alpha = \overline{2;k}$, $\forall x$;
<u>квазиоптимальным</u>, при $\sigma_{x,\alpha} = 1$, $\alpha = \overline{1;k}$, $\tau_{x,1} = \infty$, $\tau_{x,\alpha} < \infty$, $\alpha = \overline{2;k}$, $\forall x$;
<u>втягивающимся</u>, при $\sigma_{x,\alpha} < 1$, $\forall x, \alpha$;
<u>выталкивающимся</u>, при $\sigma_{x,\alpha} = 1$, $\tau_{x,\alpha} < \infty$, $\forall x, \alpha$;
<u>антиоптимальным</u>, при $\sigma_{x,k} < 1$, $\sigma_{x,\alpha} = 1$, $\alpha = \overline{1;k-1}$, $\forall x$;

ISSN 1512-1232

<u>антиквазиоптимальным</u>, при $\sigma_{x,\alpha} = 1,\ \alpha = \overline{1;k},\ \tau_{x,k} = \infty,\ \forall x$.

Анализ поведения бесконечного стохастического автомата $T_2^{(x)}(\varepsilon,\eta)$ в тернарной стационарной случайной среде $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$

Пусть бесконечный (со счетным числом состояний) стохастический автомат $T_2^{(x)}(\varepsilon,\eta)$ ($0 \le \varepsilon,\eta \le 1,\ 0 \le \varepsilon + \eta \le 1$) с $L = L_1 \cup L_2 = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\}$ внутренними состояниями и двумя $F_2 = \{f_1, f_2\}$ действиями функционирует в тернарной стационарной случайной среде $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$. При этом автомат $T_2^{(x)}(\varepsilon,\eta)$ в состояниях с номерами $x = \{\dots,-\mathrm{n},\dots,-1\}$ совершает действие f_1, а в состояниях с номерами $x = \{1,2,\dots,n,\dots\}$ - действие f_2.

Определим тактику поведения бесконечного стохастического автомата $T_2^{(x)}(\varepsilon,\eta)$ в тернарной стационарной случайной среде $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$ следующим образом: при сигнале $s = +1$ (выигрыш) состояния с номерами $x = i$ и $x = -i$ $(i = 1,2,\dots)$ соответственно переходят в состояния с номерами $x = i+1$ и $x = -(i+1)$; при сигнале $s = -1$ (проигрыш) состояния с номерами $x = i$ и $x = -i$ $(i = 2,3,\dots)$ переходят в состояния с номерами $x = i-1$ и $x = -(i-1)$ соответственно; состояния с номерами $x = \pm 1$ соответственно переходят в любое одно состояние с номером $x = \mp i$, $i = 1,2,\dots$; при сигнале $s = 0$ все состояния $x = i$ $(i = \pm 1, \pm 2, \dots)$ с вероятностью $1-\varepsilon-\eta$ переходят в себя, а с вероятностью ε (с вероятностью η) переходы между состояниями определяются также, как при сигнале $s = -1$ ($s = +1$) (рис.1).

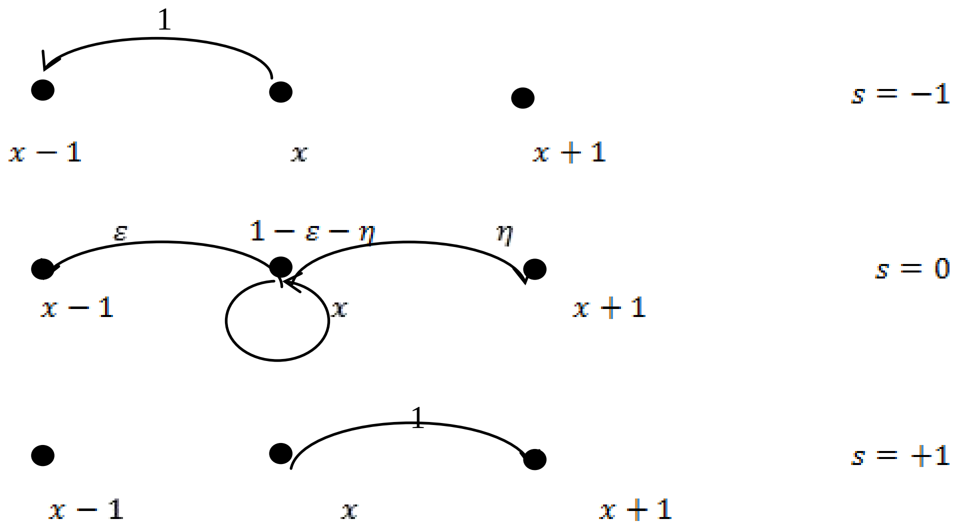

Рис.1. Фрагмент графа смены состояний автомата $T_2^{(x)}(\varepsilon,\eta)$ в подмножестве L_α при сигнале $S = \{-1,0,+1\}$.

Обозначим через $u_{x,d}$ вероятность того, что бесконечный стохастический автомат $T_2^{(x)}(\varepsilon,\eta)$ момент времени d впервые сменит действие f_α, стартуя из любого состояния с номером x области L_α.

С учетом тактики поведения автомата $T_2^{(x)}(\varepsilon,\eta)$ в стационарной случайной среде $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$, относительно вероятностей $u_{x,d}$ получим следующее разностное уравнение

$$u_{x,d+1} = Pu_{x-1,d} + Qu_{x+1,d} + Ru_{x,d},\quad x = 1,2,\dots \quad d = 0,1,2,\dots\ , \tag{1}$$

где

$$P = p + \varepsilon r,\ \ Q = q + \eta r,\ \ R = (1-\varepsilon-\eta)r,\ \ P + Q + R = 1$$

ISSN 1512-1232

и вытекающие из вероятностного смысла $u_{x,d}$ граничные условия

$$u_{0,0} = 1, \;\; u_{x,0} = 0 \;\; \forall x > 0. \tag{2}$$

Относительно производящей функции вероятностей смены действия

$$U_x(z) = \sum_{d=0}^{\infty} u_{x,d}\, z^d,$$

из (1), (2) получим граничную задачу

$$U_x(z) = \frac{Pz}{1-Rz} U_{x-1}(z) + \frac{Qz}{1-Rz} U_{x+1}(z), \quad x = 1,2,\ldots$$

$$U_0(z) = 1,$$

решением которой является

$$U_x(z) = \lambda_1^x(z),$$

где $\lambda_i^x(z)$, $i = 1,2$ корни характеристического уравнения

$$Qz\lambda^2(z) - (1 - Rz)\lambda(z) + Pz = 0 \tag{3}$$

такие, что

$$|\lambda_1(z)| < 1, \;\; |\lambda_2(z)| > 1 \tag{4}$$

при $|z| < 1$ $(z \neq 0)$.

Определим теперь статистические характеристики σ_x и τ_x.

Так как

$$\lambda_1(1) = \frac{P+Q-|P-Q|}{2Q}, \quad \sigma_x = U_x(1) = \lambda_1^x(1),$$

то

$$\sigma_x = \begin{cases} 1, & \text{при } P \geq Q \\ (P/Q)^x < 1, & \text{при } P < Q \end{cases}.$$

При $P < Q$ автомат с положительной вероятностью не покинет область L, поэтому естественно (формально) положить $\tau_x = +\infty$.

В случае, когда $P \geq Q$, $\tau_x = \frac{dU_x(z)}{dz}\Big|_{z=1} = \frac{x}{P-Q}$.

Таким образом, для статистических характеристик поведения бесконечного стохастического автомата $T_2^{(x)}(\varepsilon,\eta)$, окончательно будем иметь :

$$\sigma_{x,\alpha} = \begin{cases} 1, & \text{при } P_\alpha \geq Q_\alpha \\ \left(\frac{P_\alpha}{Q_\alpha}\right)^{|x|} < 1, & \text{при } P_\alpha < Q_\alpha \end{cases}, \tag{5}$$

$$\tau_{x,\alpha} = \begin{cases} \frac{|x|}{P_\alpha - Q_\alpha}, & \text{при } P_\alpha > Q_\alpha \\ +\infty, & \text{при } P_\alpha \leq Q_\alpha \end{cases} \quad (\alpha = 1,2).$$

С учетом того , что условие $Q_\alpha > P_\alpha$ эквивалентно условию $a_\alpha > (\varepsilon - \eta) r_\alpha$, $\alpha = 1,2$, сопоставление полученных результатов с (5), приводит к справедливости следующих классификационных утверждении в зависимости от значения величины $(\varepsilon - \eta)(r_1 - r_2)$.

Теорема. Поведение бесконечного стохастического автомата $T_2^{(x)}(\varepsilon,\eta)$, функционирующего в тернарной стационарной случайной среде $C(a_1, r_1; a_2, r_2)$, является:

ISSN 1512-1232

1) если $(\varepsilon-\eta)(r_1-r_2)<0$, то при $a_1\le(\varepsilon-\eta)r_1$, $a_2>(\varepsilon-\eta)r_2$ – оптимальным: $\sigma_{x,1}=1$, $\sigma_{x,2}<1$, $\tau_{x,1}=\frac{|x|}{P_1-Q_1}$, $\tau_{x,2}=\infty$;

при $a_1<(\varepsilon-\eta)r_1$, $a_2>(\varepsilon-\eta)r_2$ – строго оптимальным: $\sigma_{x,1}=1$, $\sigma_{x,2}<1$, $\tau_{x,1}=\frac{|x|}{P_1-Q_1}<\infty$, $\tau_{x,2}=\infty$;

при $a_1>(\varepsilon-\eta)r_1$, $a_2\le(\varepsilon-\eta)r_2$ – оптимальным или антиоптимальным: $\sigma_{x,1}=\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{|x|}<1$, $\sigma_{x,2}=1$, $\tau_{x,1}=\infty, \tau_{x,2}=\frac{x}{P_2-Q_2}$;

при $a_1=(\varepsilon-\eta)r_1$, $a_2<(\varepsilon-\eta)r_2$ –квазиоптимальным или антиквазиоптимальным : $\sigma_{x,\alpha}=1$, $\alpha=1{,}2$, $\tau_{x,1}=\infty$, $\tau_{x,2}=\frac{x}{P_2-Q_2}<\infty$;

при $a_\alpha>(\varepsilon-\eta)r_\alpha$ – втягивающимся : $\sigma_{x,\alpha}=\left(\frac{P_\alpha}{Q_\alpha}\right)^{|x|}<1$, $\tau_{x,\alpha}=\infty$, $\alpha=1{,}2$;

при $a_\alpha<(\varepsilon-\eta)r_\alpha$ – выталкивающимся: $\sigma_{x,\alpha}=1$, $\tau_{x,\alpha}=\frac{|x|}{P_\alpha-Q_\alpha}<\infty$, $\alpha=1{,}2$;

2) если $(\varepsilon-\eta)(r_1-r_2)\ge 0$, то при $a_1>(\varepsilon-\eta)r_1$, $a_2\le(\varepsilon-\eta)r_2$ – оптимальным : $\sigma_{x,1}=\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{|x|}<1$, $\sigma_{x,2}=1$, $\tau_{x,1}=\infty$, $\tau_{x,2}=\frac{x}{P_2-Q_2}$;

при $a_1>(\varepsilon-\eta)r_1$, $a_2<(\varepsilon-\eta)r_2$ – строго оптимальным: $\sigma_{x,1}=\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{|x|}<1$, $\sigma_{x,2}=1$, $\tau_{x,1}=\infty$, $\tau_{x,2}=\frac{x}{P_2-Q_2}<\infty$;

при $a_1=(\varepsilon-\eta)r_1$, $a_2<(\varepsilon-\eta)r_2$ – квазиоптимальным: $\sigma_{x,\alpha}=1$, $\alpha=1{,}2, \tau_{x,1}=\infty$, $\tau_{x,2}=\frac{x}{P_2-Q_2}<\infty$;

при $a_\alpha>(\varepsilon-\eta)r_\alpha$ – втягивающимся: $\sigma_{x,\alpha}=\left(\frac{P_\alpha}{Q_\alpha}\right)^{|x|}<1$, $\tau_{x,\alpha}=\infty$, $\alpha=1{,}2$;

при $a_\alpha<(\varepsilon-\eta)r_\alpha$ – выталкивающимся: $\sigma_{x,\alpha}=1$, $\tau_{x,\alpha}=\frac{|x|}{P_\alpha-Q_\alpha}<\infty$, $\alpha=1{,}2$.

Асимптотическое поведение конечного стохастического автомата $T_{2n,2}^{(x)}(\varepsilon,\eta)$ в тернарной стационарной случайной среде $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$

В заключении рассмотрим функционирование конечного стохастического автомата $T_{2n,2}^{(x)}(\varepsilon,\eta)$ с $2n$ внутренними состояниями $L^{(n)}=L_1^{(n)}\cup L_2^{(n)}=\{\pm 1, \dots, \pm n\}$ и двумя $F_2=\{f_1,f_2\}$ действиями в тернарной стационарной случайной среде $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$. При этом автомат в состояниях с номерами $x=\{-n,\dots,-2,-1\}$ совершает действие f_1, а в состояниях с номерами $x=\{1,2,\dots,n\}$ - действие f_2.

Тактика поведения автомата $T_{2n,2}^{(x)}(\varepsilon,\eta)$ в среде $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$ такая же, как у бесконечного стохастического автомата $T_2^{(x)}(\varepsilon,\eta)$, однако при сигнале $s=+1$ (выигрыш) состояния с номерами $|x|=n$ переходят в себя.

Если обозначим через $u_{x,d}^{(n)}$ вероятность того, что конечный стохастический автомат $T_{2n,2}^{(x)}(\varepsilon,\eta)$, функционирующий в случайной среде $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$, в момент времени d впервые сменит действие f_α , стартуя из любого состояния с номером $|x|\in\{1,2,\dots,n\}$ области $L_\alpha^{(n)}$, $\alpha=1{,}2$, то относительно вероятностей $u_{x,d}^{(n)}$ будем иметь:

$$u_{x,d+1}^{(n)}=Pu_{x-1,d}^{(n)}+Qu_{x+1,d}^{(n)}+Ru_{x,d}^{(n)}, \quad x=1,2,\dots,n, \quad d=0,1,2,\dots \qquad (6)$$

ISSN 1512-1232

и, вытекающие из вероятностного смысла $u_{x,d}^{(n)}$, граничные условия

$$u_{0,0}^{(n)} = 1,\ u_{x,0}^{(n)} = 0 \quad \forall x \in \{1,2,\dots,n\}, \quad u_{n,d}^{(n)} = u_{n+1,d}^{(n)}. \tag{7}$$

Из (6) и (7), относительно производящей функции вероятностей смены действия

$$U_x^{(n)}(z) = \sum_{d=0}^{\infty} u_{x,d}^{(n)} z^d,$$

получим граничную задачу

$$U_x^{(n)}(z) = \frac{Pz}{1-Rz} U_{x-1}^{(n)}(z) + \frac{Qz}{1-Rz} U_{x+1}^{(n)}(z), \quad x = 1,2,\dots,n,$$
$$U_0^{(n)}(z) = 1, \qquad U_n^{(n)}(z) = U_{n+1}^{(n)}(z),$$

решением которой является

$$U_x^{(n)}(z) = \frac{\lambda_2^n(z)(\lambda_2(z)-1)\lambda_1^x(z) - \lambda_1^n(z)(\lambda_1(z)-1)\lambda_2^x(z)}{\lambda_2^n(z)(\lambda_2(z)-1) - \lambda_1^n(z)(\lambda_1(z)-1)}, \quad x = 1,2,\dots,n, \tag{8}$$

где $\lambda_i(z),\ i = 1,2$ корни характеристического уравнения (3).

Из (8) с учетом (4) получим,что

$$\lim_{n\to\infty} U_x^{(n)}(z) = \lambda_1^x(z) = U_x(z).$$

Но сходимость производящих функций влечет сходимость вероятностей, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} u_{x,d}^{(n)} = u_{x,d}.$$

Таким образом, последовательность конечных автоматов $\left\{T_{2n,2}^{(x)}(\varepsilon,\eta)\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к предельному автомату $T_2^{(x)}(\varepsilon,\eta)$ той же структури и , согласно [2], его асимптотическое поведение полностью определяется поведением предельного автомата.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Цетлин М.Л. Исследование по теории автоматов и моделированию биологических систем . М , Наука , 1969.
2. Королюк В.С., Плетнев А. И., Эйдельман С .Д. Автоматы. Блуждания. Игры. Успехи математических наук. т .43, вып 1(259) , 1988.
3. Церцвадзе Г. Н., Хведелидзе Т.Д. Анализ целесообразного поведения марковских автоматов при трех типах реакций случайной среды. Труды ТГУ, 1989.
4. Хведелидзе Т.Д., Церцвадзе Г. Н. Случайные блуждания и анализ поведения автоматов в случайных средах с тремя классами реакций. Труды ТГУ, 1991.

Статья получена: 2015-07-02