ISSN 1512-1232

УДК 519.213

О необходимости, способе и следствиях учёта апостериорной информации в схеме испытаний Бернулли

Виктор Хуцишвили

Институт Систем Управления Арчила Элиашвили Грузинского Технического Университета, Тбилиси, Грузия
(e-mail: otariko@yahoo.com)

Аннотация

Предложена схема последовательных испытаний Бернулли с непостоянной вероятностью успеха – она подвергается естественной коррекции в зависимости от исхода очередного испытания. В результате генерируется распределение, полезное с прикладной точки зрения. Оно является обобщением биномиального распределения и обладает интересными свойствами, в частности оно не подчиняется закону больших чисел Бернулли.

Ключевые слова: *схема Бернулли, коррекция вероятности успеха, закон больших чисел*

1. Введение

Классическая схема последовательных независимых испытаний Бернулли является хорошей моделью для описания множества реальных случайных величин. Но требование независимости испытаний, т. е. постоянства вероятности успеха во всех следующих друг за другом испытаниях, является сильным ограничением и препятствует применению схемы и соответствующего ей биномиального распределения для изучения ещё большего множества разнообразных случайных величин, существующих в реальности. Целью настоящей статьи является расширение ареала применимости схемы последовательных испытаний посредством придания схеме Бернулли свойства адаптивности путём применения довольно простого и естественного правила учёта будущей информации об исходе очередного испытания, а также описание свойств соответствующего обобщения биномиального распределения.

2. Мотивирующий пример

Рассмотрим коэффициенты одной из опытных букмекерских контор на точные счета конкретного трёхсетового теннисного матча: 2:0 – 3.15, 2:1 – 4.20, 1:2 – 4.20, 0:2 – 3.15. Анализ этих чисел позволяет сделать заключение, что силы соперников равны, вероятности победы каждого из них равны 0.5 как в матче, так и в отдельных сетах. Если элементарным исходом считать результат сета, то классическая схема Бернулли даёт одинаковую вероятность для всех точных счетов сетов – 0.25, то есть коэффициенты на все точные счета должны быть равными. Полученное чувствительное отклонение свидетельствует о том, что в данном примере классическая схема работает плохо. Причиной этому является нарушение требования независимости испытаний – вероятность выиграть второй сет выше при условии победы в первом сете. Можно усомниться в правомерности рассмотрения розыгрыша сета в качестве элементарного испытания. Но и при переходе к розыгрышам очка картина не меняется. Сложная система подсчёта очков в теннисе и разница между элементарными (корневыми) вероятности выигрыша очка на своей и чужой подачах не мешает сделать тот

ISSN 1512-1232

же вывод: испытания не являются независимыми и применение ориентированной на теннис модификации классической схемы Бернулли даёт всё те же равные вероятности для точных счетов сетов, то есть – ощутимые отклонения от реальности. Обобщая приведённый пример, можно утверждать, что уже проведённые испытания могут отражать несколько изменённые условия их проведения и эти изменения следует учитывать.

3. Формула учета будущей апостериорной информации

Имея целью не отказываться от схемы Бернулли в случае зависимых испытаний, мы предлагаем следующую адаптивную процедуру уточнения вероятности успеха p в зависимости от поступающей информации о результате текущего испытания (используем символику языка C++ [1]):

$$p = (\text{неудача})\ ?\ (p - sp) : (p + sq), \quad q = 1 - p,$$

то есть неудача в текущем испытании влечёт за собой срезание s-ой доли с вероятности успеха, а успех срезает такую же долю с вероятности неудачи q. Таким образом мы превращаем вероятность успеха в случайную величину. Конечно, умозрительная обработка результатов испытаний усложняется ввиду того, в этом случае имеет значение какой конкретный сценарий будет реализован в процессе испытаний, а число возможных реализаций очень велико. Только конечных состояний 2^n, где n – число испытаний, и формула бинома Ньютона неприменима. Следует отметить, что неотъемлемой частью нашего, по сути статистического обобщения схемы Бернулли, является промежуточное усреднение вероятностей успеха. Поясним на примере. Уже после двух испытаний наша формула коррекции даёт два варианта для вероятности успеха в состоянии одного успеха из двух возможных. В одном варианте успешным было первое испытание, в другом – второе. Именно в этом месте осуществляется усреднение, в результате которого состояние одного успеха после двух испытаний имеет однозначную вероятность успеха в третьем испытании. Оставляя обозначение p для вероятности успеха в первом испытании, случайную величину вероятности успеха после n испытаний обозначим через P. Предложенная формула коррекции вероятности успеха обладает важным свойством консервативности – математическое ожидание P равно p. Действительно, при n = 2

$$E(P) = p(p + sq) + q(p - sp) = p^2 + pq = p(p + q) = p.$$

Свойство E(P) = p доказывается и для любого n.

Очевидно, что при s = 0 мы имеем классическую схему Бернулли с неизменной вероятностью успеха. Сразу же рассмотрим другой крайний случай – s = 1. В этом случае все испытания, начиная со второго, успешны при условии успеха в первом испытании и неудачны при условии первой неудачи. Такую ситуацию можно трактовать как вырожденную схему Бернулли с безнадёжным исходом для неудачника в первом испытании. Иными словами, результат первого испытания предопределяет результаты всех оставшихся испытаний и проводить их уже не имеет смысла. Иллюстрацией к такой схеме может служить древняя традиция выявлять победителя сражения по результату схватки лидеров противоборствующих сторон. Продолжим сравнение крайних случаев значения коэффициента срезки s, предположив, что число испытаний n = 100, а вероятность успеха в первом испытании p = 0.5. Дискретная случайная величина X – количество успешных исходов – в обоих случаях будет иметь среднее значение 50. Что касается среднеквадратичного отклонения, то при s = 0 оно равно 5, при s = 1 оно принимает максимально возможное значение, равное 50, так как в этом случае X с равной вероятностью принимает значения 0 или 100. Проведённое сравнение даёт основание прогнозировать, что с ростом параметра срезки s среднее значение X не меняется, среднеквадратичное отклонение будет расти, колоколообразная форма распределения X – выполаживаться с дальнейшим возникновением двух симметричных горбов, увеличивающихся по высоте и смещающихся к краям интервала [0, 100].

4. Результаты расчётов, графики

Пусть вероятность успеха в первом испытании p = 0.5, а число испытаний n = 100. Значения коэффициента срезки s будем менять от 0 до 0.15. Среднеквадратичное отклонение распределения X обозначим через σ.

Табл. 1. Вероятности 50-ти успешных испытаний и среднеквадратичные отклонения

s	0	0.001	0.002	0.005	0.010	0.020	0.050	0.100	0.150
P (X=50)	0.0796	0.0758	0.0722	0.0632	0.0520	0.0381	0.0211	0.0119	0.0078
σ	5.00	5.25	5.50	6.27	7.59	10.21	17.35	26.55	33.18

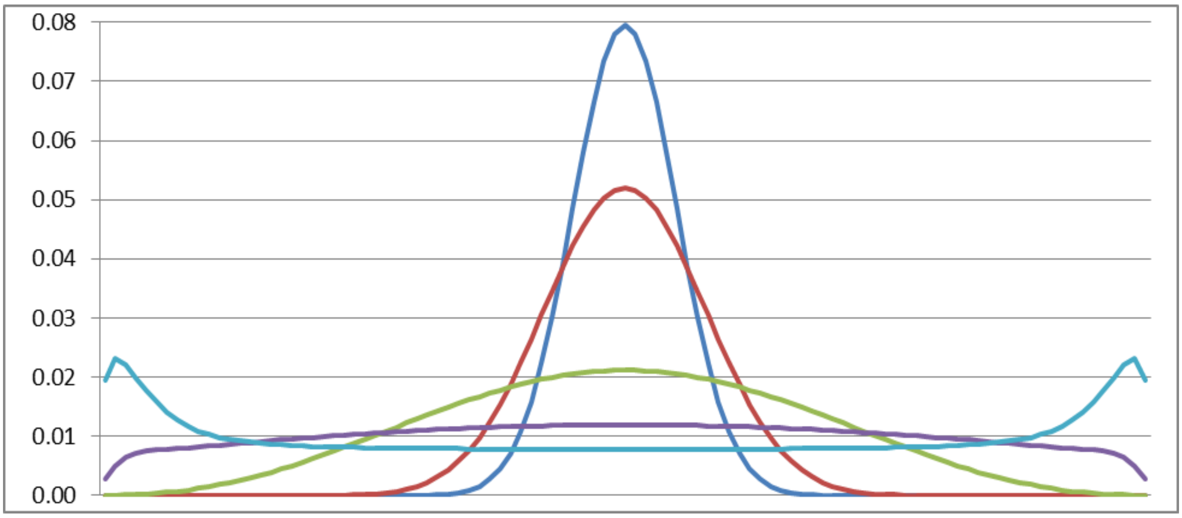

Рис. 1. Распределение X для различных значений коэффициента срезки

Из табл. 1 видно, что с ростом коэффициента срезки среднеквадратичное отклонение резко возрастает, а вероятность ровно 50-ти успехов из 100 – уменьшается. На рис. 1 приведены графики распределения X на интервале [0, 100] для 5-ти значений s – 0, 0.01, 0.05, 0.1 и 0.15. Видно, как с ростом s сплющивается классическая гауссова кривая, соответствующая s = 0.

5. Обобщённое биномиальное распределение

В общем случае распределение X естественно назвать обобщённым биномиальным распределением и обозначить через **B**(n,p,s), где n – число испытаний, p – априорная вероятность успеха в первом испытании, s – параметр срезки при неудаче. Представляется, что наибольший интерес будут вызывать значения s, не превышающие 0.01. Теперь зафиксируем p = 0.5 и проследим за поведением отношения среднеквадратичного отклонения распределения **B**(n,p,s) к его среднему значению при увеличении числа испытаний.

Табл. 2. Отношения среднеквадратичных отклонений к средним значениям

p = 0.5	n=16	n=32	n=64	n=128	n=256	n=512	n=1024
σ/(n/2) при s=0	0.2500	0.1768	0.1250	0.0884	0.0625	0.0442	0.0313
σ/(n/2) при s=0.003	0.2558	0.1851	0.1370	0.1057	0.0874	0.0801	0.0820
σ/(n/2) при s=0.005	0.2594	0.1906	0.1451	0.1175	0.1045	0.1041	0.1137

Из второй строчки таблицы видно, как действует закон больших чисел Бернулли, а именно – увеличение числа испытаний в 4 раза влечёт за собой уменьшение относительного отклонения от среднего в 2 раза. Что касается относительного отклонения при $s > 0$, то оно ведёт себя разительно иначе – с некоторого значения n оно перестаёт уменьшаться и начинает увеличиваться! Это говорит о том, что даже при наличии минимальной срезки, которая, по нашему мнению, отражает невозможность соблюсти неизменные условия проведения последовательных испытаний, увеличивать без меры число испытаний не имеет смысла. О бессмысленности увеличения числа испытаний упоминается и в монографии [2]: „Внешне симметричная монета падала на одну из сторон с частотой около 0.5005 - 0.5077. Существенно, что последний результат, демонстрирующий наибольшее отклонение от 1/2, получен для самой длинной серии испытаний (более 80 тысяч бросаний).“

6. Об идентификации параметра срезки

В свете изложенных результатов естественно статистическую задачу определения параметра p по результатам повторных испытаний заменить задачей определения пары (p,s), решение которой одновременно позволит сделать вывод о степени независимости проведенных испытаний. Действительно, если из 400 испытаний успешными были 200, в том числе из последних 100 – 75, то вывод $p = 0.5$ для 401-го испытания представляется ошибочным. К идентификации s следует подключать экспертов. В нашем теннисном примере это букмекеры, квалификация которых не вызывает сомнений – ведь за свои ошибки они расплачиваются в полной мере. Идея привлечения букмекеров в качестве экспертов заимствована нами из работы [3]. Проведём идентификацию s на теннисном примере. Применение результатов работы [4] дает оценку вероятности счета 2:0 в 29%. Отсюда следует, что вероятность победы во втором сете при условии выигрыша первого сета равна 58%, т. е. исходная вероятность увеличилась на 8 процентных пунктов, что составляет 16% от исходных 50%. Итак, $s = 0.16$, но реально коэффициент срезки должен зависеть от того, насколько легко выигран первый сет. Поэтому в качестве элементарного испытания естественно брать розыгрыш очка, а не целого сета. Вычислительные эксперименты, проведённые автором [5], показали что коэффициент срезки корневых вероятностей колеблется в районе одной-двух десятых долей процента и такая срезка резко повышает адекватность модели тенниса как последовательности испытаний с двумя перемежающимися вероятностями успеха – на своей подаче и на подаче противника.

7. Результаты расчётов при p = 0.3

Пусть, как и в п. 4, $n = 100$, а s принимает 5 значений – 0, 0.01, 0.05, 0.1 и 0.15. Среднее значение **B**(100,0.3,s) равно 30-ти и, естественно, соответствующие графики на этот раз будут несимметричными относительно вертикали, проходящей через середину интервала [0,

ISSN 1512-1232

100]. Интересно проследить, как с ростом s гауссоида трансформируется в гиперболообразную кривую, похожую на кривую распределения Парето–Ципфа [2].

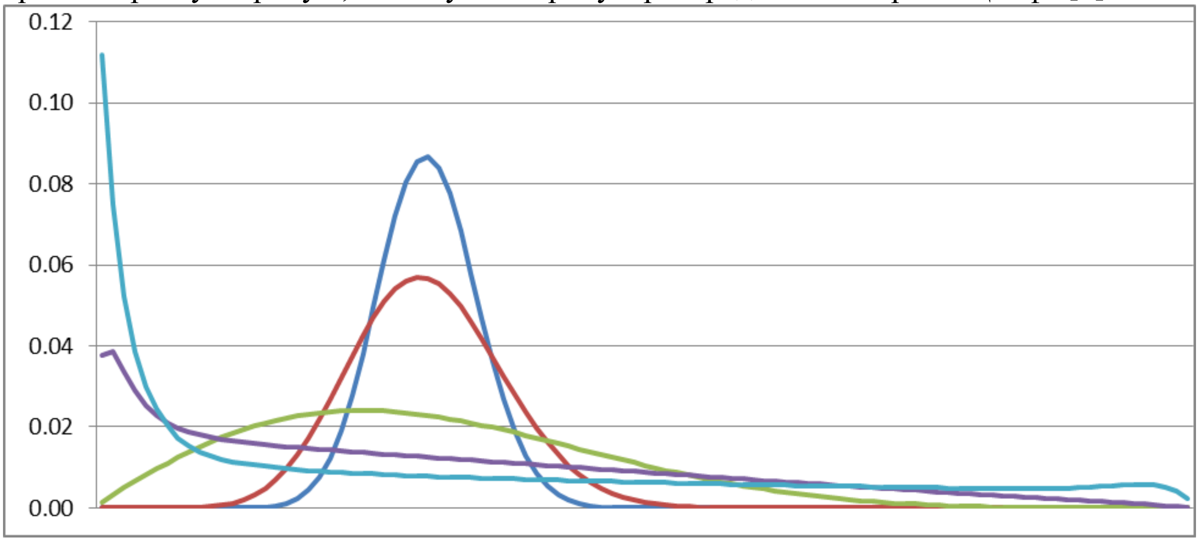

Рис. 2. Распределение **B**(100,0.3,s) для различных значений коэффициента срезки

Приведём также таблицу, аналогичную таблице 2 из п. 5. Эффект тот же – при s > 0 закон больших чисел Бернулли не выполняется.

Табл. 3. Отношения среднеквадратичных отклонений к средним значениям при p = 0.3

p = 0.3	n=16	n=32	n=64	n=128	n=256	n=512	n=1024
σ/(np) при s=0	0.3819	0.2700	0.1909	0.1350	0.0955	0.0675	0.0477
σ/(np) при s=0.003	0.3905	0.2827	0.2092	0.1614	0.1335	0.1223	0.1253
σ/(np) при s=0.005	0.3963	0.2912	0.2216	0.1795	0.1597	0.1590	0.1736

8. Заключение

Выразим надежду, что предложенное нами обобщённое биномиальное распределение **B**(n,p,s) будет полезным для исследователей-прикладников, особенно при малых s, когда испытания почти независимы.

Литература

1. Павловская Т. А. C/C++. Программирование на языке высокого уровня. СПб.: Питер, 2003. 461 с.
2. Чайковский Ю. В. О природе случайности. Москва: Центр системных исследований. Институт истории естествознания и техники РАН, 2004. 2-е изд., испр. и доп. 280 с.
3. Vovk V., Zhdanov F. Prediction with expert advice for the Brier game. Journal of Machine Learning Research, 2009, vol. 10, pp. 2445-2771.
4. Хуцишвили В. В. Связь между вероятностями событий и коэффициентами букмекеров. Сборник трудов Института Систем Управления Арчила Элиашвили Грузинского Технического Университета, 2014, № 18, стр. 142-146.

ISSN 1512-1232

5. Хуцишвили В. В. Моделирование букмекерских коэффициентов в процессе теннисного матча. Международная научная конференция «Информационные и компьютерные технологии, моделирование, управление», посвящённая 85-летию со дня рождения академика И. В. Прангишвили. Тбилиси: «Технический Университет», 2015, стр. 477-480.

Статья получена: 2015-11-28