ISSN 1512-1461

УДК 530.1(075.8)

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ЭЛЕКТРОНА В АЛЬФЕНОВСКОЙ ВОЛНЕ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Байрамова Г.А.

Бакинский государственный университет, кафедра физики твердого тела, ул. З. Халилова, 23,
AZ1148 Баку, Азербайджан
gunel.bayramova2016@yandex.com

Аннотация

В статье исследуется осцилляция электрона в проводящей среде, которая движется в постоянном магнитном поле. Используя альфеновскую частоту строится гамильтониан ситемы. В цилиндрической координатной системе строится радиальное уравнение Шредингера, решение которого сводится к выражденной гипергеометрической функции.

Ключевые слова: Радиальное уравнение Шредингера, Альфеновская волна, плазма- подобные структуры

Общепризнано, что электромагнитные процессы имеют фундаментальное значение для целого ряда явлений. Объдинением классической электродинамики с гидродинамикой привело магнитная гидродинамика(МГД), что имеет непосредственное отношение с физикой плазмы. При гидродинамическом движении газообразной или жидкой проводящей среды в магнитном поле, в ней индуцируется электрические поля и соответственно возникают электрический токи, на которые в магнитном поле действуют силы, которые существенно влияют на движение этой проводящей среды (жидкости). Происходит сложная картина взаимодействия магнитных и гидродинамических явлений, так как возникающие электрические токи меняют и само магнитное поле в которой движется жидкость. Не вдаваясь в подробности специфических условий применимости МГД в конкретных физических объектах, укажем то, что для применимости МГД, длина и время пробега носителей тока (электронов, или ионов) должны быть существенно малы по сравнению с характерными расстояниями и промежуткой времени движения этой жидкости. Но в идеальном случае, когда уравнения движения жидкости формально совпадают с уравнениями МГД, в принципе возникает ситуация с неравновесной плазмы с температурой электронов много большей температуры ионов, допускает возможности движения такой среды с большой длиной пробега.

Пренебрегая всеми процессами диссипации, например как малость коэффициента затухания волн, в случае идеальной жидкости, рассмотрим распространение осцилляции электрона, подразумевая его как малое возмущение в такой однородной проводящей среде, находящейся в однородном постоянном магнитном поле. Исходя МГД из уравнений идеальной жидкости с вышеназванными пренебрежениями (см. [1]), и учитывая движения среды как изэнтропично (т.е., энтропия s в возмущенной среде постоянна, в ссвязи однородности невозмущенная среды). При решении МГД уравнений в виде плоской волны $\exp\left\{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)\right\}$ для распространении осцилляции электрона в проводящей среде, находящейся в однородном магнитном поле, согласно закону дисcперсии, частота ω осцилляции электрона существенно зависит от направления волнового вектора: $\vec{k}$ $\omega=\left(4\pi\rho\right)^{-1/2}\vec{H}\vec{k}$, т.е., физическая скорость становится независимым от направления волнового вектора и

ISSN 1512-1461

совпадает с направлением постоянного магнитного поля $\vec{H}$. Выясняется, что распространени малых возмущений (т.е., осцилляция электрона) в идеальной проводящей среде, находящейся в постоянном магнитном поле, принципе – осцилляция электрона в альфеновской волне[1], распространяющейся в постоянном магнитном поле.

Исследуем задачу осцилляции электрона в альфвеновской волне в постоянном магнитном поле с интенсивностью $\vec{H}$. Гамильтониан такой системы имеет вид:

$$H = \frac{\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}{2M} + \frac{M\,\omega_A^2 \vec{r}^{\,2}}{2} \tag{1}$$

(здесь M - масса электрона, $e > 0$ - электрический заряд электрона, а ω_A - частота осцилляции электрона в проводнике – в альфвеновской среде. $\omega_A = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho_{Liq}}}\vec{B}\vec{k}$ [1], где ρ_{Liq} – плотность идеального газа (жидкости), $\vec{B}$ - магнитная индукция. При этом плазменный потенциал принимает вид $\frac{M\,\omega_A^2 \vec{r}^{\,2}}{2} = \frac{M\,\vec{r}^{\,2}}{8\pi\rho_{Liq}}\left(\vec{B}\vec{k}\right)^2$), и для гамильтониана (1) получаем нижеследующее выражение,

$$H = \frac{\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}{2M} + \frac{M\,\vec{r}^{\,2}}{8\pi\rho_{Liq}}\left(\vec{B}\vec{k}\right)^2 . \tag{2}$$

Далее, согласно общим принципам квантовой механики можно построить гамильтонов оператор данной физической системы в координатном представлении. При этом, до построения Гамильтонового оператора, следуя корректному раскрытию квадрата оператора импульса $\left(\hat{\vec{p}} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2$ естественным путем требуется выполнение калибровочного условия $div\vec{A} = 0$, из которого автоматически вытекает выражение для вектора потенциала $\vec{A} = \frac{1}{2}\left[\vec{B}\vec{r}\right]$, и следовательно получаем для гамильтониана (2) следующее выражение,

$$H = \frac{1}{2M}\left(\vec{p}^{\,2} + \frac{e}{c}\vec{B}\vec{L} + \frac{e^2}{c^2}\frac{1}{4}\left[\vec{B}\vec{r}\right]^2\right) + \frac{M\,\vec{r}^{\,2}}{8\pi\rho_{Liq}}\left(\vec{B}\vec{k}\right)^2 . \tag{3}$$

На основе ‘наивного’ постулировании определяем гамильтонов оператор нашей системы в координатном представлении:

$$\hat{H} = \frac{1}{2M}\left(-\hbar^2\Delta + \frac{e}{c}\vec{B}\hat{\vec{L}} + \frac{e^2}{c^2}\frac{1}{4}\left[\vec{B}\vec{r}\right]^2\right) + \frac{M\,\vec{r}^{\,2}}{8\pi\rho_{liq}}\left(\vec{B}\vec{k}\right)^2 . \tag{4}$$

Направив $\vec{B}$ по оси z (т.к. $\vec{k}$ совпадает с $\vec{B}$, используя $\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$ и постулат $k_z^2 = \left(\frac{\hat{p}_z}{\hbar}\right)^2 = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, также выражения для компонент вектора потенциала $A_z = 0$, $A_\rho = 0$, $A_\varphi = \frac{B\rho}{2}$ как следствие калибровки $div\vec{A} = 0$ в цилиндрических координатах

ISSN 1512-1461

($r^2=\rho^2+z^2$), а также явный вид оператора Лапласа, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ в этих же координатах [2], наконец напишем уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]$$

$$-i\hbar\frac{\omega_B}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+\frac{M\omega_B^2}{8}\left(\rho^2+z^2\right)\psi-\frac{M\omega_A^2}{2}\left(\rho^2+z^2\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-E\psi=0. \qquad (4)$$

Здесь, $\omega_B=\frac{eB}{Mc}$, а $\omega_A=\frac{B}{\sqrt{4\pi\rho_{Liq}}}$ -альфеновская частота.

Так как $z,\ \hat{p}_z$ не коммутируют, в то же время коммутируют с $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ ($r^2=\rho^2+z^2$) то, решение УШ (4) можно искать в нижеследующем виде:

$$\psi(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}e^{\frac{i}{\hbar}p_z z}R(\rho).$$

Для радиальной функции получим уравнение

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR(\rho)}{d\rho},\right)$$

$$+\left[E-\hbar m\frac{\omega_B}{2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{m^2}{\rho^2}-\frac{p_z^2}{2M}-\frac{M\omega_B^2}{8}\left(\rho^2+z^2\right)-\frac{Mp_z^2\omega_A^2}{2\hbar^2}\left(\rho^2+z^2\right)\right]R(\rho)=0 \qquad (5)$$

(где m магнитное квантовое число)

Введя новую независимую переменную $\xi=\frac{M\omega_B}{2\hbar}\rho^2$, уравнение (5) приобретает вид

$$\xi\frac{d^2R(\xi)}{d\xi^2}+\frac{dR(\xi)}{d\xi}+\left[-(\frac{1}{4}+\frac{p_z^2\omega_A^2}{\hbar^2\omega_B^2})\xi+\beta-\frac{m^2}{4\xi}\right]R_\xi=0, \qquad (6)$$

где $\beta=\frac{1}{\hbar\omega}\left(E-\frac{p_z^2}{2M}-\frac{Mp_z^2\omega_A^2}{2\hbar^2}z^2-\frac{M\omega_B^2}{8}z^2\right)-\frac{m}{2}$

Похожее уравнение приведено в [3] для нахождения волновой функции электрона в однородном магнитном поле. В отличие от этой задачи, в которой электрон обладает только лишь определенными значениями импульса и момента, в нашей задаче изучения малых возмущений (т.е осцилляции электрона) в однородной проводящей среде (как прототип плазмы), в однородном магнитном поле $\vec{H}_0$ исходя из уравнений МГД [1], в уравнение (6) входят новые члены по p - $\frac{p_z^2\omega_A^2}{\hbar^2\omega_B^2}$. В отличие от вышеназванной задачи [3] мы исследуем задачу нахождения волновой функции электрона в однородной проводящей среде, которая в свою очередь как уже отметили выше в однородном постоянном магнитном поле, где электрон обладает только импульсом и моментом, где также учитывается плотность(ρ_{Liq}) этой проводящей среды (жидкости).

При $\xi\to\infty$ искомая функция ведет себя как $e^{-\xi/2}$, а при $\xi\to 0$ как $\xi^{\frac{m}{2}}$ [3].
Согласно этому рассуждению решение (7) ищем в виде:

ISSN 1512-1461

$$R(\xi) = e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|m|}{2}} \omega(\xi) \tag{7}$$

(см. [3]).
для $\omega(\xi)$ получаем уравнение:

$$\xi \frac{d^2\omega(\xi)}{d\xi^2} + (|m| + 1 - \xi)\frac{d\omega(\xi)}{d\xi} - \frac{p_z^2\omega_A^2}{\hbar^2\omega_B^2}\xi\omega(\xi) + \beta\omega(\xi) = 0\,, \tag{8}$$

которое в частных случаях для параметров приводится к дифференцияльному уравнению

$$\xi \frac{d^2\omega(\xi)}{d\xi^2} + (|m| + 1 - \xi)\frac{d\omega(\xi)}{d\xi} - \beta\omega(\xi) = 0\,,$$

решение которого есть гипергеометрическая функция Кумера

$$\omega(\xi) = \Phi\left(\frac{1}{\hbar\omega}\left(E - \frac{p_z^2}{2M} - \frac{Mp_z^2\omega_A^2}{2\hbar^2}z^2 - \frac{M\omega_B^2}{8}z^2\right) - \frac{m}{2},\ |m| + 1,\ \xi\right),$$

или к вырожденному гипергеометрическому уравнению или уравнению Бесселя, результаты которых приведены в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д.и Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Москва: Наука, 1982(Издание второе), 620 с.
2. Маделунг Э. Математический аппарат физики. Москва: Наука, 1968(Издание второе), 618 с.
3. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Квантовая механика (Нерелятивистская теория). Москва: Наука, 1989(Издание четвертое), Том III, 495 с.
4. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Москва: Наука, 1973(Издание второе), Том I, 294 с.

Article received: 2019-12-05